PROBLEMA MO ORIGINAL (MAVROTAS, 2009)

$$max\ f_1 = x_1$$

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

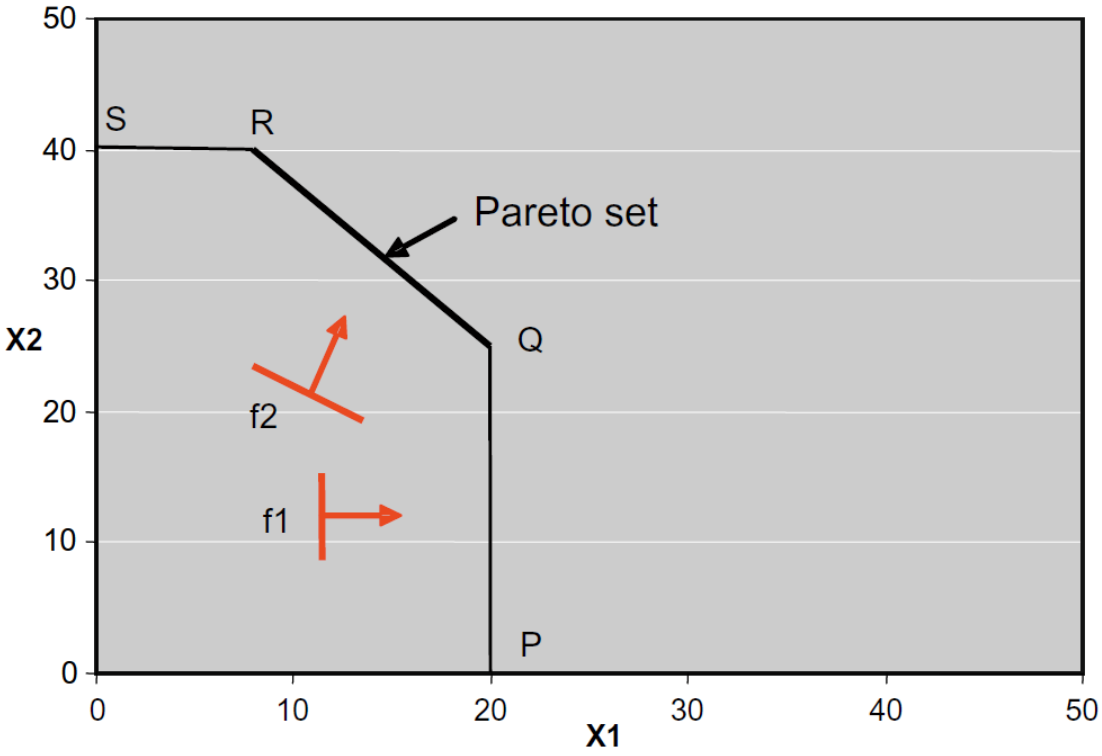


Fig. 1. Feasible region and directions of objective functions.

ENCONTRAR LOS EXTREMOS DEL FRENTE DE PARETO

Resolvemos dos problemas SO

1) Hallamos el primer extremo maximizando f_1

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 0$$

$$f_1 = 20, \qquad f_2 = 60$$

2) Hallamos el segundo extremo maximizando f_2

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20;$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 40$$

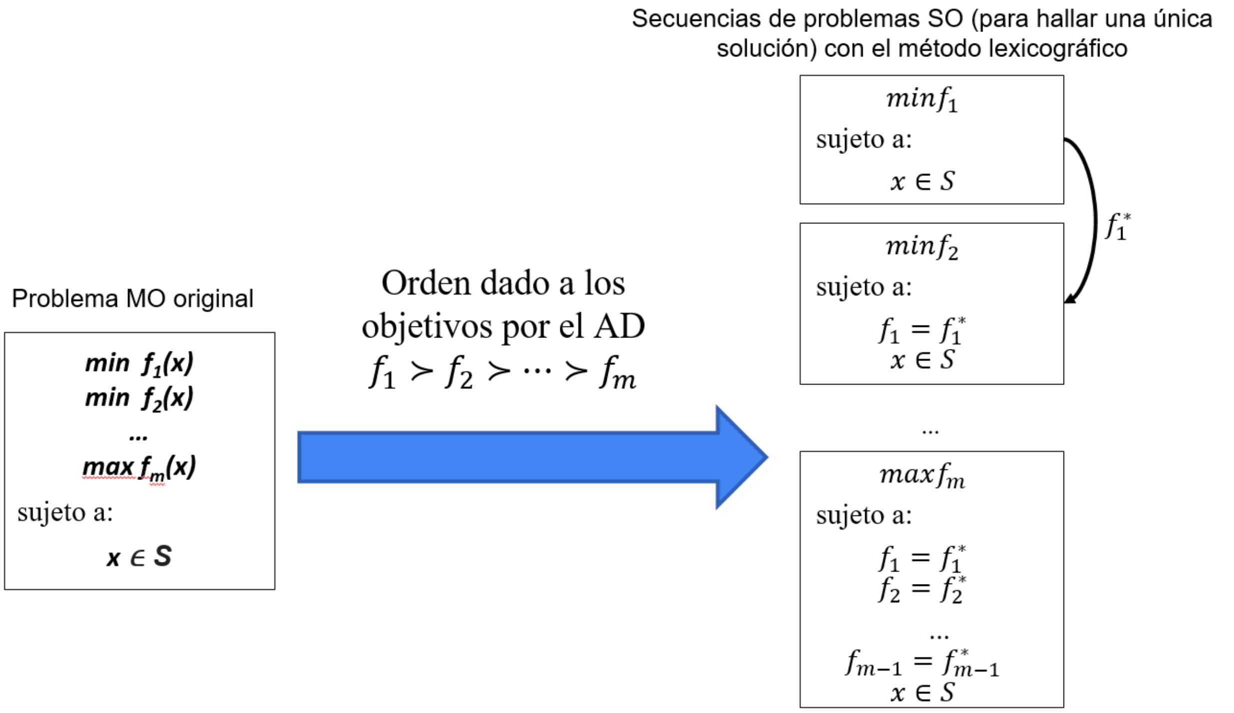
$$f_1 = 8, \qquad f_2 = 184$$

Entonces los extremos dentro del frente de Pareto estimados son:

$$Vector\ ideal = [20, 184]$$

$$Vector\ antideal = [8, 60]$$

ENCONTRAR LOS EXTREMOS DEL FRENTE DE PARETO CON OPTIMIZACIÓN LEXICOGRÁFICA



Resolvemos cuatro problemas SO:

1) Hallamos el primer extremo en dos pasos

1.a) maximizar f_1

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 0$$

$$f_1 = 20, \qquad f_2 = 60$$

1.b) maximizar f_2 sujeto a que f_1 no empeore

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$f_1 = 20$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 25$$

$$f_1 = 20, \qquad f_2 = 160$$

2) Hallamos el segundo extremo en dos pasos

2.a) maximizar f_2

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 40$$

$$f_1 = 8, \qquad f_2 = 184$$

2.b) maximizar $\boldsymbol{f_1}$ sujeto a que $\boldsymbol{f_2}$ no empeore

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$f_2 = 184$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 40$$

$$f_1 = 8, \qquad f_2 = 184$$

En este caso, la estimación del punto extremo no varió. ¿Hicimos esta ejecución en vano?

Entonces los extremos dentro del frente de Pareto estimados son:

$$Vector\ ideal = [20, 184]$$

$$Vector\ antideal = [8, 160]$$

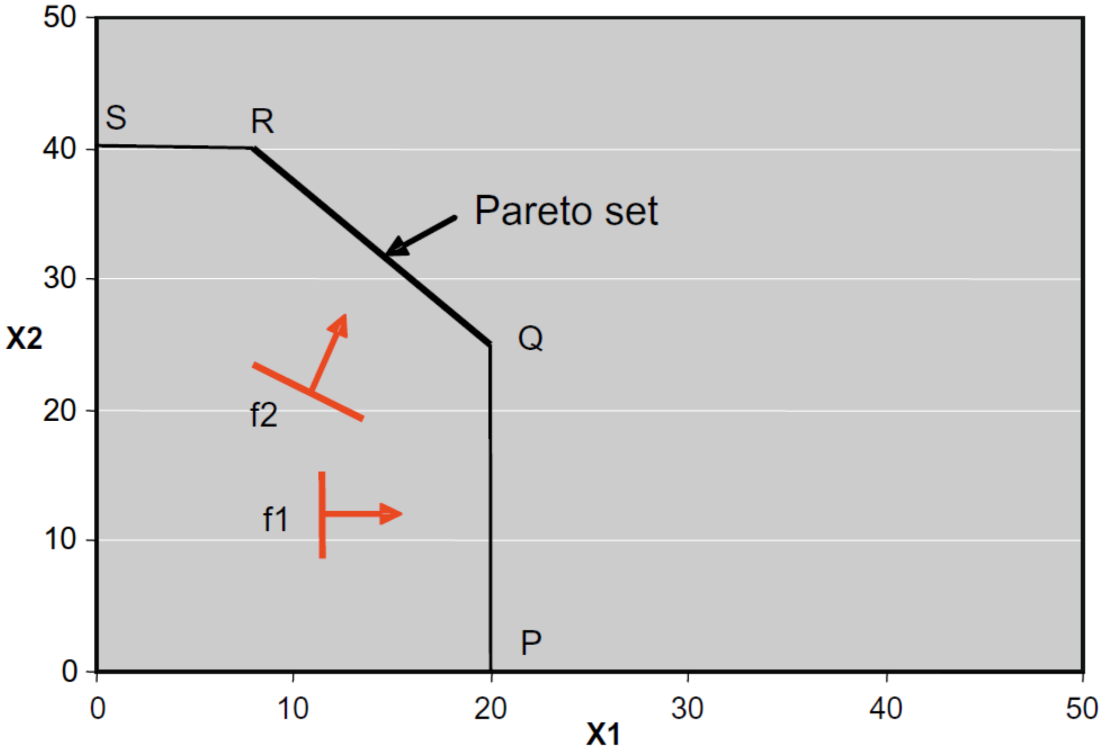


Fig. 1. Feasible region and directions of objective functions.

ENCONTRAR SOLUCIONES MO CON EL MÉTODO DE LA SUMA PONDERADA

Problema MO original

$$\begin{array}{c} \min\ f_1(x) \\ \min\ f_2(x) \\ \dots \\ \max f_m(x) \end{array}$$

Sujeto a:

$$x \in S$$

Problema SO aplicando el método de las sumas ponderaciones

$$\min w_1 f_{1(x)} + w_2 f_{2(x)} + \dots + w_m(-f_m(x))$$

Sujeto a

$$x \in S$$

Plantear un vector de pesos con tantas componentes como objetivos tenga el problema:

$$\vec{w} = [w_1, w_2]$$

Normalizar los objetivos.

Si no poseo los valores ideales y antideales (nadir) debiera calcularlos. Acá los tomamos del paso anterior.

$$d_1 = \frac{f_1^* - f_1}{f_1^* - f_{1*}} = \frac{20 - f_1}{20 - 8}$$

$$d_2 = \frac{f_2^* - f_2}{f_2^* - f_{2*}} = \frac{184 - f_2}{184 - 160}$$

Para que f_1, f_2 sean lo más grande posible d_1, d_2 tiene que ser lo más chica posible.

Entonces puedo trabajar con un problema de minimización:

$$min\, w_1 d_1 + w_2 d_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

O si quiere seguir minimizando invierto los signos de las normalizaciones y uso:

$$d'_1 = \frac{f_1 - f_1^*}{f_1^* - f_{1*}} = \frac{f_1 - 20}{20 - 8}$$

$$d'_2 = \frac{f_2 - f_2^*}{f_2^* - f_{2*}} = \frac{f_2 - 184}{184 - 160}$$

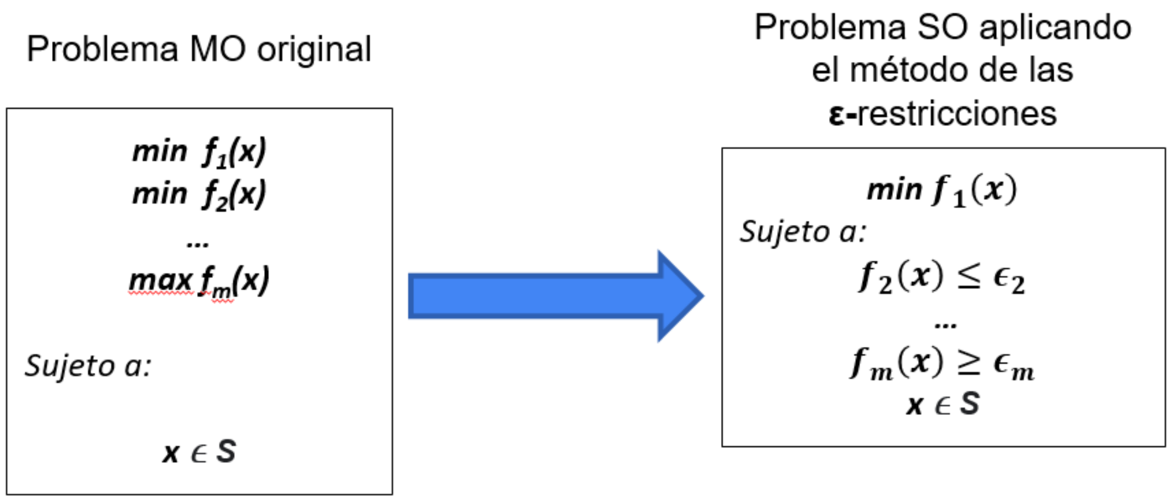
Como método de enfoque de resolución a posteriori defino una serie de vectores $\vec{w}$ y resuelvo para estos vectores. Recordar que en general $w_1 + w_2$=1

En pyomo veremos que con 10 vectores distribuidos uniformemente con un paso de 0.1: se obtiene:

$w_1 = 0$	$x_1 = 8, \quad x_2 = 40$ $f_1 = 8, \quad f_2 = 184$
$w_1 = 0.1$	$x_1 = 8, \quad x_2 = 40$ $f_1 = 8, \quad f_2 = 184$
…	
$w_1 = 0.4$	$x_1 = 8, \quad x_2 = 40$ $f_1 = 8, \quad f_2 = 184$
$w_1 = 0.5$	$x_1 = 20, \quad x_2 = 25$ $f_1 = 20, \quad f_2 = 160$
$w_1 = 0.6$	$x_1 = 20, \quad x_2 = 25$ $f_1 = 20, \quad f_2 = 160$
…	
$w_1 = 1$	$x_1 = 20, \quad x_2 = 25$ $f_1 = 20, \quad f_2 = 160$

¿Qué podemos decir de esto?

ENCONTRAR SOLUCIONES MO CON EL MÉTODO DE LAS EPSILON-RESTRICCIONES



Definir qué objetivo estará en la función objetivo y cual restringido.

Tomar los valores ideales y antideales (nadir) del objetivo restringido y dividirlo por la cantidad de soluciones que quiero buscar menos uno.

Objetivo estará en la función objetivo f_1

Objetivo restringido f_2

Tomo el rango del objetivo restringido f_2 y lo divido en $n = 10$ intervalos (y buscaré $n + 1 = 11$ soluciones).

$$paso = \frac{f_2^* - f_{2*}}{n} = \frac{184 - 160}{10} = 2{,}4$$

Entonces ya puedo plantear los 11 problemas SO donde $\varepsilon^i = f_{2*} + paso * i, \quad i = 0, \ldots n$

El primer problema será

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$f_2 \geq \varepsilon^0 \text{ ó } f_2 \geq 160 + 2{,}4 * 0 \text{ ó } f_2 \geq 160$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

El segundo problema será

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$f_2 \geq \varepsilon^1 \text{ ó } f_2 \geq 160 + 2{,}4 * 1$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Soluciones en pyomo:

```
Epsilon 160.0
Sol vars - it:0 x1= 20.0 x2= 25.0
Sol FO - it:0 f1= 20.0 f2= 160.0
Epsilon 162.4
Sol vars - it:1 x1= 18.8 x2= 26.5
Sol FO - it:1 f1= 18.8 f2= 162.4
Epsilon 164.8
Sol vars - it:2 x1= 17.6 x2= 28.0
Sol FO - it:2 f1= 17.6 f2= 164.8
Epsilon 167.2
Sol vars - it:3 x1= 16.4 x2= 29.5
Sol FO - it:3 f1= 16.4 f2= 167.2
Epsilon 169.6
Sol vars - it:4 x1= 15.2 x2= 31.0
Sol FO - it:4 f1= 15.2 f2= 169.6
Epsilon 172.0
Sol vars - it:5 x1= 14.0 x2= 32.5
Sol FO - it:5 f1= 14.0 f2= 172.0
Epsilon 174.4
Sol vars - it:6 x1= 12.8 x2= 34.0
Sol FO - it:6 f1= 12.8 f2= 174.4
Epsilon 176.8
Sol vars - it:7 x1= 11.6 x2= 35.5
Sol FO - it:7 f1= 11.6 f2= 176.8
Epsilon 179.2
Sol vars - it:8 x1= 10.4 x2= 37.0
Sol FO - it:8 f1= 10.4 f2= 179.2
Epsilon 181.6
Sol vars - it:9 x1= 9.2 x2= 38.5
Sol FO - it:9 f1= 9.2 f2= 181.6
Epsilon 184.0
Sol vars - it:10 x1= 8.0 x2= 40.0
Sol FO - it:10 f1= 8.0 f2= 184.0
```

ENCONTRAR SOLUCIONES MO CON EL MÉTODO DE LAS EPSILON-RESTRICCIONES AUMENTADO

El método de las épsilon restricciones aumentado incorpora un mecanismo para evitar soluciones repetidas en problemas enteros. Es decir, si lo aplicamos sobre el mismo problema no habrá cambios pero si suponemos que tenemos un problema entero:

$$max\ f_1 = x_1$$

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20;$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \in \mathrm{Z}_0^+$$

Y buscamos un gran número de soluciones veremos que ahorra tiempo de cómputo (saltea iteraciones que darían soluciones repetidas).

El modelo resulta similar:

$$max\ f_1 = x_1 + 0{,}001 * \frac{s_2}{f_2^* - f_{2*}}$$

Sujeto a:

$$f_2 - s_2 = \varepsilon$$

$$x_1 \leq 20$$

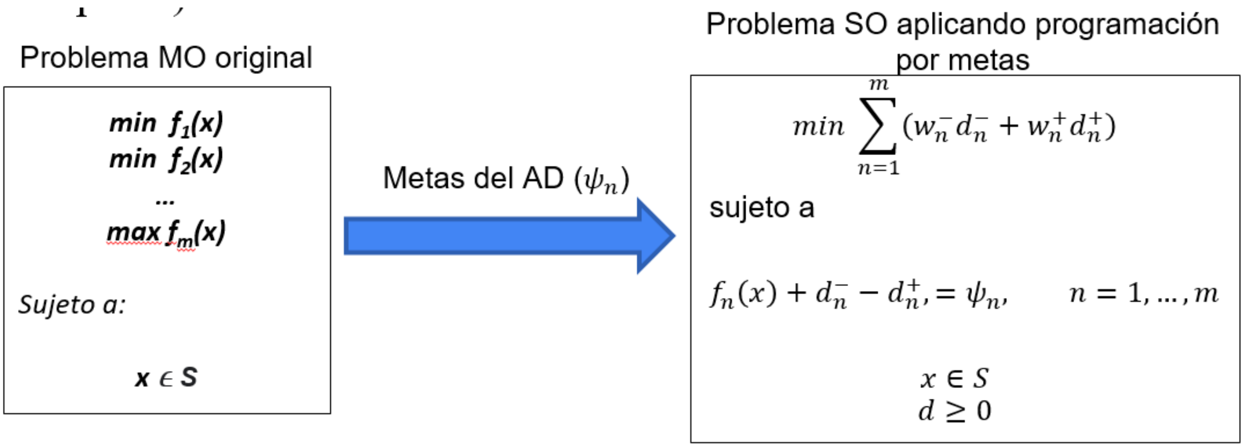
$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

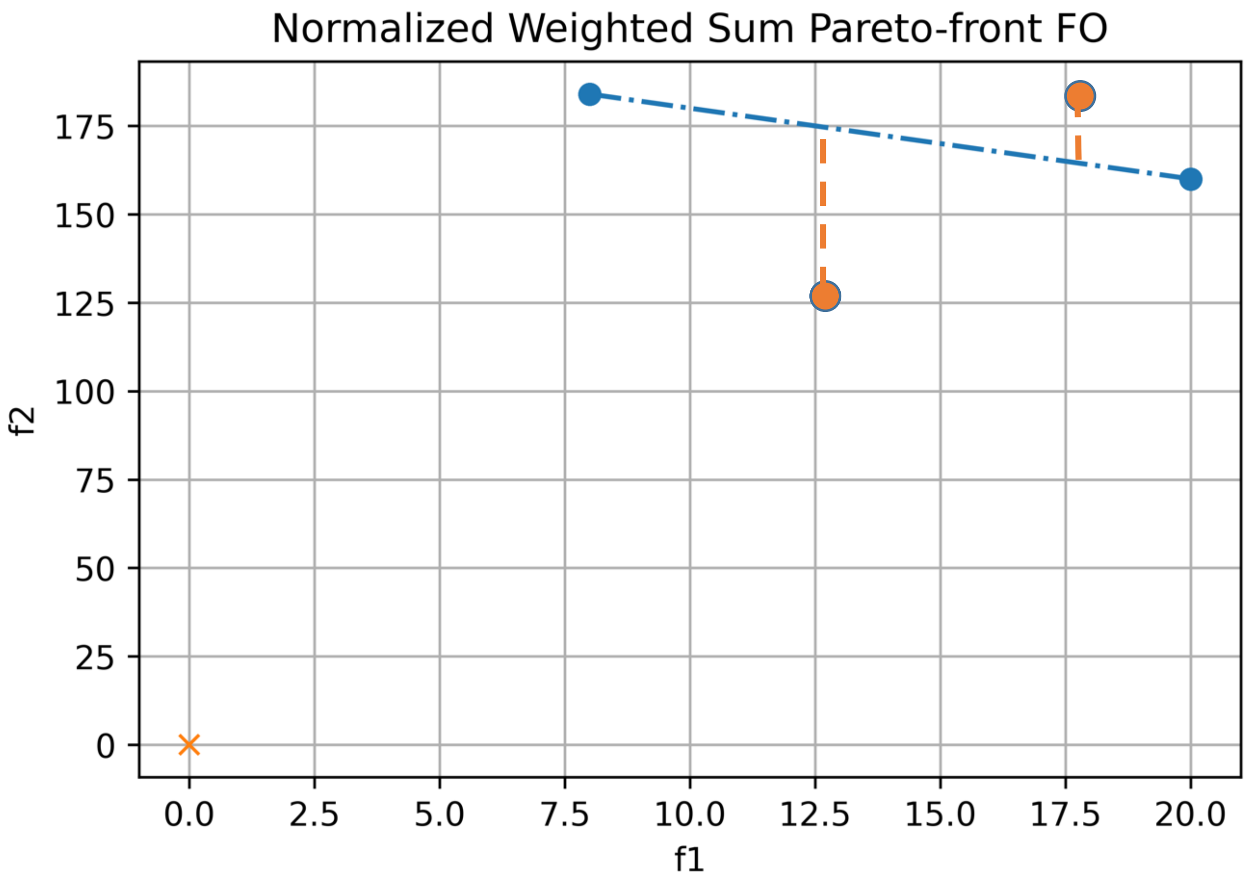
$$x \geq 0$$

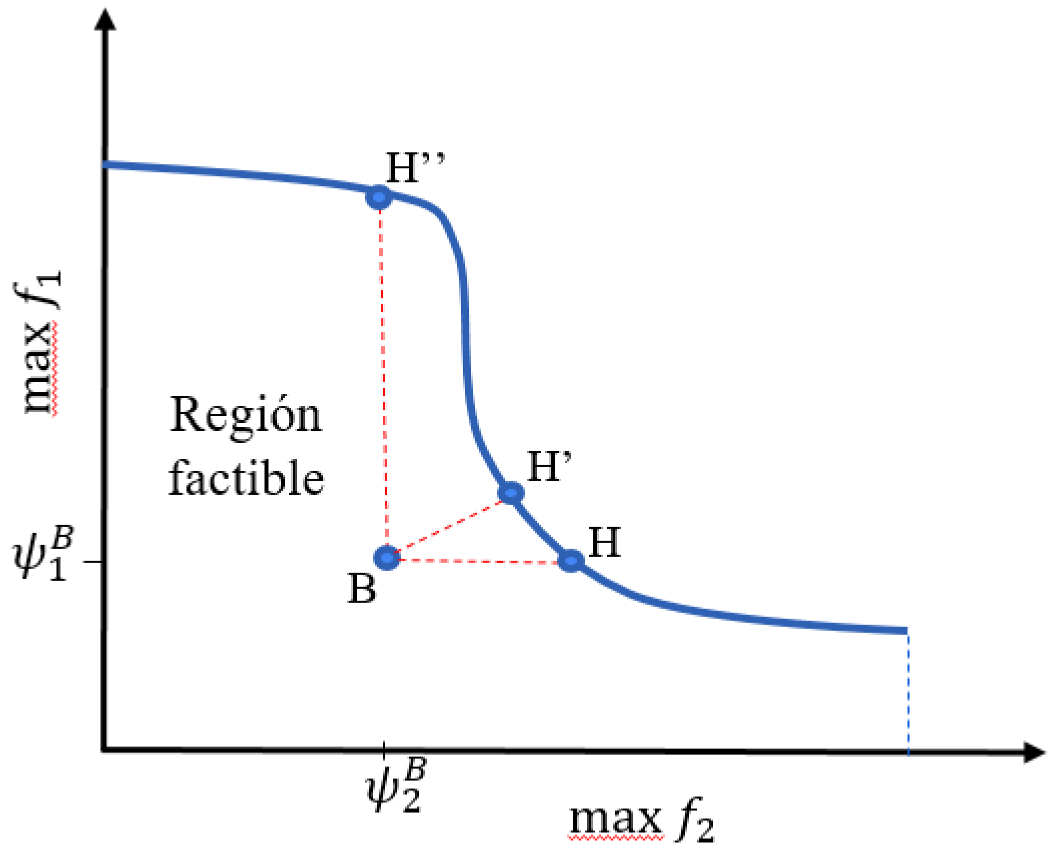
De manera resumida, verifica que la variable s_2 sea menor al $paso$ (recordemos que el $paso = \frac{f_2^* - f_{2*}}{n}$). Si el mayor saltea la próxima ejecución ya que sabe que se va a repetir la misma solución (mecanismo completo puede consultarse en el artículo Mavrotas (2009)).

ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN MO CON PROGRAMACIÓN POR METAS



Solicitamos al AD que sugiera una meta. Debe ser una meta realista (no inalcanzable) pero relativamente exigente (no "demasiado" subóptima).





Por ejemplo: una meta podría ser $f_1 = 20, f_2 = 175$

Además, debe definir los pesos a las desviaciones positivas y negativas en la función objetivo.

$$\vec{w}^+ = [w_1^+; w_2^+]$$

$$\vec{w}^- = [w_1^-; w_2^-]$$

w_1^-: peso (penalización) que le voy a dar a una desviación negativa del objetivo f_1. Es decir, como penalizo a f_1 cuando vale menos que 20.

w_1^+: peso (penalización) que le voy a dar a una desviación positiva del objetivo f_1. Es decir, como penalizo a f_1 cuando vale más que 20.

Recordemos que además debemos normalizar los objetivos y las metas. Normalizaremos con el mejor valor posible (f_1^* y f_2^*).

El modelo a resolver es:

$$min\, w_1^- dev_1^- + w_1^+ dev_1^+ + w_2^- dev_2^- + w_2^+ dev_2^+$$

Sujeto a:

$$\frac{f_1}{f_1^*} + dev_1^- - dev_1^+ = \frac{20}{f_1^*}$$

$$\frac{f_2}{f_2^*} + dev_2^- - dev_2^+ = \frac{175}{f_2^*}$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

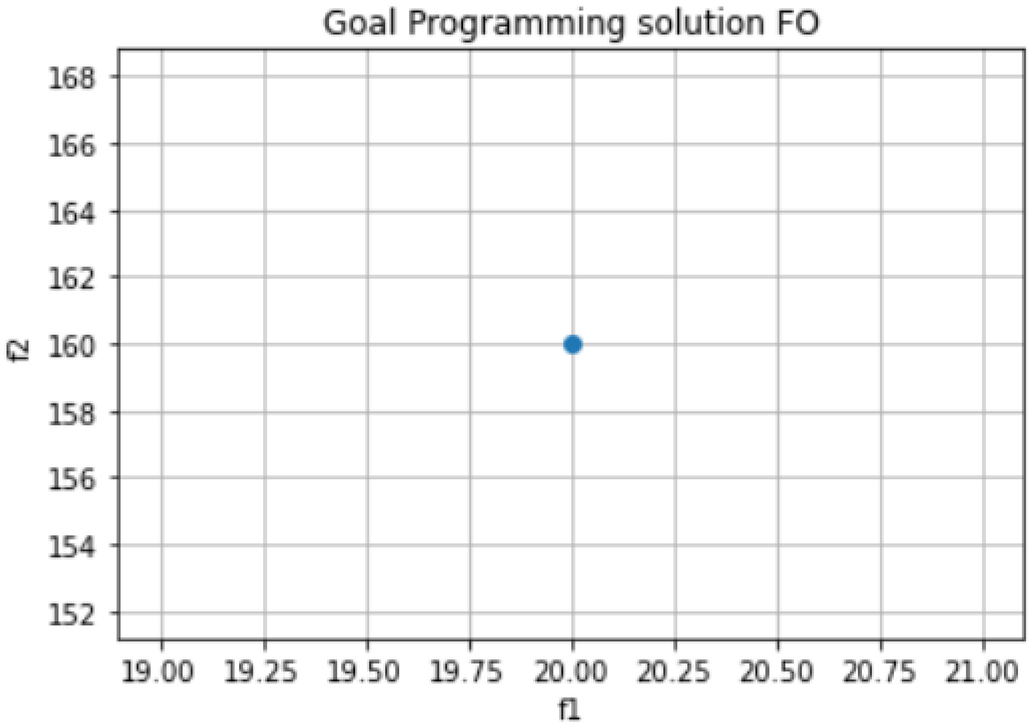
$$x \geq 0$$

$$f \geq 0$$

a) Ejecutamos suponiendo que los pesos asignados son:

$$\vec{w}^+ = [w_1^+; w_2^+] = [0{,}9; 0{,}1]$$

$$\vec{w}^- = [w_1^-; w_2^-] = [0{,}9; 0{,}1]$$

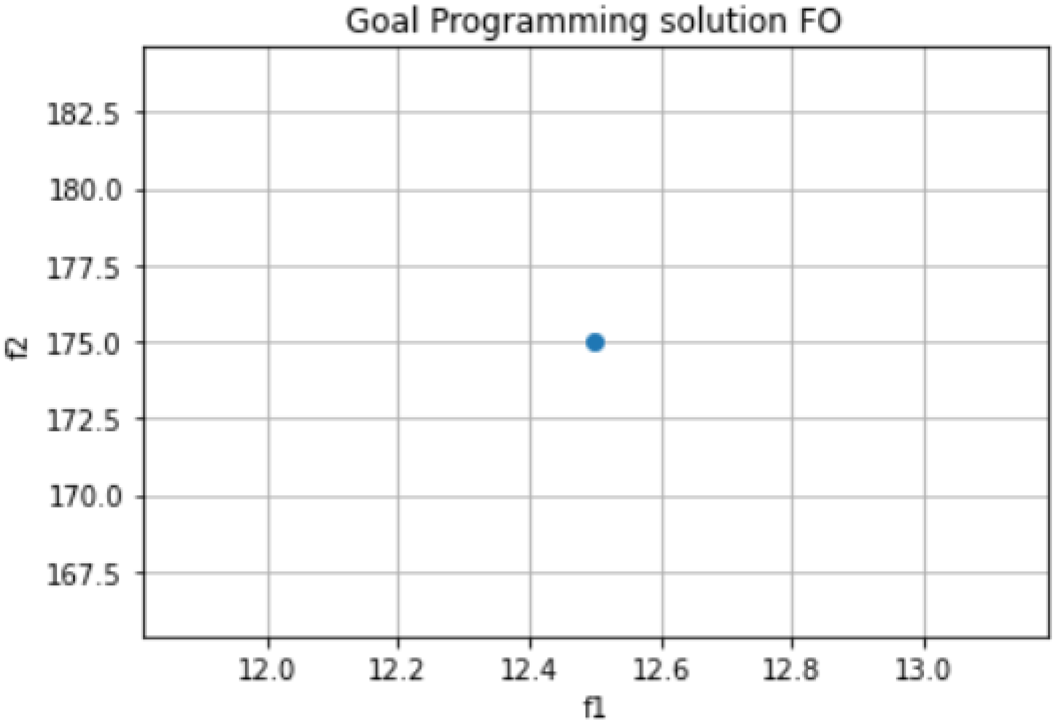


Solución $f_1 = 20$ (se cumple la meta), $f_2 = 160$ (no se cumple en $175 - 160 = 15$).

b)Ejecutamos suponiendo que los pesos asignados son:

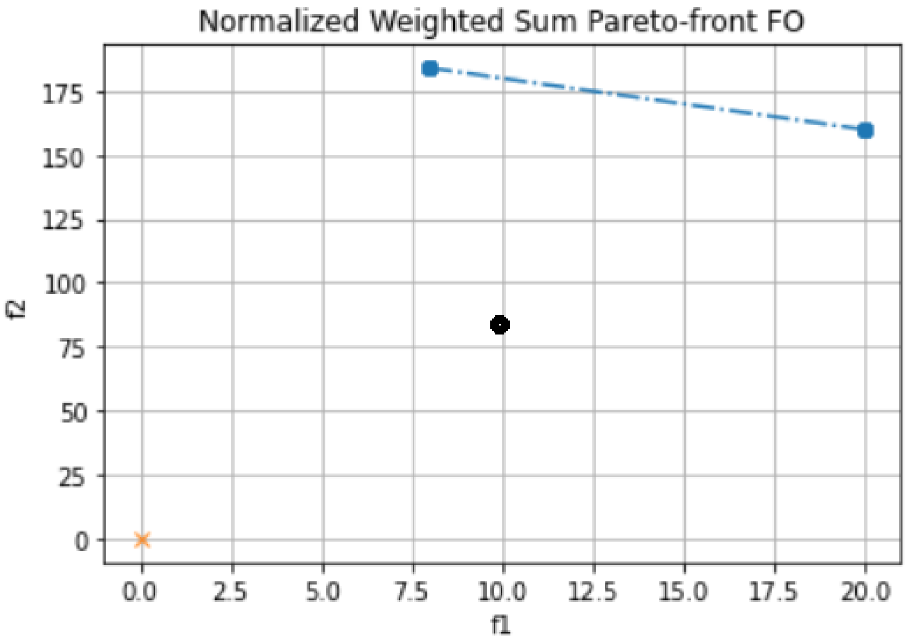
$$\vec{w}^+ = [w_1^+; w_2^+] = [0{,}1; 0{,}9]$$
$$\vec{w}^- = [w_1^-; w_2^-] = [0{,}1; 0{,}9]$$

Solución:



Solución $f_1 = 12{,}5$ (no se cumple en $20 - 12{,}5 = 7{,}5$), $f_2 = 175$ (se cumple la meta).

c) Supongamos que la meta era poco ambiciosa. $f_1 = 10, f_2 = 80$



La solución es de mala calidad en términos de optimalidad de Pareto (muy lejana al frente).