# EJEMPLO DE REPASO

## PROBLEMA MO ORIGINAL (MAVROTAS, 2009)

$$max\ f_1 = x_1$$

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

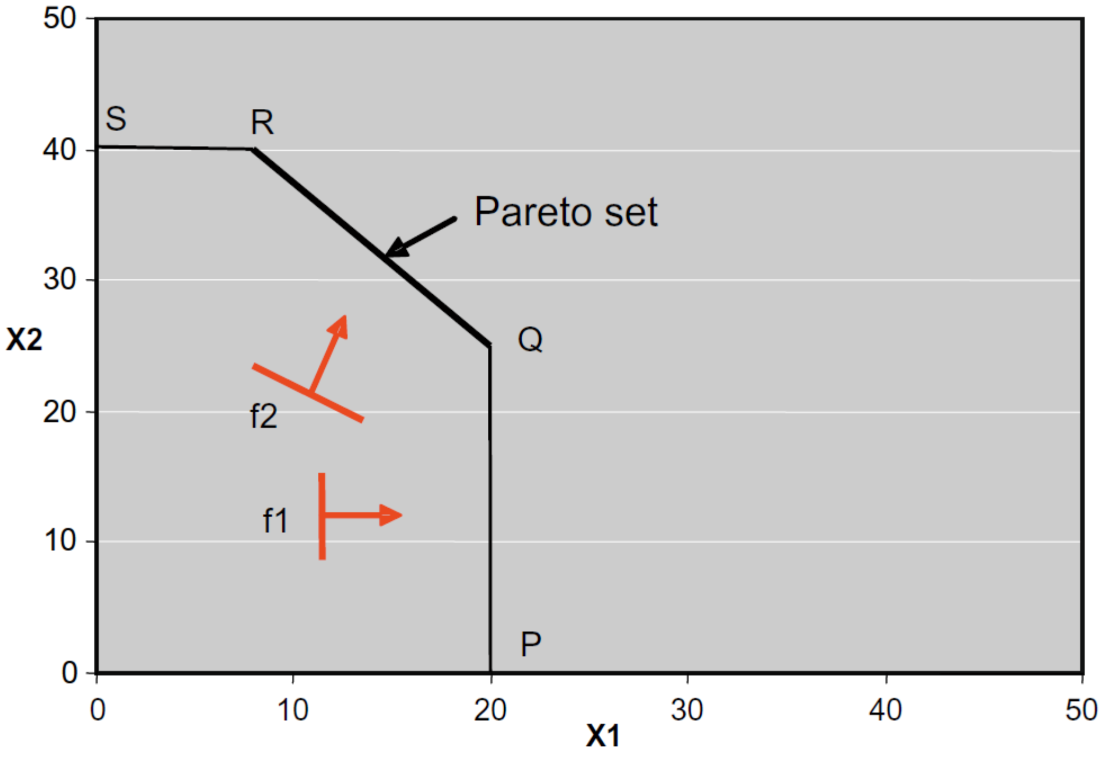



**Fig. 1.** Feasible region and directions of objective functions.

# ENCONTRAR LOS EXTREMOS DEL FRENTE DE PARETO

Resolvemos dos problemas SO

1) Hallamos el primer extremo maximizando $f_1$

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 0$$

$$f_1 = 20, \qquad f_2 = 60$$

2) Hallamos el segundo extremo maximizando $f_2$

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20;$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 40$$

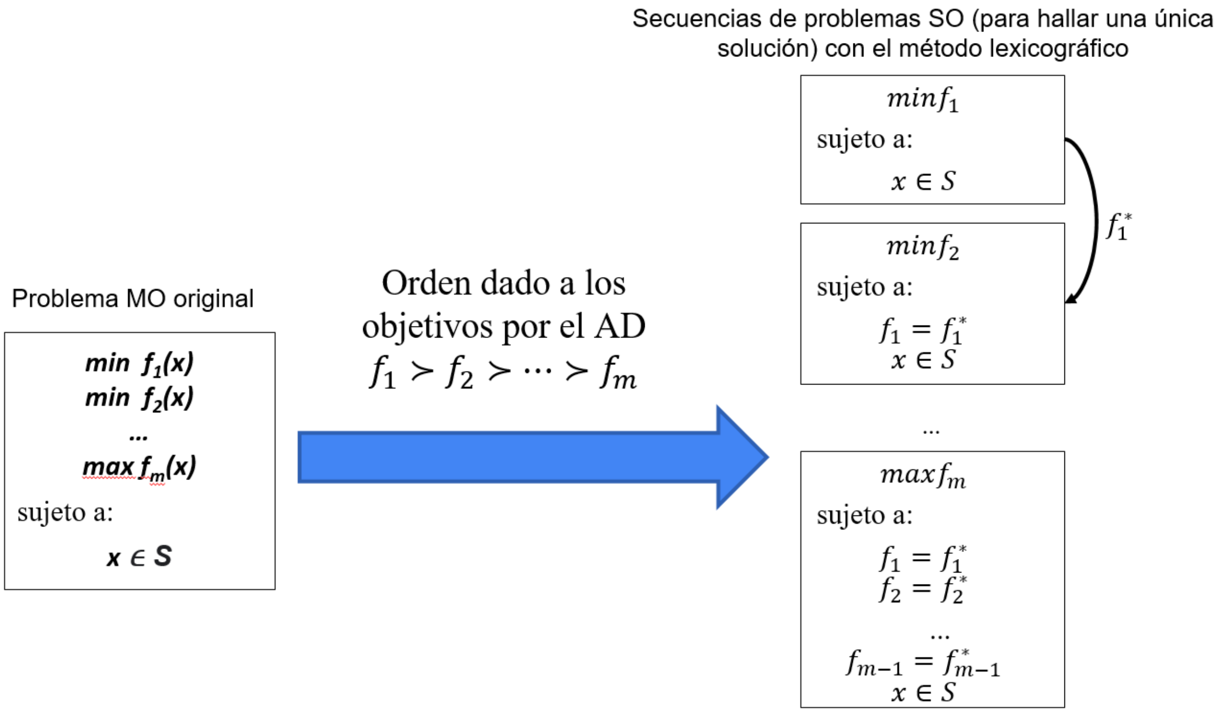
$$f_1 = 8, \qquad f_2 = 184$$

Entonces los extremos dentro del frente de Pareto estimados son:

$$Vector\ ideal = [20, 184]$$

$$Vector\ antideal = [8, 60]$$

# ENCONTRAR LOS EXTREMOS DEL FRENTE DE PARETO CON OPTIMIZACIÓN LEXICOGRÁFICA




Resolvemos cuatro problemas SO:

## 1) Hallamos el primer extremo en dos pasos

### 1.a) maximizar $f_1$

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 0$$

$$f_1 = 20, \qquad f_2 = 60$$

1.b) maximizar $f_2$ sujeto a que $f_1$ no empeore

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$f_1 = 20$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 25$$

$$f_1 = 20, \qquad f_2 = 160$$

2) Hallamos el segundo extremo en dos pasos

2.a) maximizar $f_2$

$$max\ f_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 40$$

$$f_1 = 8, \qquad f_2 = 184$$

2.b) maximizar $\boldsymbol{f_1}$ sujeto a que $\boldsymbol{f_2}$ no empeore

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$f_2 = 184$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 40$$

$$f_1 = 8, \qquad f_2 = 184$$

En este caso, la estimación del punto extremo no varió. ¿Hicimos esta ejecución en vano?

Entonces los extremos dentro del frente de Pareto estimados son:

$$Vector\ ideal = [20, 184]$$

$$Vector\ antideal = [8, 160]$$

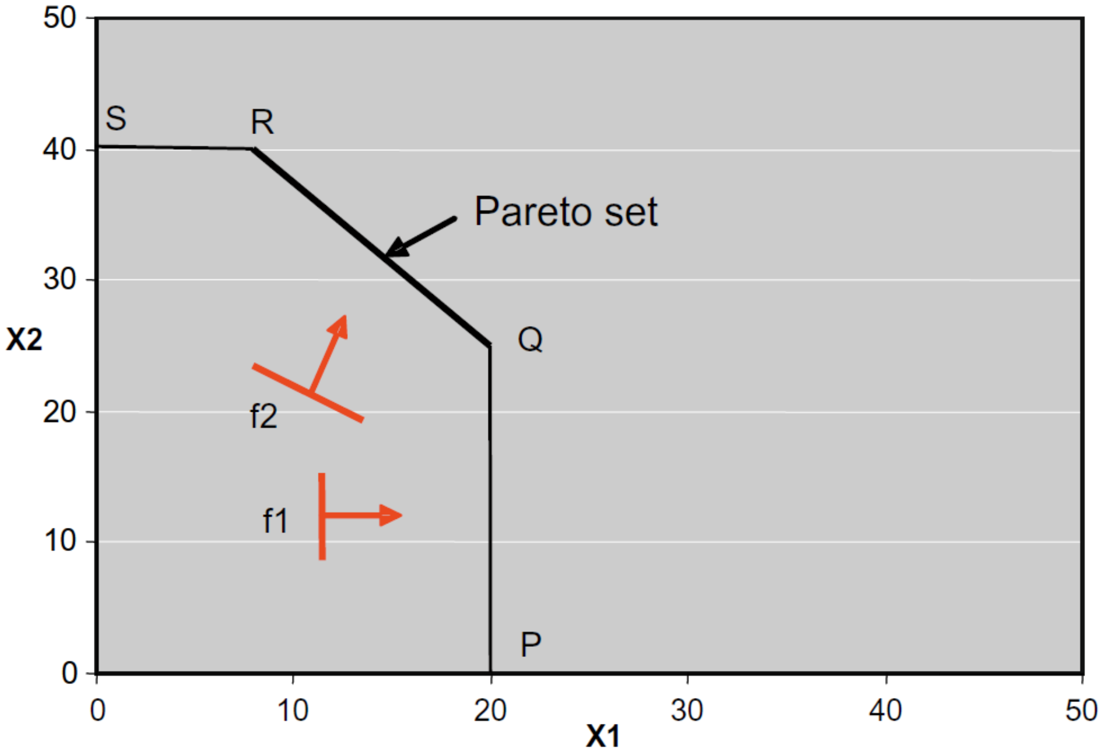



**Fig. 1.** Feasible region and directions of objective functions.

# ENCONTRAR SOLUCIONES MO CON EL MÉTODO DE LA SUMA PONDERADA

Problema MO original

$$\begin{aligned} &\min\ f_1(x) \\ &\min\ f_2(x) \\ &\dots \\ &\max f_m(x) \end{aligned}$$

*Sujeto a:*

$$x \in S$$

Problema SO aplicando el método de las sumas ponderaciones

$$\min w_1 f_{1(x)} + w_2 f_{2(x)} + \dots + w_m(-f_m(x))$$

*Sujeto a*

$$x \in S$$

Plantear un vector de pesos con tantas componentes como objetivos tenga el problema:

$$\vec{w} = [w_1, w_2]$$

Normalizar los objetivos.

Si no poseo los valores ideales y antideales (nadir) debiera calcularlos. Acá los tomamos del paso anterior.

$$d_1 = \frac{f_1^* - f_1}{f_1^* - f_{1*}} = \frac{20 - f_1}{20 - 8}$$

$$d_2 = \frac{f_2^* - f_2}{f_2^* - f_{2*}} = \frac{184 - f_2}{184 - 160}$$

Para que $f_1, f_2$ sean lo más grande posible $d_1, d_2$ tiene que ser lo más chica posible.

Entonces puedo trabajar con un problema de minimización:

$$min\, w_1 d_1 + w_2 d_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + \ 4x_2 \leq \ 200$$

$$x \geq 0$$

O si quiere seguir minimizando invierto los signos de las normalizaciones y uso:

$$d'_1 = \frac{f_1 - f_1^*}{f_1^* - f_{1*}} = \frac{f_1 - 20}{20 - 8}$$

$$d'_2 = \frac{f_2 - f_2^*}{f_2^* - f_{2*}} = \frac{f_2 - 184}{184 - 160}$$

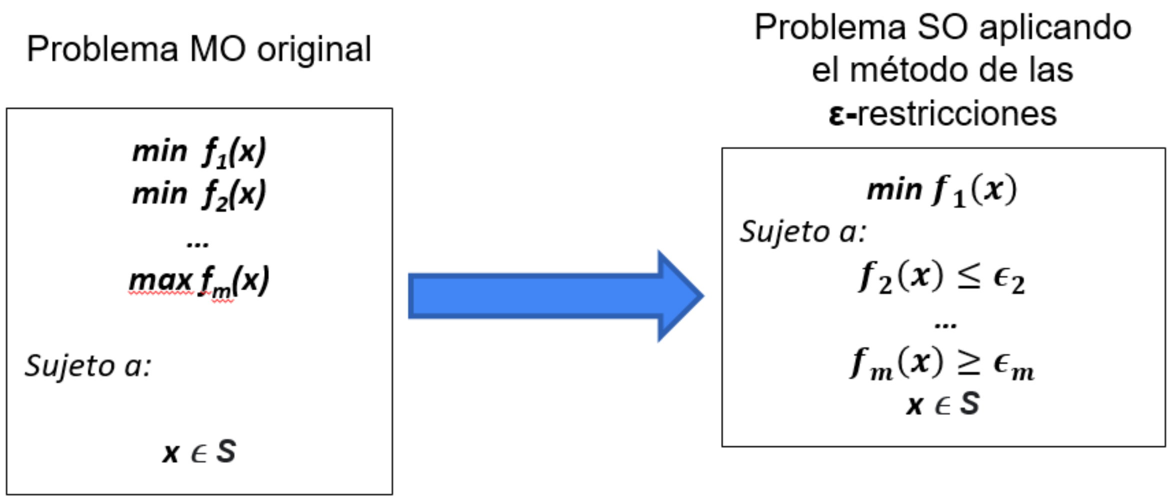
Como método de enfoque de resolución a posteriori defino una serie de vectores $\vec{w}$ y resuelvo para estos vectores. Recordar que en general $w_1 + w_2$=1

En pyomo veremos que con 10 vectores distribuidos uniformemente con un paso de 0.1: se obtiene:

| | |
|---|---|
| $w_1 = 0$ | $x_1 = 8, \quad x_2 = 40$<br>$f_1 = 8, \quad f_2 = 184$ |
| $w_1 = 0.1$ | $x_1 = 8, \quad x_2 = 40$<br>$f_1 = 8, \quad f_2 = 184$ |
| … | |
| $w_1 = 0.4$ | $x_1 = 8, \quad x_2 = 40$<br>$f_1 = 8, \quad f_2 = 184$ |
| $w_1 = 0.5$ | $x_1 = 20, \quad x_2 = 25$<br>$f_1 = 20, \quad f_2 = 160$ |
| $w_1 = 0.6$ | $x_1 = 20, \quad x_2 = 25$<br>$f_1 = 20, \quad f_2 = 160$ |
| … | |
| $w_1 = 1$ | $x_1 = 20, \quad x_2 = 25$<br>$f_1 = 20, \quad f_2 = 160$ |

¿Qué podemos decir de esto?

# ENCONTRAR SOLUCIONES MO CON EL MÉTODO DE LAS EPSILON-RESTRICCIONES




Definir qué objetivo estará en la función objetivo y cual restringido.

Tomar los valores ideales y antideales (nadir) del objetivo restringido y dividirlo por la cantidad de soluciones que quiero buscar menos uno.

Objetivo estará en la función objetivo $f_1$

Objetivo restringido $f_2$

Tomo el rango del objetivo restringido $f_2$ y lo divido en $n = 10$ intervalos (y buscaré $n + 1 = 11$ soluciones).

$$paso = \frac{f_2^* - f_{2*}}{n} = \frac{184 - 160}{10} = 2{,}4$$

Entonces ya puedo plantear los 11 problemas SO donde $\varepsilon^i = f_{2*} + paso * i, \quad i = 0, \dots n$

El primer problema será

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$f_2 \geq \varepsilon^0 \quad \text{ó} \quad f_2 \geq 160 + 2{,}4 * 0 \quad \text{ó} \quad f_2 \geq 160$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

El segundo problema será

$$max\ f_1 = x_1$$

Sujeto a:

$$f_2 \geq \varepsilon^1 \quad \text{ó} \quad f_2 \geq 160 + 2{,}4 * 1$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$x \geq 0$$

Soluciones en pyomo:

```
Epsilon 160.0
Sol vars - it:0 x1= 20.0 x2= 25.0
Sol FO - it:0 f1= 20.0 f2= 160.0
Epsilon 162.4
Sol vars - it:1 x1= 18.8 x2= 26.5
Sol FO - it:1 f1= 18.8 f2= 162.4
Epsilon 164.8
Sol vars - it:2 x1= 17.6 x2= 28.0
Sol FO - it:2 f1= 17.6 f2= 164.8
Epsilon 167.2
Sol vars - it:3 x1= 16.4 x2= 29.5
Sol FO - it:3 f1= 16.4 f2= 167.2
Epsilon 169.6
Sol vars - it:4 x1= 15.2 x2= 31.0
Sol FO - it:4 f1= 15.2 f2= 169.6
Epsilon 172.0
Sol vars - it:5 x1= 14.0 x2= 32.5
Sol FO - it:5 f1= 14.0 f2= 172.0
Epsilon 174.4
Sol vars - it:6 x1= 12.8 x2= 34.0
Sol FO - it:6 f1= 12.8 f2= 174.4
Epsilon 176.8
Sol vars - it:7 x1= 11.6 x2= 35.5
Sol FO - it:7 f1= 11.6 f2= 176.8
Epsilon 179.2
Sol vars - it:8 x1= 10.4 x2= 37.0
Sol FO - it:8 f1= 10.4 f2= 179.2
```

```
Epsilon 181.6
Sol vars - it:9 x1= 9.2 x2= 38.5
Sol FO - it:9 f1= 9.2 f2= 181.6
Epsilon 184.0
Sol vars - it:10 x1= 8.0 x2= 40.0
Sol FO - it:10 f1= 8.0 f2= 184.0
```