Examen - Matemática Discreta I

Viernes 16 de diciembre de 2022.

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

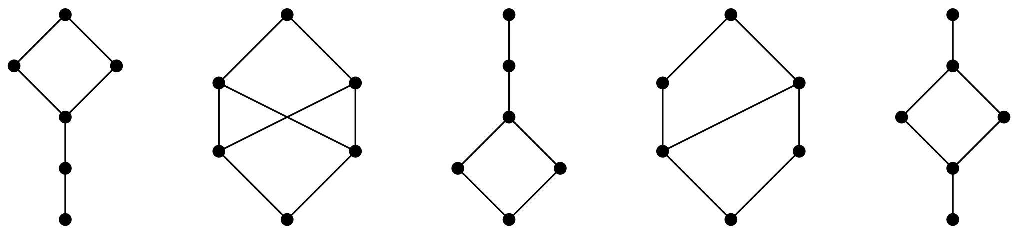
Los dos problemas de desarrollo (correctos y completos) valen 25 puntos cada uno.
Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 10 puntos.
Respuestas incorrectas restan 1 punto.
El examen se aprueba con 60 puntos. La duración del examen es de tres horas y media.

Múltiple Opción 1

Sea G un grafo simple cualquiera, $\overline{G}$ su complemento. Entonces:
A) Si G no es plano, $\overline{G}$ sí lo es; B) Si G no es euleriano, $\overline{G}$ sí lo es;
C) Si G no es hamiltoniano, $\overline{G}$ sí lo es; D) Si G no es conexo, $\overline{G}$ sí lo es.
D) Ninguna de las anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

Sean $A = \{1, 3, 6, 9, 18, 36\}$ y R el orden de divisibilidad (aRb si y solo si b es múltiplo de a). Indicar el diagrama de Hasse asociado a la relación R.



A) B) C) D) E)

Múltiple Opción 3

¿Cuántas relaciones de equivalencia en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ cumplen que $|[6]| = 4$?
A) 20; B) 40; C) 60; D) 80; E) 100.

Múltiple Opción 4

Sabemos que a una reunión asistieron n jóvenes ($n \geq 1$) con edades comprendidas entre 10 y 17 años. ¿Cuál es el menor valor de n que asegura que se pueden conformar dos subgrupos disjuntos (no vacíos) de jóvenes que asistieron a esa reunión de modo que la suma de las edades de cada subgrupo coincide? A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

Múltiple Opción 5

La cantidad de palabras que se pueden formar utilizando todas las letras de la palabra MARIPOSA de modo que no hayan dos letras A consecutivas es:
A) $7!$; B) $2 \times 7!$; C) $3 \times 7!$; D) $4 \times 7!$; E) $5 \times 7!$.

Ejercicio de Desarrollo 1

El objetivo de este ejercicio es demostrar el siguiente enunciado:
"*En una reunión de 6 personas cualesquiera, siempre existen al menos 3 personas que son amigas entre sí o al menos 3 personas que ninguna de ellas son amigas entre sí.*"

Para ello, se asume que la relación de amistad es simétrica (por ejemplo, si Ana es amiga de Camila entonces Camila es amiga de Ana), lo que permite representar la relación de amistad mediante un grafo simple G con 6 vértices. Se pide:

(1) Indicar una condición suficiente que debe cumplir G o $\overline{G}$ (el grafo complemento de G) para probar el enunciado.

(2) Fijado un vértice v cualquiera de G, probar que se cumple exactamente una de las dos condiciones: $gr_G(v) \geq 3$ o $gr_{\overline{G}}(v) \geq 3$, donde $gr_G(v)$ denota el grado del vértice v en el grafo G.

(3) Seleccionar el grafo (G o $\overline{G}$) que cumple que $gr(v) \geq 3$. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices que son adyacentes a v. Discutir según si existe cero arista entre los vértices v_1, v_2 y v_3, o si existe al menos una arista entre esos vértices. Probar en ambos casos la condición suficiente expresada en la parte (1), concluyendo la demostración del enunciado.

Ejercicio de Desarrollo 2

Sea $(a_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ la sucesión tal que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 0$.

Probar que para todo entero natural n se cumple que a_{3n} es par, a_{3n+1} es impar y a_{3n+2} es impar.

Indicar claramente el método de demostración empleado. Justificar detalladamente cada paso del razonamiento utilizado durante la demostración.