SOLUCIÓN VERSIÓN 2
Examen - Matemática Discreta I

Viernes 16 de diciembre de 2022

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
D	E	E	B	C

Múltiple Opción 1

El grafo bipartito completo $G = K_{5,4}$ deja en evidencia que las opciones A, B, y C, son falsas. En lo que sigue probaremos que la opción correcta es la D. De hecho, si G no es conexo, sea G_1 una de sus componentes conexas. Notemos que el grafo complemento $\overline{G}$ tiene al menos a todas las aristas entre los vértices de G_1 y los de $G - G_1$, por lo que tiene como subgrafo a un grafo recubridor que es conexo. Luego $\overline{G}$ es conexo, y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 2

Bajo la relación de divisibilidad en $A = \{1, 3, 6, 9, 18, 36\}$ tenemos que el elemento 1 es mínimo (pues divide a todos los elementos de A). Además 1 divide a 3, que a su vez divide a 6 y a 9 (estos últimos no se dividen entre sí). Tanto 6 como 9 dividen a 18, que a su vez divide a 36. Luego, el quinto diagrama de Hasse captura esta relación de orden parcial, y la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 3

Queremos contar la cantidad de relaciones de equivalencia en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $|[6]| = 4$. Para cada una de las $\binom{6}{3}$ maneras de elegir 3 elementos distintos del elemento 6 dentro de su clase tenemos 5 maneras de armar otras clases de equivalencia con los tres elementos restantes. Por la regla del producto tenemos en total $\binom{6}{3} \times 5 = 100$ posibles relaciones de equivalencia que cumplen lo pedido, y la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 4

Si dos personas tienen la misma edad, el enunciado se cumple. Consideremos la partición $\{\{10, 17\}, \{11, 16\}, \{12, 15\}, \{13, 14\}\}$. Si tenemos 6 personas con edades diferentes entre 10 y 17 años, por el Principio del Palomar tendremos dos clases de la partición completas, y existirán dos subgrupos disjuntos de dos personas cuya suma de edades es igual 27. Ahora veremos que no todos las reuniones con 5 personas cumplen con el enunciado. De hecho, si las edades de las personas son de $\{10, 11, 12, 14, 17\}$ se puede comprobar que no existen dos subgrupos de personas no vacíos y disjuntos cuya suma de edades coincide. Observemos que la suma de edades de dos personas es menor o igual a 31, mientras que la suma de edades de tres personas cualesquiera es mayor o igual a 33. Entonces, cualquier suma de edades de 3 personas es distinta que la suma de edades de 2 personas. Por último, todas las sumas de edades de dos personas son distintas, pues $10+11 = 21, 10+12 = 22, 10+14 = 24, 10+17 = 27, 11+12 = 23, 11+14 = 25, 11+17 = 28, 12+14 = 26, 12+17 = 29$, y $14+17 = 31$. Luego tenemos que $n = 6$ es la mínima cantidad de personas que cumplen con el enunciado de la letra, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 5

La palabra MARIPOSA tiene ocho letras y solamente la letra A aparece dos veces. Entonces, hay $8!/2!$ palabras que se pueden formar utilizando todas las letras de esa palabra, y $7!$ de ellas tienen el patrón AA (que se cuentan como permutaciones de 7 símbolos diferentes, siendo AA un único símbolo). Entonces, hay $8!/2! - 7! = 3 \times 7!$ palabras que no tienen las letras A consecutivas, y la respuesta correcta es la C.

Ejercicio de Desarrollo 1

Probemos el siguiente enunciado:
"*En una reunión de 6 personas cualesquiera, siempre existen al menos 3 personas que son amigas entre sí o al menos 3 personas que ninguna de ellas son amigas entre sí.*"

Representemos a la relación de amistad mediante un grafo simple G con 6 vértices.

(1) Notemos que si G tiene un triángulo entonces hay al menos 3 personas que son amigas entre sí, mientras que si $\overline{G}$ tiene un triángulo entonces hay al menos 3 personas que no son amigas entre sí. Entonces es suficiente probar que alguno de los dos grafos G o $\overline{G}$ tiene un triángulo.

(2) Sea v un vértice cualquiera de G. Por definición de grafo complemento, tenemos que cualquier otro vértice w distinto de v es o bien adyacente a v en G o bien adyacente a v en el complemento $\overline{G}$. Entonces tenemos que $gr_G(v) + gr_{\overline{G}}(v) = 5$, puesto que 5 es la cantidad de vértices de G distintos de v. Supongamos por absurdo que $gr_G(v) \leq 2$ y que $gr_{\overline{G}}(v) \leq 2$. Pero entonces tendríamos que $gr_G(v) + gr_{\overline{G}}(v) \leq 2 + 2 = 4$, contradiciendo el hecho que $gr_G(v) + gr_{\overline{G}}(v) = 5$. Entonces debemos tener que $gr_G(v) \geq 3$ o $gr_{\overline{G}}(v) \geq 3$.

(3) Seleccionemos el grafo (G o $\overline{G}$) que cumple que $gr(v) \geq 3$. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices que son adyacentes a v. Si hay cero arista entre los vértices v_1, v_2 y v_3, entonces v_1, v_2 y v_3 forman un triángulo en el complemento del grafo. Si hay al menos una arista entre v_1, v_2 y v_3, sea v_iv_j tal arista. Notemos que en el grafo tenemos en este caso el triángulo formado por las aristas vv_i, v_iv_j y v_jv. Entonces en el grafo G o en su complemento $\overline{G}$ siempre hay un triángulo. Luego, la condición suficiente expresada en la parte (1) se cumple, concluyendo la demostración del enunciado.

Ejercicio de Desarrollo 2

Sea $(a_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ la sucesión tal que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 0$.

Sea $P(n)$ la proposición: *a_{3n} es par, a_{3n+1} es impar, y a_{3n+2} es impar.* Vamos a probar mediante el Principio de Inducción simple que $P(n)$ es cierta para todo entero natural n.

Probar el paso base es precisamente probar $P(0)$. Esto es probar que a_0 es par, a_1 es impar, y a_2 es impar. Por los datos de la letra tenemos que $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, por lo que a_0 es par y a_1 es impar. Además sabemos que $a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$, por lo que a_2 es impar, concluyendo la prueba del paso base.

Para probar el paso inductivo vamos a asumir que $P(k)$ es cierta para algún entero natural k, y probaremos $P(k + 1)$. Asumimos entonces que a_{3k} es par, a_{3k+1} es impar, y a_{3k+2} es impar. Queremos probar que a_{3k+3} es par, a_{3k+4} es impar, y a_{3k+5} es impar.

Como a_{3k+1} y a_{3k+2} son impares entonces la suma $a_{3k+2} + a_{3k+1}$ es par, y $a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{3k+1}$ es par. Nuevamente por hipótesis inductiva tenemos que a_{3k+2} es impar, por lo que $a_{3k+4} = a_{3k+3} + a_{3k+2}$ es impar, por ser suma de un número par y otro impar. Finalmente, tenemos que $a_{3k+5} = a_{3k+4} + a_{3k+3}$ es impar, por ser suma de un número impar y un número par. Concluimos entonces que a_{3k+3} es par, a_{3k+4} es impar y a_{3k+5} es impar. Esto significa que $P(k + 1)$ es cierta. Hemos probado el paso inductivo.

Por el Principio de Inducción Completa, podemos concluir que $P(n)$ es cierta para todo entero natural n, como queríamos demostrar.