Conceptos y herramientas para la resolución de problemas de optimización multiobjetivo

Introducción

Sergio Nesmachnow, Diego Rossit

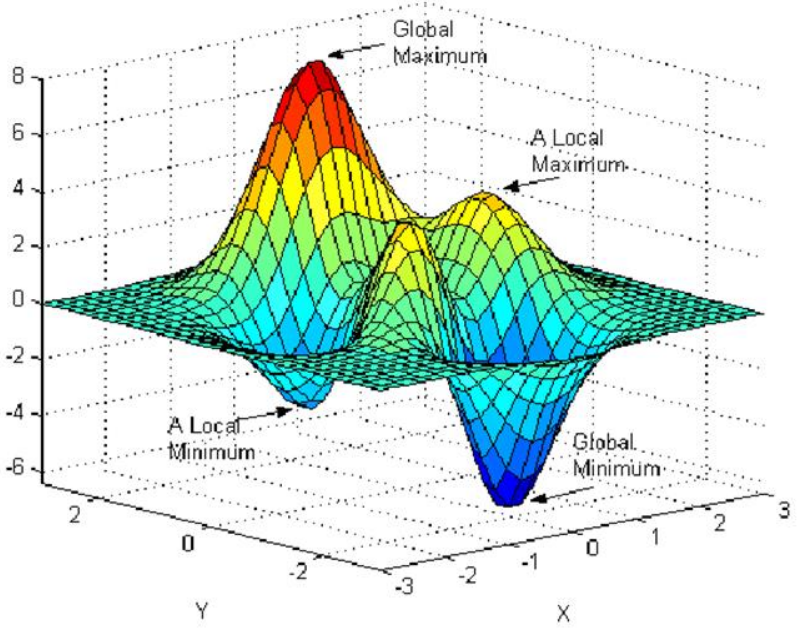
Universidad de la República, Uruguay
Universidad Nacional del Sur-CONICET, Argentina

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Introducción: agenda

- Problemas de optimización
- Optimización multiobjetivo
- Enfoques de resolución

Problemas de optimización



Optimización numérica

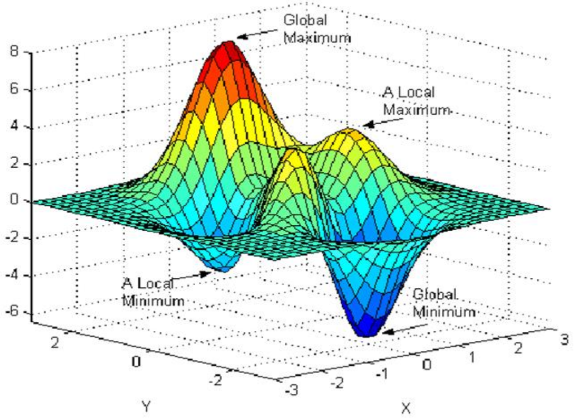
$$\min_{\vec{x}} \ / \max_{\vec{x}} \ f(\vec{x})$$

sujeto a

$$g_i(\vec{x}) > 0$$
$$h_j(\vec{x}) = 0$$

- $\vec{x}$ son las variables de decisión del problema,
- $g_i(\vec{x})$ y $h_j(\vec{x})$ son las restricciones (de desigualdad y de igualdad, respectivamente)
- $f(\vec{x})$ es la función a optimizar

Problemas de optimización



Muchos problemas de optimización pertenecen a la clase de problemas NP-difíciles

- Problemas de la clase P: resolubles en tiempo polinomial utilizando un modelo de computación determinístico
- Problemas de la clase NP: resolubles en tiempo polinomial utilizando un modelo de computación no determinístico

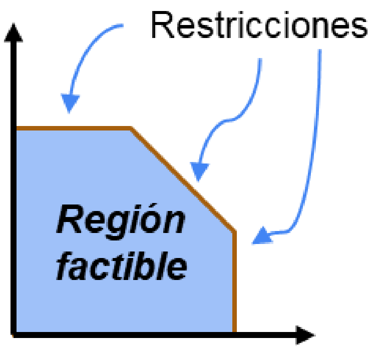
Los problemas NP-difíciles son aquellos para los cuales es sencillo verificar si una solución es óptima, pero no es sencillo hallar el óptimo

- La complejidad algorítmica se incrementa de manera superpolinomial con el tamaño de la entrada

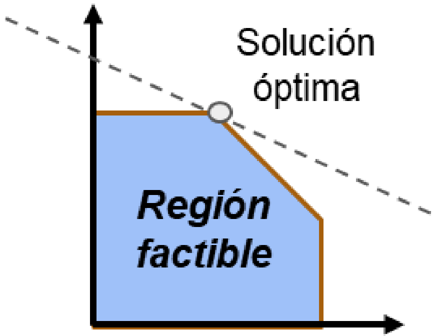
Problemas de optimización

En un problema de optimización se tiene:

- Un conjunto de soluciones posibles basadas en disponibilidad de recursos (en un sentido amplio). Determina la región factible del problema.



- Un criterio o conjunto de criterios para elegir la mejor solución entre las posibles.



Espacio de decisiones y espacio de búsqueda

En el espacio de decisiones se representan las variables del problema

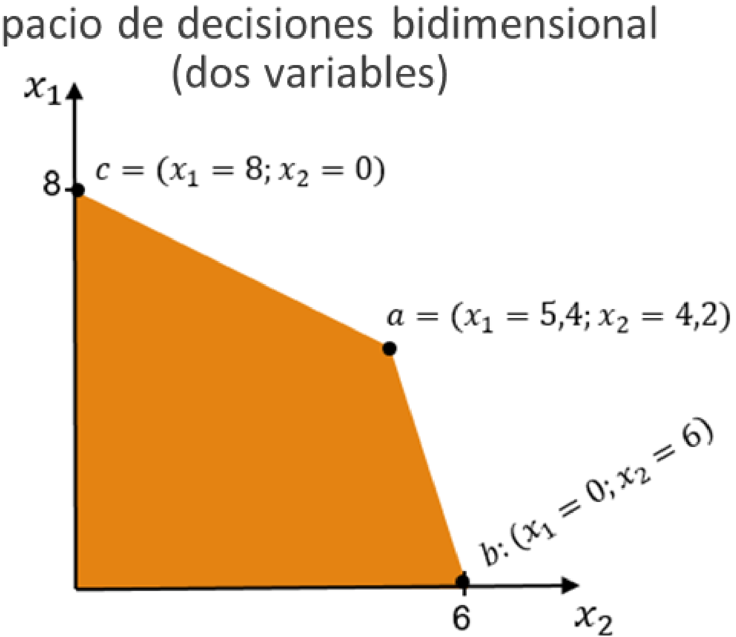
En el espacio de búsqueda se representan los objetivos del problema

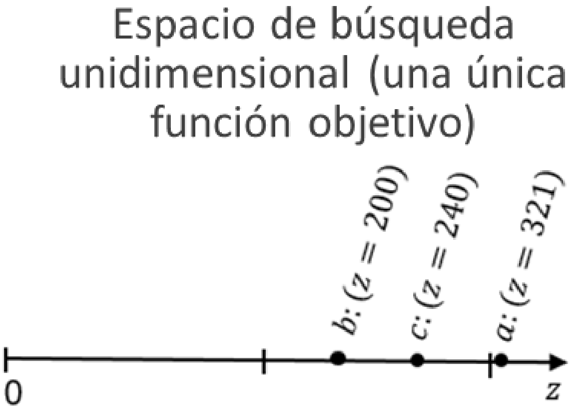
$$\max z = 25x_1 + 40x_2$$

sujeto a:

$$60x_1 + 20x_2 \leq 360$$
$$20x_1 + 40x_2 \leq 300$$

$$x \geq 0$$

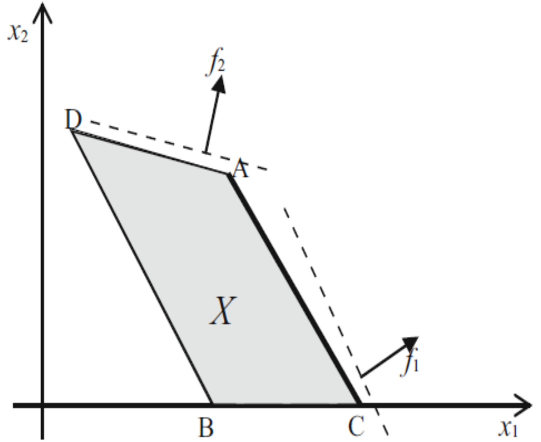


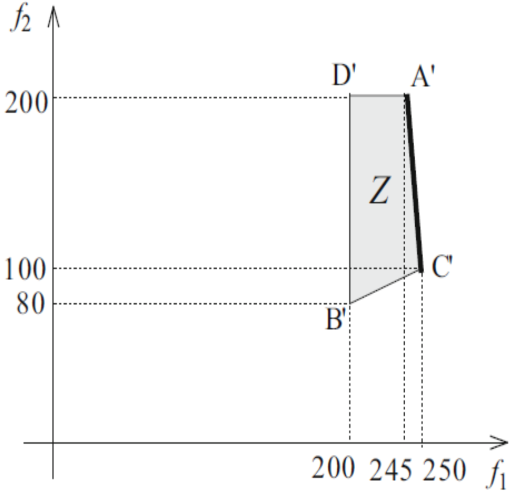


Espacio de decisiones y espacio de búsqueda

Al optimizar una única función objetivo, la región factible en el espacio de decisiones $x \epsilon X$ se asigna a un espacio unidimensional en $\mathbb{R}$.

En el caso multiobjetivo, el espacio de decisiones se asigna a un espacio multidimensional de objetivos $Z = \{z = f(x) \in \mathbb{R}^M : x \in X\}$; siendo M el número de dimensiones (funciones objetivo).





Problema de optimización multiobjetivo

Los problemas de búsqueda y optimización del mundo real se plantean naturalmente como problemas que tienen múltiples objetivos en conflicto: calidad de servicio y costo; prestaciones y distancia; etc.

No existe una solución única que optimice simultáneamente todos los objetivos considerados en el problema.

Las múltiples soluciones óptimas establecen diferentes niveles de compromiso (trade-off) entre los objetivos considerados.

Debe aplicarse algún criterio o proceso para seleccionar soluciones para implementar en la práctica (proceso de toma de decisiones)

Un ejemplo: comprar un automóvil

Opciones:

- automóvil1, con un costo 10.000 USD y prestaciones muy básicas (solución 1)
- automóvil2, con un costo de 100.000 USD y prestaciones de lujo (solución 2).

Si el costo es el único objetivo, el óptimo es la solución 1. En la calle habría todos autos baratos ...

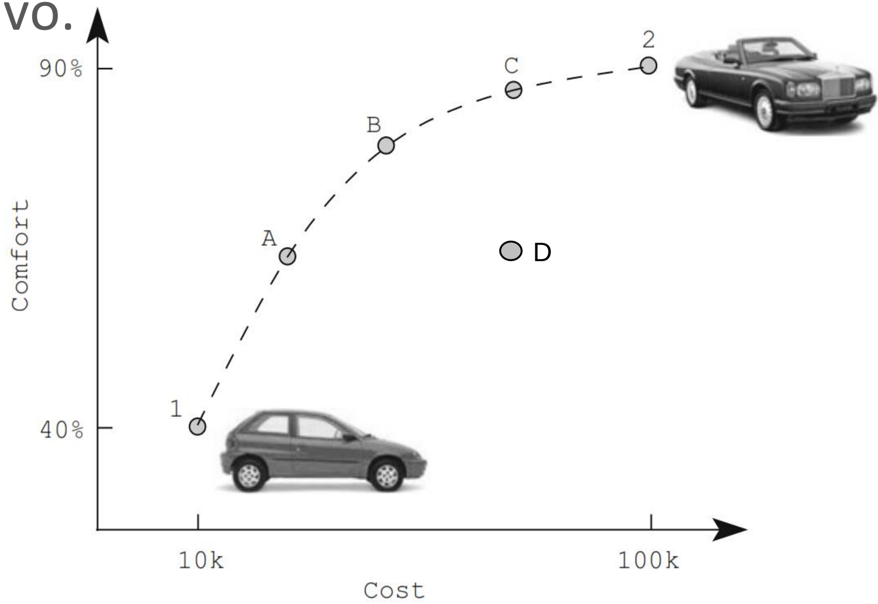
Si el confort es el único objetivo, el óptimo es la solución 2. En la calle habría todos autos caros...

Un ejemplo: comprar un automóvil

También existen opciones (soluciones) intermedias (A, B y C) con diferentes valores de costo y confort.

Entre dos soluciones, una es mejor en términos de un objetivo, pero es peor en el valor del otro objetivo.

A nadie le interesaría la solución D, pudiendo optar por la solución A (mismo confort a menor costo) o por la solución C (mejor confort al mismo costo).



Problemas de optimización multiobjetivo

$$\min_{\vec{x}} \ / \max_{\vec{x}} \ \vec{F}(\vec{x})$$

sujeto a

$$g_i(\vec{x}) > 0$$

$$h_j(\vec{x}) = 0$$

- $\vec{x}$ son las variables de decisión del problema,
- $g_i(\vec{x})$ y $h_j(\vec{x})$ son las restricciones (de desigualdad y de igualdad, respectivamente)
- $\vec{F}(\vec{x})$=$[f_1(\vec{x}), \ldots, f_M(\vec{x})]$ es la función a optimizar (vectorial) que involucra M objetivos

Problema de optimización multiobjetivo

- Determinar un vector de variables de decisión que satisfagan un cierto conjunto de restricciones y optimice un conjunto de funciones objetivo.
- Las funciones constituyen una descripción matemática de los criterios de desempeño, que suelen estar en conflicto unos con otros y que en general se miden en unidades diferentes.
- El proceso de optimizar tiene un significado diferente al del caso de problemas mono-objetivo.
- Las soluciones establecen diferentes niveles de compromiso (trade-off) entre los objetivos considerados.

Problema de optimización multiobjetivo

- Se distinguen tres tipos de situaciones que pueden presentarse en un problema multiobjetivo:
  - Minimizar todas las funciones objetivo.
  - Maximizar todas las funciones objetivo.
  - Minimizar algunas funciones y maximizar otras
- Por simplicidad, todas las funciones se convierten a un problema de maximización o a uno de minimización.
  - Por ejemplo, para convertir todas las funciones a maximizar para que correspondan a un problema de minimización

$$\max f_i(x) = \min(-f_i(x))$$

Problema de optimización multiobjetivo

- Las principales características de un MOP son:
  - trabajan sobre un espacio multidimensional de funciones.
  - no existe una única solución al problema.
  - es necesario un proceso de toma de decisiones en cual se decide qué tipo de compromisos son más convenientes desde la perspectiva del tomador de decisiones. Este proceso puede realizarse a priori o a posteriori.

Problema de optimización multiobjetivo

- La noción de óptimo se modifica, ya que no es posible encontrar una solución única que sea óptima para todas las funciones a optimizar.
- Una solución es un óptimo de Pareto si no existe ningún vector factible que decremente algún criterio sin causar un incremento simultáneo en al menos otro criterio.

$$\forall x \in \Omega \ \rightarrow \forall i \in \ 1,\ldots,\mathrm{M},\ f_i(x) = f_j(x^*) \text{ y}$$
$$f_i(x) > f_j(x^*) \text{ para al menos un índice i}$$

Problema de optimización multiobjetivo

- Los vectores correspondientes a las soluciones no incluidas en el conjunto de óptimos de Pareto son llamados soluciones no dominadas.
- La dominancia de Pareto es una relación de orden parcial entre las soluciones factibles ($v, w \in \Omega$).

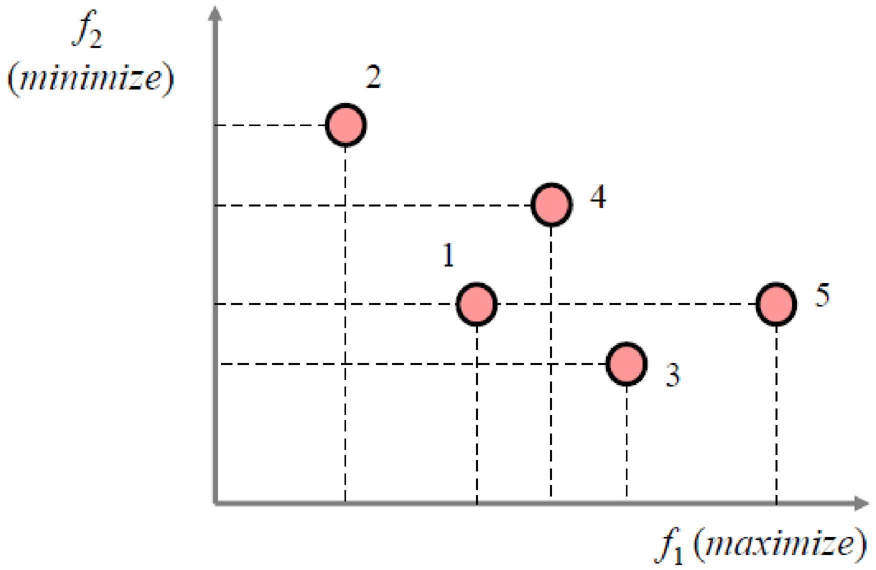
$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \text{ domina a } v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ si}:$$

$$w_i \leq v_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n \wedge \exists \text{ j} / \ w_j < v_j, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Concepto de dominancia

- En un problema de optimización monoobjetivo, la superioridad de una solución sobre otra se determina fácilmente comparando los valores de función objetivo.
- En un problema de optimización multiobjetivo, la calidad de una solución está determinada por la dominancia.
- Una solución x1 domina a otra solución x2 si ambas condiciones 1 y 2 son verdaderas:
  - La solución x1 no es peor que x2 en todos los objetivos.
  - La solución x1 es estrictamente mejor que x2 en al menos uno de los objetivos.

Concepto de dominancia



1 domina a 2 (mejor valor de f_1 y de f_2).
5 domina a 1 (mejor valor de f_1 e igual valor de f_2) .
1 vs 4: ninguna solución domina a la otra (1 tiene major valor de f_2 y 4 tiene mejor valor de f_1), son soluciones no dominadas entre sí

La dominancia es una relación transitiva: si x1 domina a x2 y x2 domina a x3, entonces x1 domina a x3.

Problema de optimización multiobjetivo

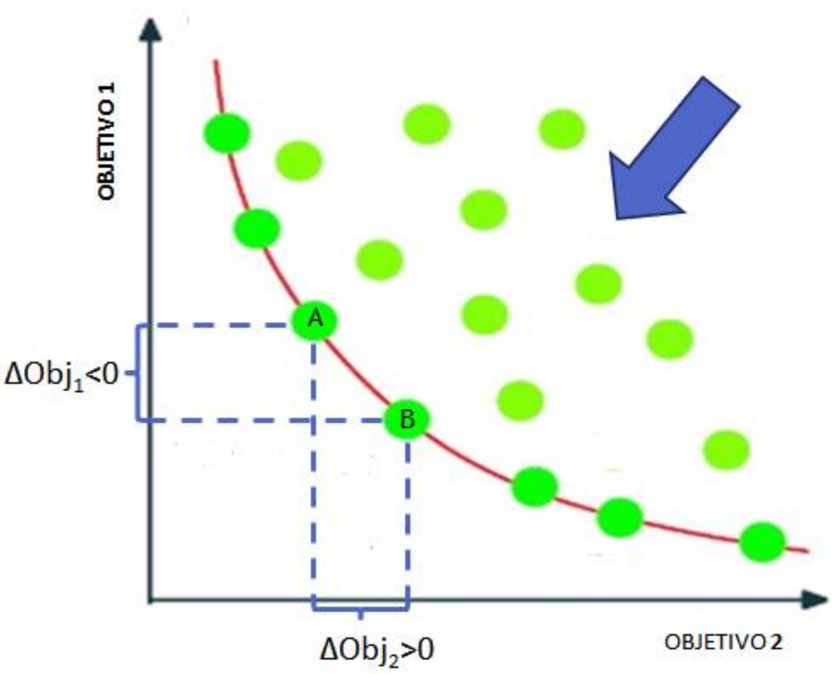
- Las soluciones del MOP están dadas por el conjunto de soluciones factibles no dominadas al que se denomina conjunto de óptimos de Pareto.
- Al conjunto de valores funcionales de los óptimos de Pareto se le denomina frente de Pareto (FP).

$$P^{*} = \{x \in \Omega \mid \neg \exists x' \in \Omega : f(x') \text{ domina a } f(x)\}$$

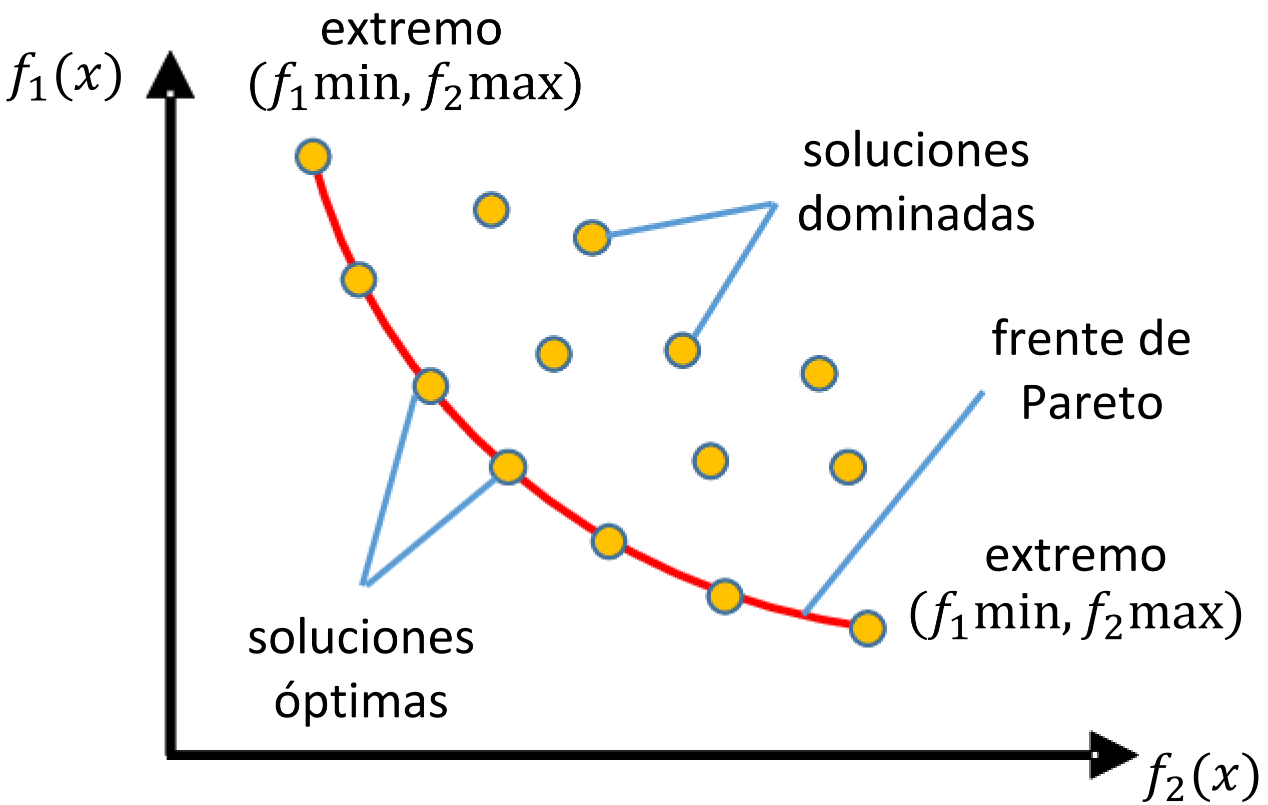
$$FP = \{u = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \mid x \in P^{*}\}$$

Optimalidad de Pareto

- El conjunto no dominado de toda la región factible de un problema es el frente de Pareto.
- Una solución es óptimo de Pareto si no existe otra solución que proporcione una mejora en una función objetivo sin producir un empeoramiento en otra función objetivo.

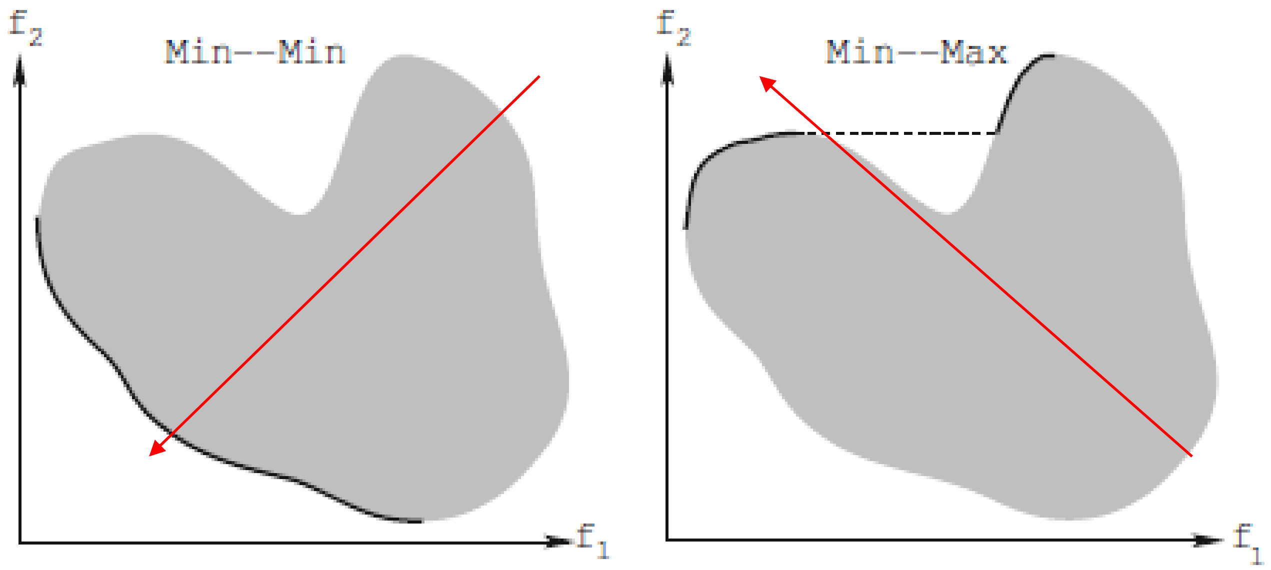


Frente de Pareto: ejemplo 2D



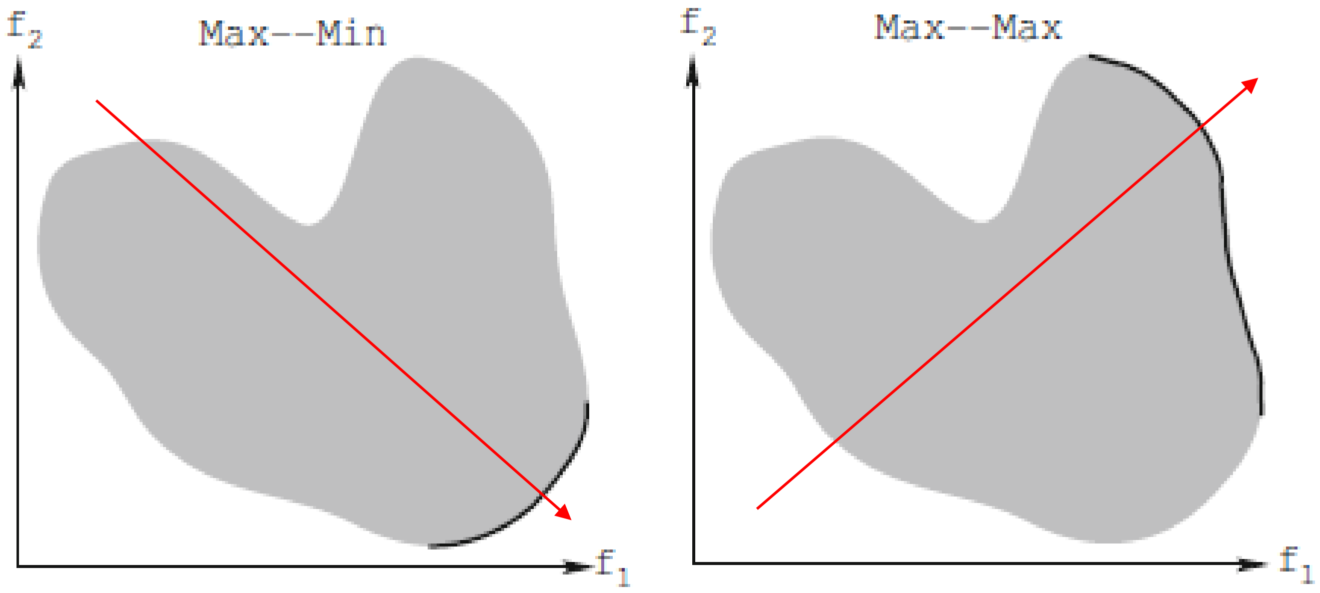
Ejemplos de frentes de Pareto

- El frente de Pareto puede ser continuo o discontinuo



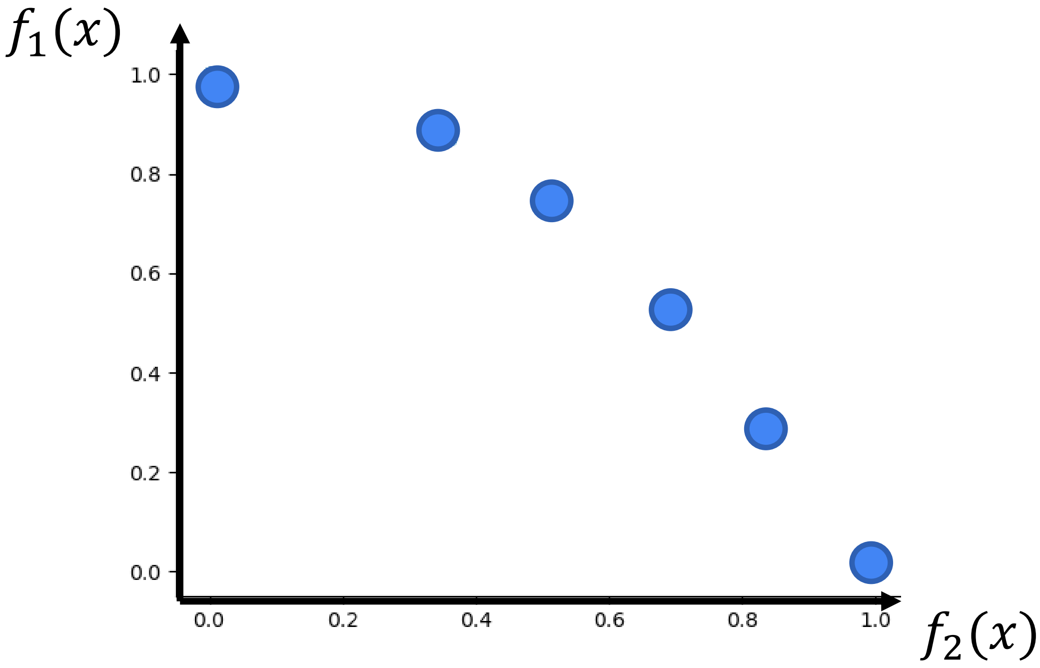
Ejemplos de frentes de Pareto

- El frente de Pareto puede ser continuo o discontinuo



Ejemplos de frentes de Pareto

- El frente de Pareto puede ser discreto



Ejemplos de frentes de Pareto

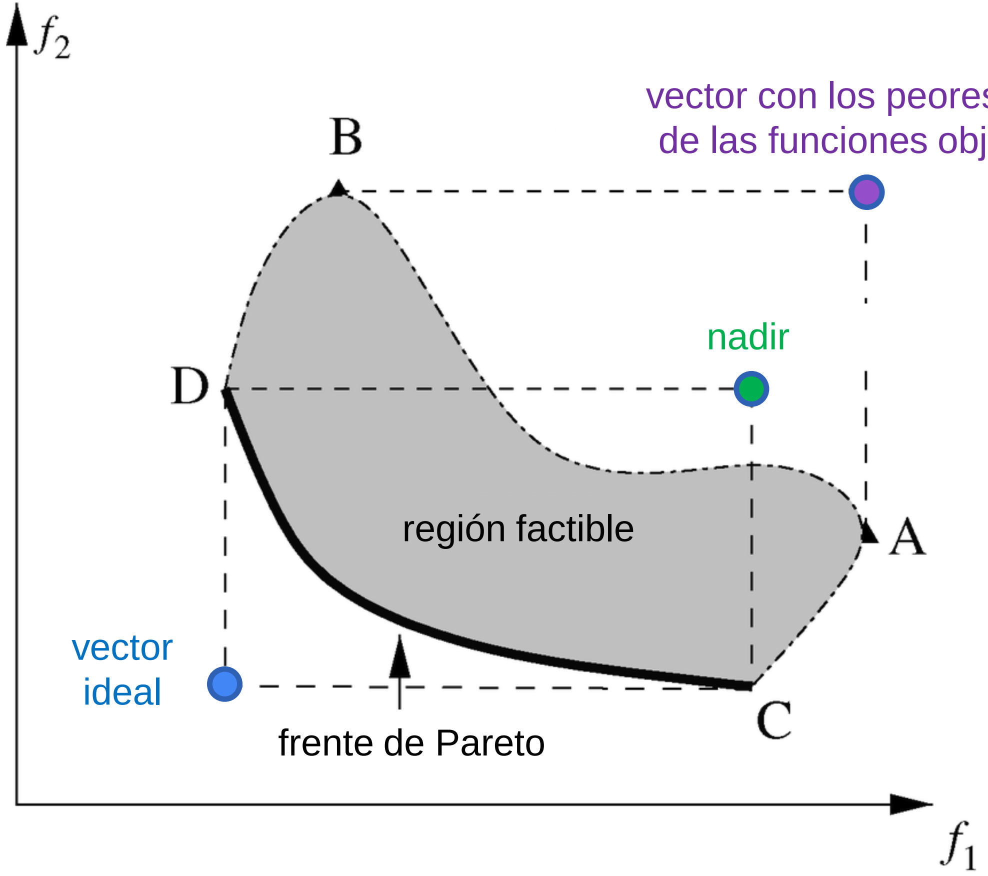
- En general, no es fácil encontrar una expresión analítica del frente de Pareto (línea o superficie que representa los valores de los vectores no dominados en el espacio de las funciones objetivo)
- En la mayor parte de los casos, incluyendo para los problemas del mundo real, resulta simplemente imposible obtener una expresión analítica del frente de Pareto real.

Soluciones especiales: vector ideal

- Para cada uno de los M objetivos en conflicto, existe una solución óptima diferente. Un vector z* construido con estos los valores óptimos individuales es el vector objetivo ideal.
- Cada componente del vector ideal es una cota (inferior/superior) para los valores funcionales de las soluciones.
- Para el m-ésimo problema el óptimo está dado por el problema de optimización monoobjetivo:

$$\min / \max f_m(x)$$
$$\text{sujeto a } x \in S$$

Soluciones especiales: ideal, nadir (anti-ideal)



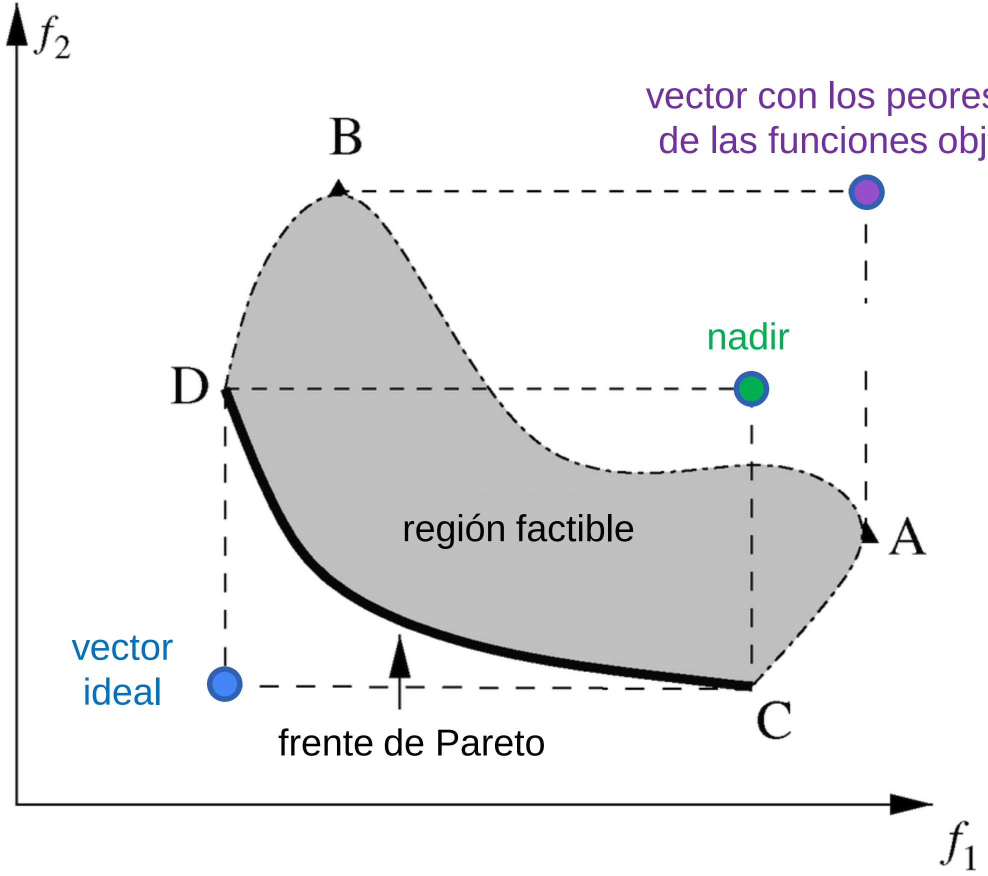
Soluciones especiales: vector ideal

- Suponiendo que el óptimo para el m-ésimo objetivo es f_m^*, el vector ideal se obtiene al resolver todos los problemas de objetivo único y es $z^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*)$.
- El vector ideal no es parte de la región factible. Sólo es parte de la región factible cuando el frente de Pareto está compuesto por un sólo punto (no corresponde a un problema multiobjetivo explícito, cuenta con una única solución).

Soluciones especiales: vector nadir (anti-ideal)

- El vector nadir se construye tomando los peores valores objetivo del frente de Pareto.
- En conjunto con el vector ideal, el punto nadir permite determiner el rango de valores de las funciones objetivos entre los que se encuentra el frente de Pareto.
- Si el vector nadir puede calcularse eficientemente, puede utilizarse para normalizer los valores de las funciones objetivo, para evitar sesgos en la búsqueda

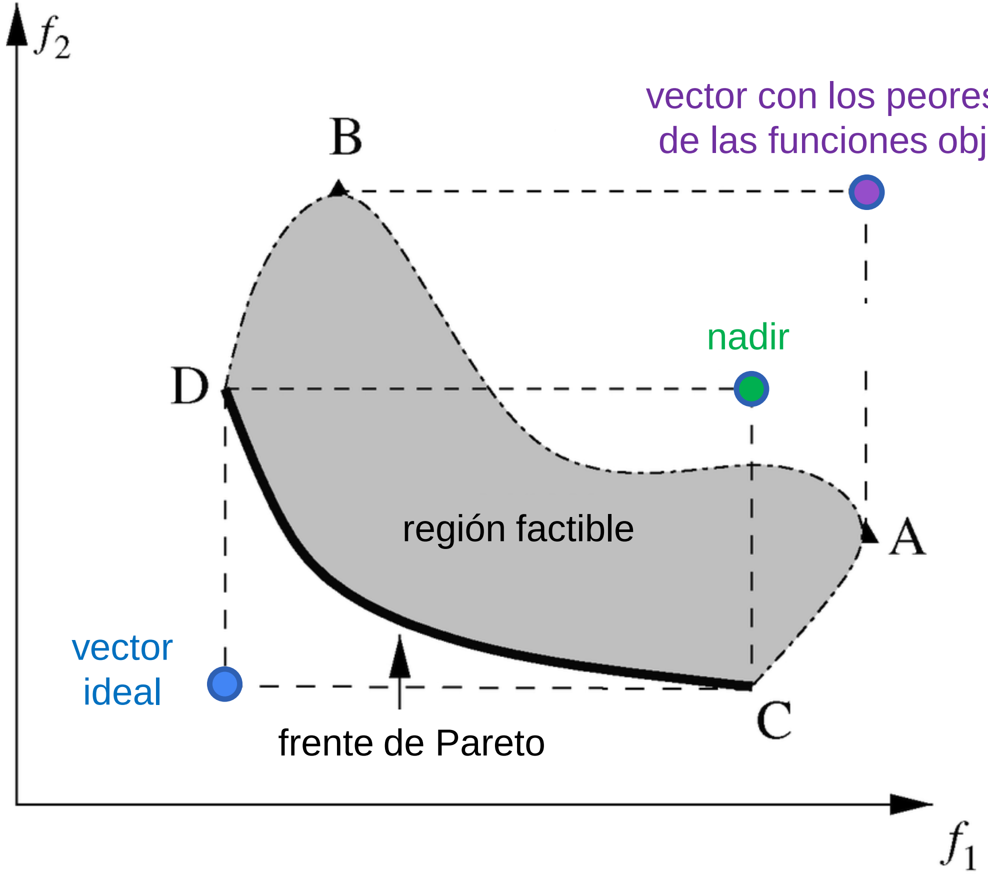
Soluciones especiales: ideal, nadir (anti-ideal)



Soluciones especiales: vector con los peores valores objetivo

- El vector con los peores valores objetivos está compuesto por los peores valores de las funciones objetivo para los puntos en la región factible.
- En general no es parte de la región factible.
- Acota los posibles valores de la función objetivo para todos los puntos de la región factible.
- No debe confundirse con el vector nadir (anti-ideal)

Soluciones especiales: ideal, nadir (anti-ideal)

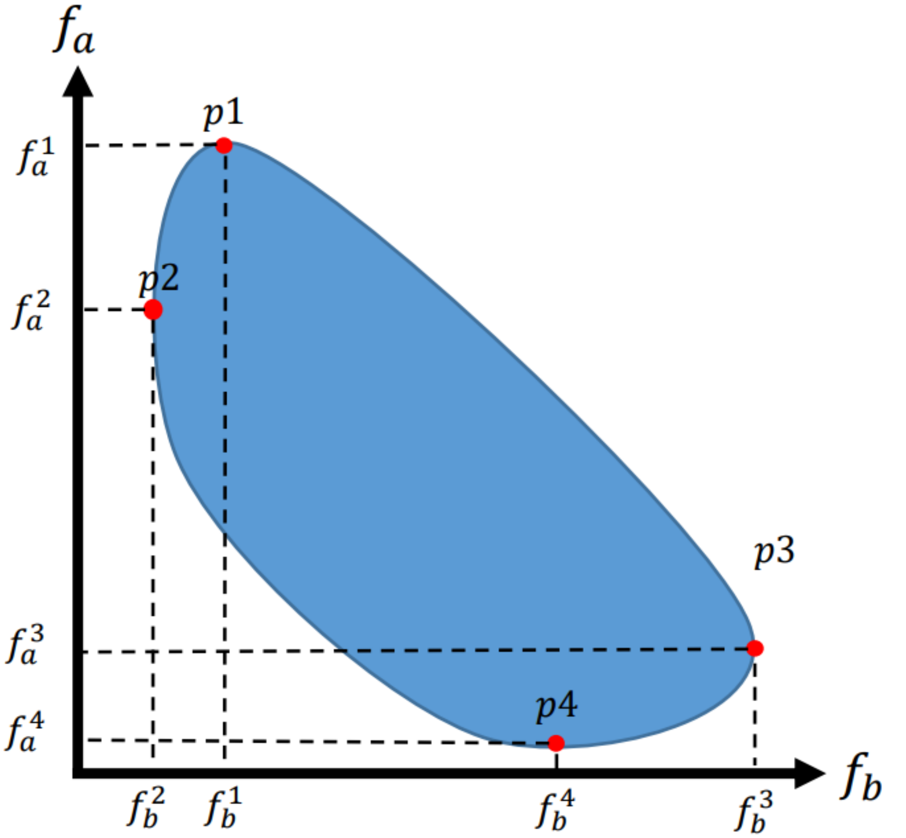


Soluciones especiales: cómo calcularlas

- El vector ideal se calcula con el procedimiento descrito, resolviendo m problemas monoobjetivo y considerando los puntos extremos del frente de Pareto.
- No existe un mecanismo simple para calcular el vector nadir.

Opciones para calcular el vector nadir

- Método de matriz de pagos compuesta por los resultados de la optimización monoobjetivo de todos los objetivos (p2 y p4).
- Optimización de los objetivos invertidos (p1 y p3).
- Resolución de un problema de programación por compromiso desbalanceado.



Problema de optimización multiobjetivo: enfoques de resolución

- En un problema de optimización multiobjetivo no existe una única solución que optimice todos los criterios simultáneamente, entonces es necesario un proceso de toma de decisiones.
- Cuando no existe un tomador de decisiones, se trata de un método sin preferencias.
- Cuando existe, el tomador de decisiones debe seleccionar una solución entre las diversas alternativas existentes.
- Según la etapa que interviene el tomador de decisiones, se clasifican los enfoques de resolución multiobjetivo en tres categorías: a priori, a posteriori e interactivos.

Problema de optimización multiobjetivo: enfoque de resolución sin preferencias

- Cuando no existe un tomador de decisiones o no se articula explícitamente ninguna información de preferencia.
- Ejemplo: método del criterio global (Global criterion method)

$$\min_{\vec{x}} \ / \max_{\vec{x}} \left\| \vec{F}(\vec{x}) - z_{ideal} \right\|$$

$$\text{sujeto a}$$

$$g_i(\vec{x}) \geq 0$$

- El método es sensible a la escala de los objetivos, por lo cual deben normalizarse los valores de $f_i(x)$

Problema de optimización multiobjetivo: enfoque de resolución a priori

- En los métodos a priori el tomador de decisiones expresa sus preferencias previamente al proceso de cálculo (por ejemplo, asignando pesos o fijando metas para los objetivos). Los métodos a priori requieren que el tomador de decisiones tenga cierto conocimiento del frente de Pareto del problema.
- Se toman decisiones antes de buscar (decidir $\Rightarrow$ buscar).

Problema de optimización multiobjetivo: enfoque de resolución a priori

- Incluye a los métodos que presuponen que un cierto conjunto de metas deseables (o un cierto pre-ordenamiento de los objetivos) pueden ser satisfactorias para el tomador de decisiones antes de realizar la búsqueda.
- Programación por metas (goal programming), Método de Satisfacción de Metas (goal attainment), Método lexicográfico Optimización Min-Max.

Procedimiento para resolver problemas multiobjetivo con toma de decisiones a priori

- Paso 1: Definir criterios de agregación o metas para transformar el problema de optimización multiobjetivo.
- Paso 2: Resolver el problema transformado, aplicando un algoritmo de optimización monoobjetivo.
- En este curso se estudiarán los conceptos teóricos y los métodos aplicado en el paso 2 (optimización multiobjetivo)

Procedimiento para resolver problemas multiobjetivo con toma de decisiones a priori

Problema de optimización multiobjetivo

$$\min_{\vec{x}} \ / \max_{\vec{x}} \ \vec{F}(\vec{x})$$

sujeto a

$$g_i(\vec{x}) \geq 0$$

‘paso 1

Determinar ponderaciones o metas

Problema restringido (agregación lineal, programación con metas)

$$\min_{\vec{x}} \ / \max_{\vec{x}} \ h(\vec{F}(\vec{x}))$$

sujeto a

$$g_i(\vec{x}) \geq 0$$

$$r(f_i) \geq 0$$

Método de resolución

Hallar una solución

‘paso 2

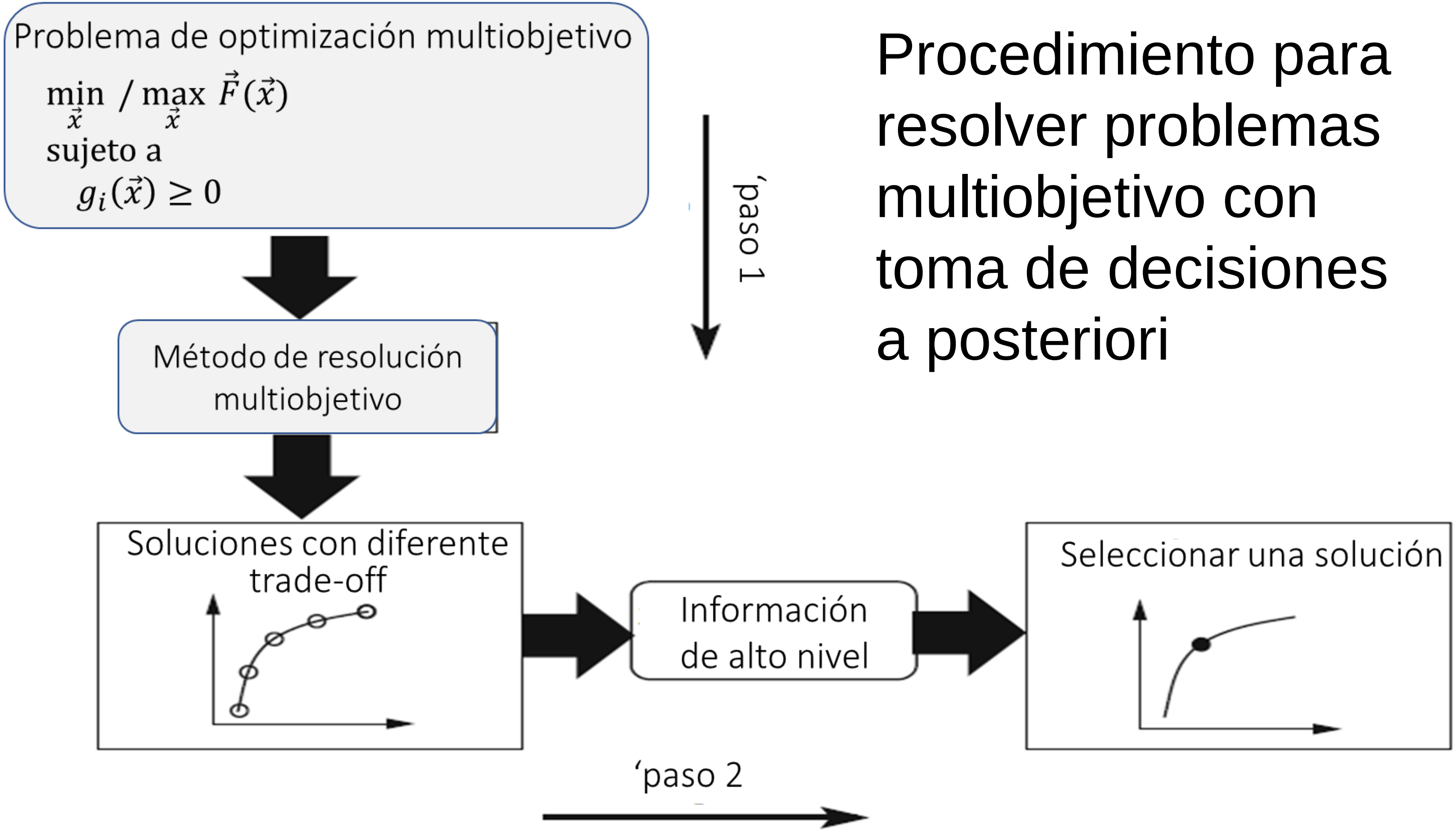
Problema de optimización multiobjetivo: enfoque de resolución a posteriori

- En los métodos a posteriori, el tomador de decisiones se involucra luego del proceso de optimización. Trabaja sobre todas las soluciones o sobre una muestra representativa y selecciona la solución preferida.
- Se busca antes de tomar decisiones (buscar ⇒ decidir).
- Métodos convenientes cuando el tomador de decisiones no está disponible previamente o durante el proceso de optimización.
- Aumentan la confianza en la selección final del tomador de decisiones, porque conoce todo el frente de Pareto calculado.

Procedimiento para resolver problemas multiobjetivo con toma de decisiones a posteriori

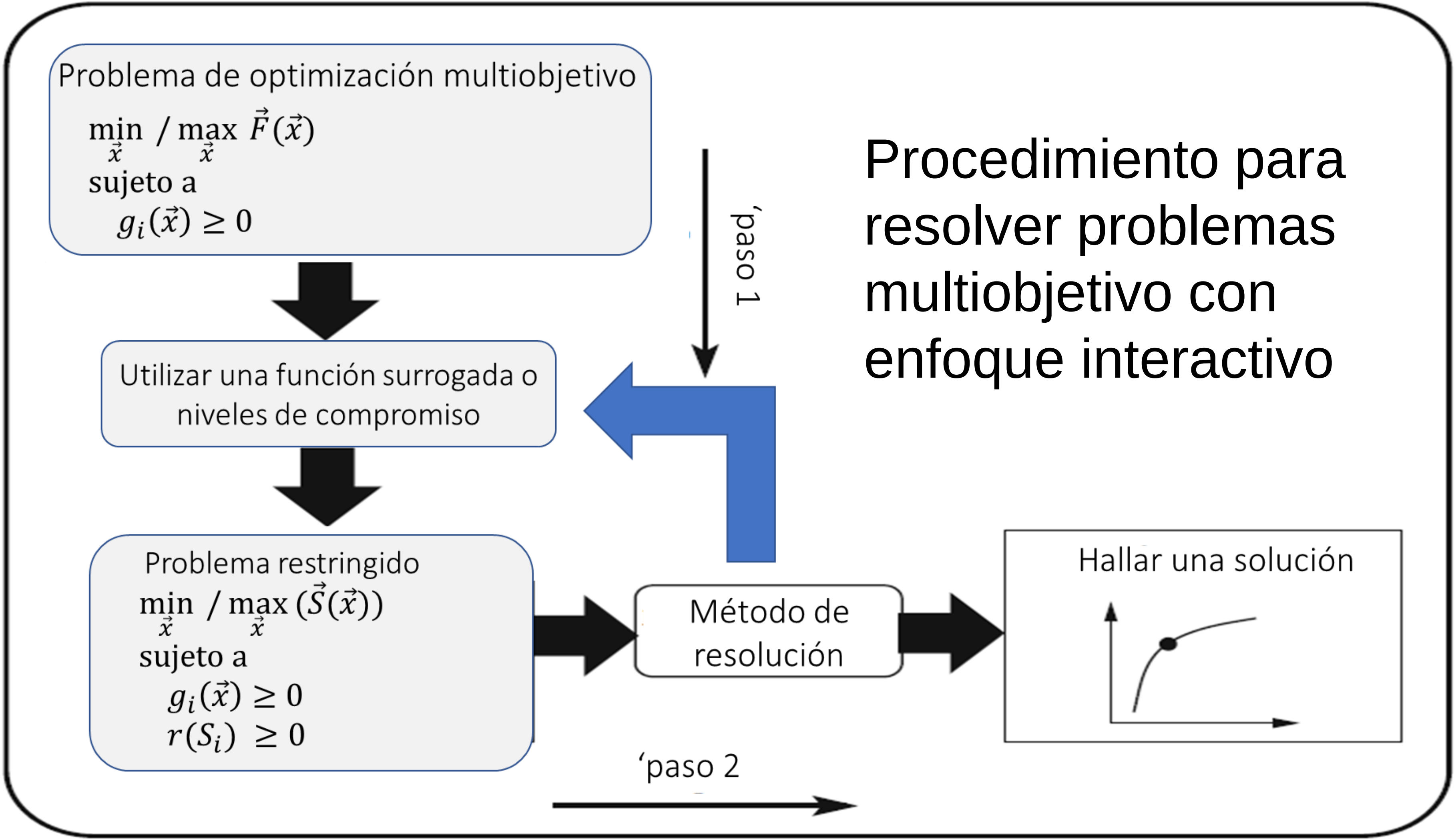
- Paso 1: Hallar múltiples soluciones óptimas con diferentes valores de compromiso entre los objetivos (utilizando algoritmos de optimización multiobjetivo).
- Paso 2: Seleccionar una de las soluciones obtenidas utilizando información de nivel superior o algún método de ayuda multicriterio (métodos TOPSIS, ELECTRE, etc.).
- En este curso se estudiarán los conceptos teóricos y los métodos aplicado en el paso 1 (optimización multiobjetivo)

Procedimiento para resolver problemas multiobjetivo con toma de decisiones a posteriori



Problema de optimización multiobjetivo: enfoque de resolución interactivo

- En los métodos interactivos el tomador de decisiones se involucra durante el periodo de optimización. Se alternan etapas de cálculo y análisis, para guiar progresivamente la búsqueda hacia soluciones deseables. No requiere conocimiento total del frente de Pareto (solo resultados parciales).
- Articulación progresiva de preferencias: integrar la búsqueda con la toma de decisiones (decidir ⇔ buscar).
- Algunos algoritmos representativos de este grupo de técnicas son: Probabilistic Trade-Off Development, Método STEP y Sequential Multiobjective Problem Solving


Procedimiento para resolver problemas multiobjetivo con enfoque interactivo
Problema de optimización multiobjetivo
$\min_{\vec{x}} / \max_{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x})$
sujeto a
$g_i(\vec{x}) \geq 0$
Utilizar una función surrogada o niveles de compromiso
Problema restringido
$\min_{\vec{x}} / \max_{\vec{x}} (\vec{S}(\vec{x}))$
sujeto a
$g_i(\vec{x}) \geq 0$
$r(S_i) \geq 0$
'paso 1
Método de resolución
Hallar una solución
'paso 2