Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 7, CLASE 2

Hoja 7. Ejercicio 6

6) En el sistema realimentado en velocidad de la figura 7.6 se introduce un condensador **C** de 2 μF en el lazo de realimentación de velocidad.

a) Hallar polos y ceros de lazo cerrado.

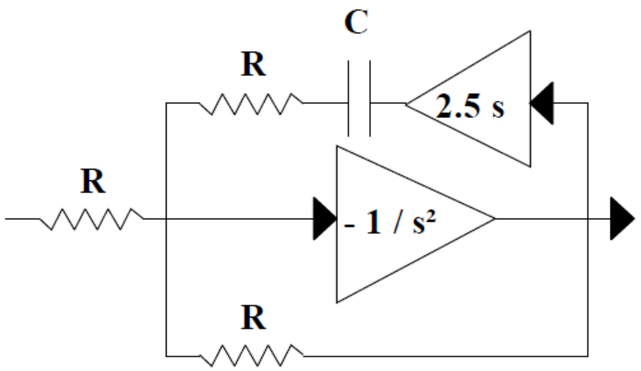


Figura 7.6

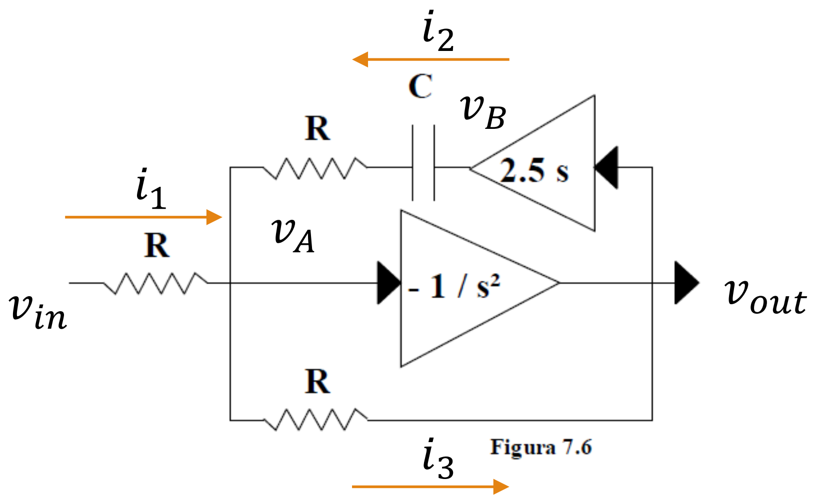
DATOS:
Los bloques tienen impedancia de entrada infinita e impedancia de salida nula.
$R = 1\ M\Omega$

Hoja 7. Ejercicio 6

Aplicando Ley de Nodos

$$i_1 + i_2 = i_3$$

$$\frac{(v_{in}-v_A)}{R} + \frac{(v_B-v_A)}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{(v_A-v_{out})}{R}$$



Hoja 7. Ejercicio 6

Aplicando Ley de Nodos

$$i_1 + i_2 = i_3$$

$$\frac{(v_{in}-v_A)}{R} + \frac{(v_B-v_A)}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{(v_A-v_{out})}{R}$$

$$\frac{(v_{in}+v_{out}.s^2)}{R} + \frac{(v_B+v_{out}.s^2)}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{(-v_{out}.s^2-v_{out})}{R}$$

$$\frac{(v_{in}+v_{out}.s^2)}{R} + \frac{(2{,}5.v_{out}\, s+v_{out}.s^2)}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{(-v_{out}.s^2-v_{out})}{R}$$

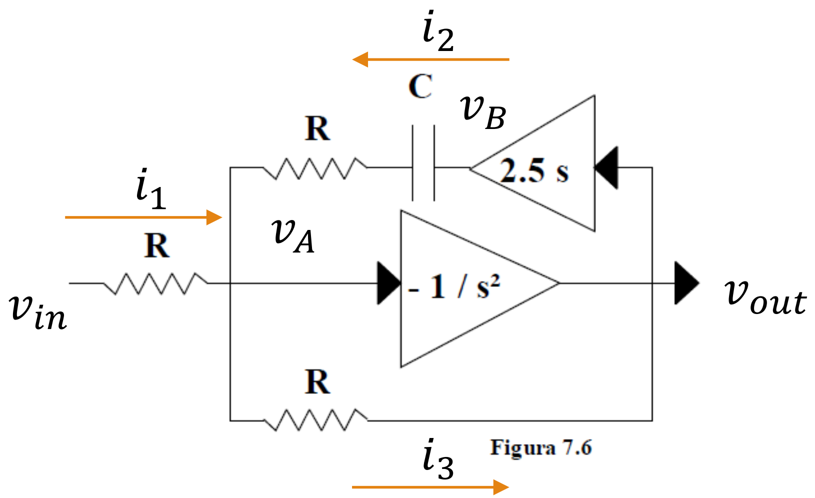


Figura 7.6

Hoja 7. Ejercicio 6

$$(v_{in} + v_{out}.s^2) + \frac{RCs(2{,}5.v_{out}\,s + v_{out}.s^2)}{RCs+1} = (-v_{out}.s^2 - v_{out})$$

Hoja 7. Ejercicio 6

$$(v_{in} + v_{out}.\, s^2) + \frac{RCs(2{,}5.v_{out}\, s + v_{out}.s^2)}{RCs+1} = (-v_{out}.\, s^2 - v_{out})$$

$$-(RCs + 1)v_{in} = [(RCs + 1)s^2 + RCs^2(2{,}5 + s) + (RCs + 1)(s^2 + 1)]v_{out}$$

Hoja 7. Ejercicio 6

$$(v_{in} + v_{out}.s^2) + \frac{RCs(2{,}5.v_{out}\,s + v_{out}.s^2)}{RCs+1} = (-v_{out}.s^2 - v_{out})$$

$$-(RCs+1)v_{in} = [(RCs+1)s^2 + RCs^2(2{,}5+s) + (RCs+1)(s^2+1)]v_{out}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{(RCs+1)}{RCs^2(2{,}5+s) + (RCs+1)(2s^2+1)}$$

Hoja 7. Ejercicio 6

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{(RCs+1)}{RCs^2(2{,}5+s)+(RCs+1)(2s^2+1)}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{(RCs+1)}{3RCs^3+(2{,}5RC+2)s^2+RCs+1}$$

Hoja 7. Ejercicio 6

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{(RCs+1)}{RCs^2(2{,}5+s)+(RCs+1)(2s^2+1)}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{(RCs+1)}{3RCs^3+(2{,}5RC+2)s^2+RCs+1}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{2(RCs+1)}{6RCs^3+(5RC+4)s^2+2RCs+2}$$

Hoja 7. Ejercicio 6

Si $RC = 2$

$$G_{CL}(s) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{2(2s+1)}{12s^3+14s^2+4s+2} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

- Para hallar polos y ceros de $G_{CL}(s)$ hallo las raíces de los polinomios $p(s)$ y $q(s)$
  - $q(s)$ tiene una raíz evidente. $polos = \left\{-1, \frac{-1 \pm j\sqrt{23}}{6}\right\}$
  - $ceros = -\frac{1}{2}$

Hoja 7. Ejercicio 6

Si $RC = 2$

$$G_{CL}(s) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{2(2s+1)}{12s^3+14s^2+4s+2} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

- Para hallar polos y ceros de $G_{CL}(s)$ hallo las raíces de los polinomios $p(s)$ y $q(s)$
  - $q(s)$ tiene una raíz evidente. $polos = \left\{-1, \frac{-1 \pm j\sqrt{23}}{6}\right\}$
  - $ceros = -\frac{1}{2}$
- El sistema es estable?

Hoja 7. Ejercicio 6

6) En el sistema realimentado en velocidad de la figura 7.6 se introduce un condensador **C** de 2 μF en el lazo de realimentación de velocidad.

a) Hallar polos y ceros de lazo cerrado.

b) Depende la estabilidad del valor de **C**?
Si es así calcular el C límite de estabilidad.

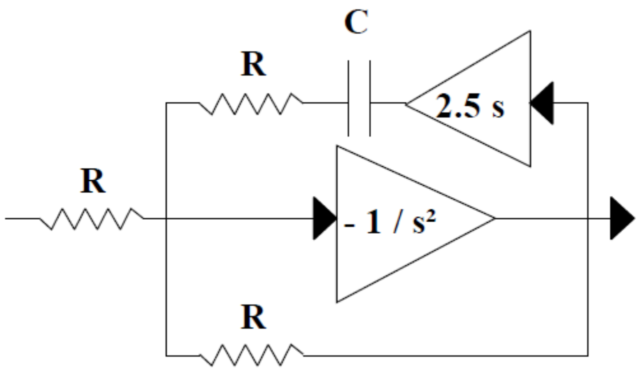


Figura 7.6

DATOS:
Los bloques tienen impedancia de entrada infinita e impedancia de salida nula.
R = 1 MΩ

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6RCs^3+(5RC+4)s^2+2RCs+2}$$

Para estudiar la estabilidad del sistema respecto a C, utilizaremos el criterio de Routh – Hurwitz

- Recordemos. R-H sirve para determinar el número de raíces con $Re > 0$ de un polinomio de grado n

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

Para estudiar la estabilidad del sistema respecto a C, utilizaremos el criterio de Routh – Hurwitz

- Recordemos. R-H sirve para determinar el número de raíces con $Re > 0$ de un polinomio de grado n
- Definamos $RC = k$

f^3	$6K$	$2K$	0
f^2	$5K + 4$	2	0
f^1			
f^0			

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

Para estudiar la estabilidad del sistema respecto a C, utilizaremos el criterio de Routh – Hurwitz

- Recordemos. R-H sirve para determinar el número de raíces con $Re > 0$ de un polinomio de grado n
- Definamos $RC = k$

f^3	6K	2K	0
f^2	$5K + 4$	2	0
f^1	$\frac{2K(5K+4)-12K}{5K+4}$	0	0
f^0			

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

Para estudiar la estabilidad del sistema respecto a C, utilizaremos el criterio de Routh – Hurwitz

- Recordemos. R-H sirve para determinar el número de raíces con $Re > 0$ de un polinomio de grado n
- Definamos $RC = k$

f^3	$6\mathrm{K}$	$2\mathrm{K}$	0
f^2	$5\mathrm{K}+4$	2	0
f^1	$\frac{2K(5K+4)-12K}{5K+4}$	0	0
f^0	2	0	0

Hoja 7. Ejercicio 6

Evaluemos los criterios de estabilidad

- $6K > 0$

f^3	$6K$	$2K$	0
f^2	$5K + 4$	2	0
f^1	$\frac{2K(5K+4) - 12K}{5K+4}$	0	0
f^0	2	0	0

Hoja 7. Ejercicio 6

Evaluemos los criterios de estabilidad

- $6K > 0$
- $5\mathrm{K} + 4 > 0 \rightarrow \mathrm{K} > -\frac{4}{5}$

f^3	$6K$	$2K$	0
f^2	$5K + 4$	2	0
f^1	$\frac{2K(5K+4) - 12K}{5K+4}$	0	0
f^0	2	0	0

Hoja 7. Ejercicio 6

Evaluemos los criterios de estabilidad

- $6K > 0$
- $5K + 4 > 0 \rightarrow K > -\frac{4}{5}$
- $\frac{2K(5K+4)-12K}{5K+4} > 0$
  - $(5K+4) - 6 > 0$
  - $K > \frac{2}{5} \rightarrow C > \frac{2}{5R} = 400nF$

f^3	$6K$	$2K$	0
f^2	$5K + 4$	2	0
f^1	$\frac{2K(5K+4) - 12K}{5K+4}$	0	0
f^0	2	0	0

Hoja 7. Ejercicio 6

6) En el sistema realimentado en velocidad de la figura 7.6 se introduce un condensador **C** de 2 μF en el lazo de realimentación de velocidad.

a) Hallar polos y ceros de lazo cerrado.

b) Depende la estabilidad del valor de **C**?
Si es así calcular el C límite de estabilidad.

c) Dibujar el lugar de las raíces.

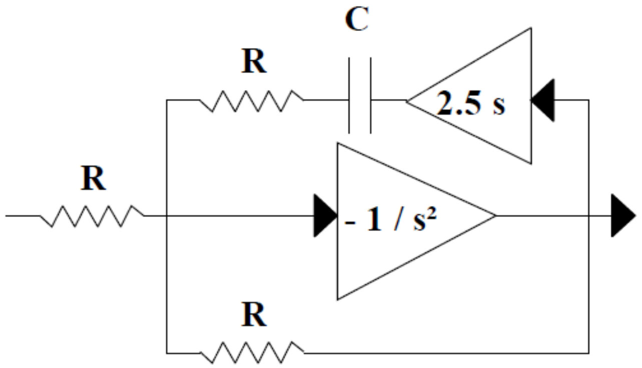


Figura 7.6

DATOS:
Los bloques tienen impedancia de entrada infinita e impedancia de salida nula.
R = 1 MΩ

Hoja 7. Ejercicio 6

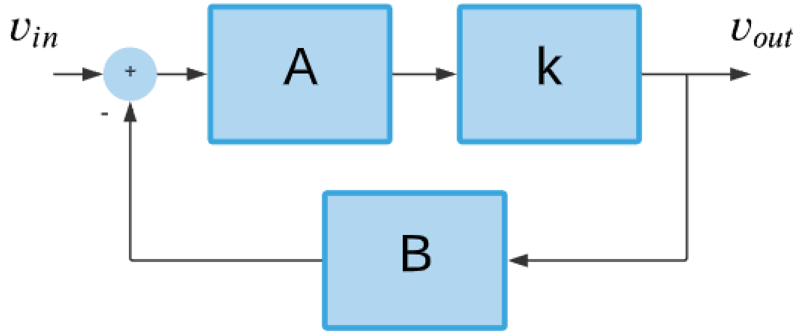
$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

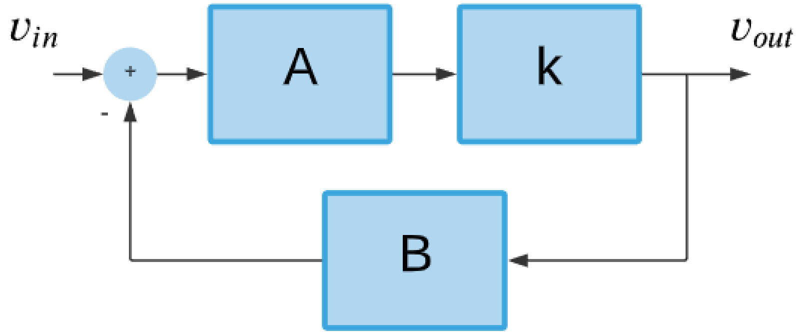
- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura



Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

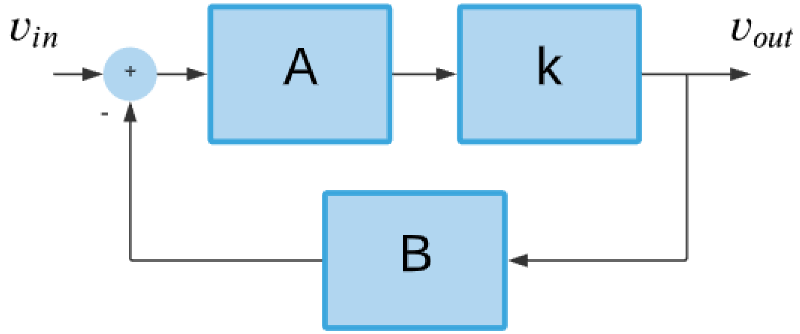
- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura
  - $G_{OL} = kA(s)B(s)$



Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

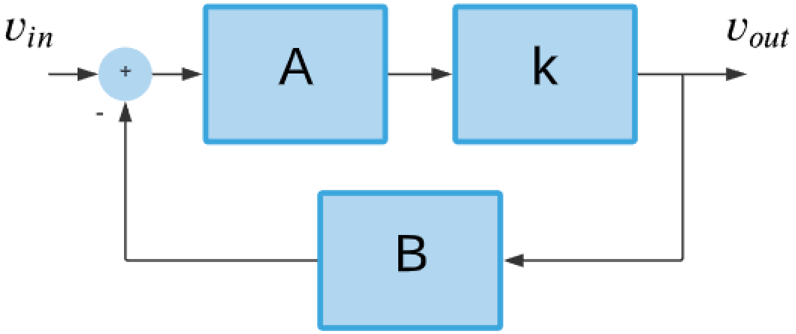
- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura
  - $G_{OL} = kA(s)B(s) = k\frac{p(s)}{q(s)}$
  - $G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+kA(s)B(s)}$



Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

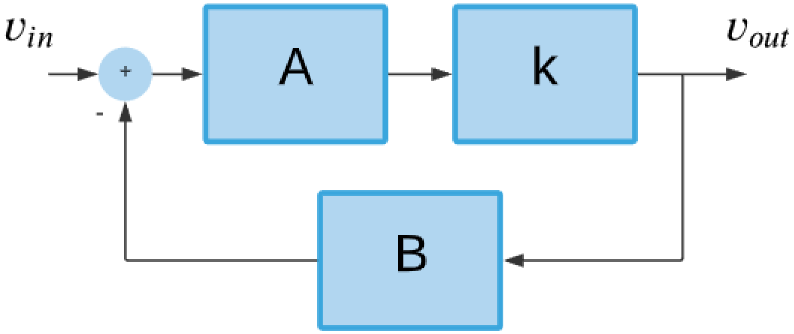
- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura
  - $G_{OL} = kA(s)B(s) = k\frac{p(s)}{q(s)}$
  - $G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+kA(s)B(s)} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}}$



Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura
  - $G_{OL} = kA(s)B(s) = k\frac{p(s)}{q(s)}$
  - $G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+kA(s)B(s)} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}}$

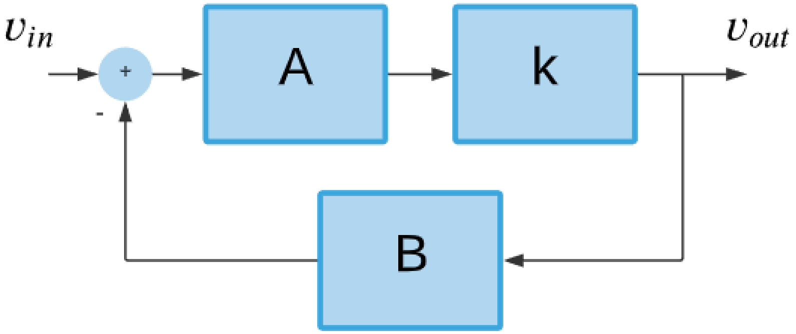


$$G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}} = \frac{1kA(s)q(s)}{q(s)+k.p(s)}$$

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura
  - $G_{OL} = kA(s)B(s) = k\frac{p(s)}{q(s)}$
  - $G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+kA(s)B(s)} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}}$



$$G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}} = \frac{1kA(s)q(s)}{q(s)+k.p(s)}$$

$$q(s) + k.p(s) = 6ks^3 + (5k+4).s^2 + 2ks + 2 = 2 + 4s^2 + k(6s^3 + 5s^2 + 2s)$$

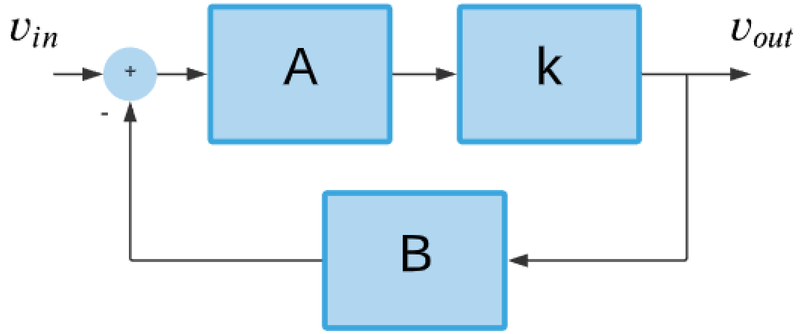
Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{CL}(s) = -\frac{2(RCs+1)}{6Ks^3+(5K+4).s^2+2ks+2}$$

- Problema. Para representar el LGR debemos obtener una expresión para la transferencia de lazo abierto
- Para lograrlo, intentaremos representar el sistema según la estructura mostrada en la figura
  - $G_{OL} = kA(s)B(s) = k\frac{p(s)}{q(s)}$
  - $G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+kA(s)B(s)} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}}$

$$G_{CL} = \frac{1kA(s)}{1+k.\frac{p(s)}{q(s)}} = \frac{1kA(s)q(s)}{q(s)+k.p(s)}$$

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

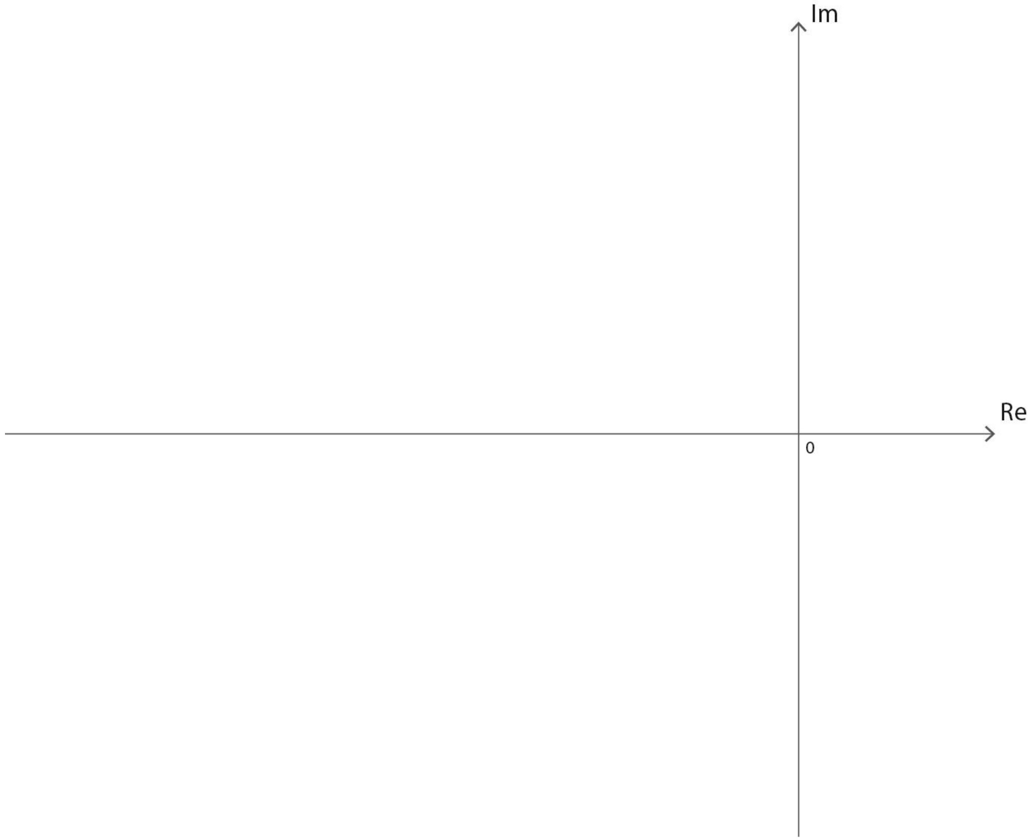


$$q(s)+k.p(s) = 6ks^3+(5k+4).s^2+2ks+2 = 2+4s^2+k(6s^3+5s^2+2s)$$

Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

- Una vez obtenida $G_{OL}(s)$, procedemos a determinar el LGR

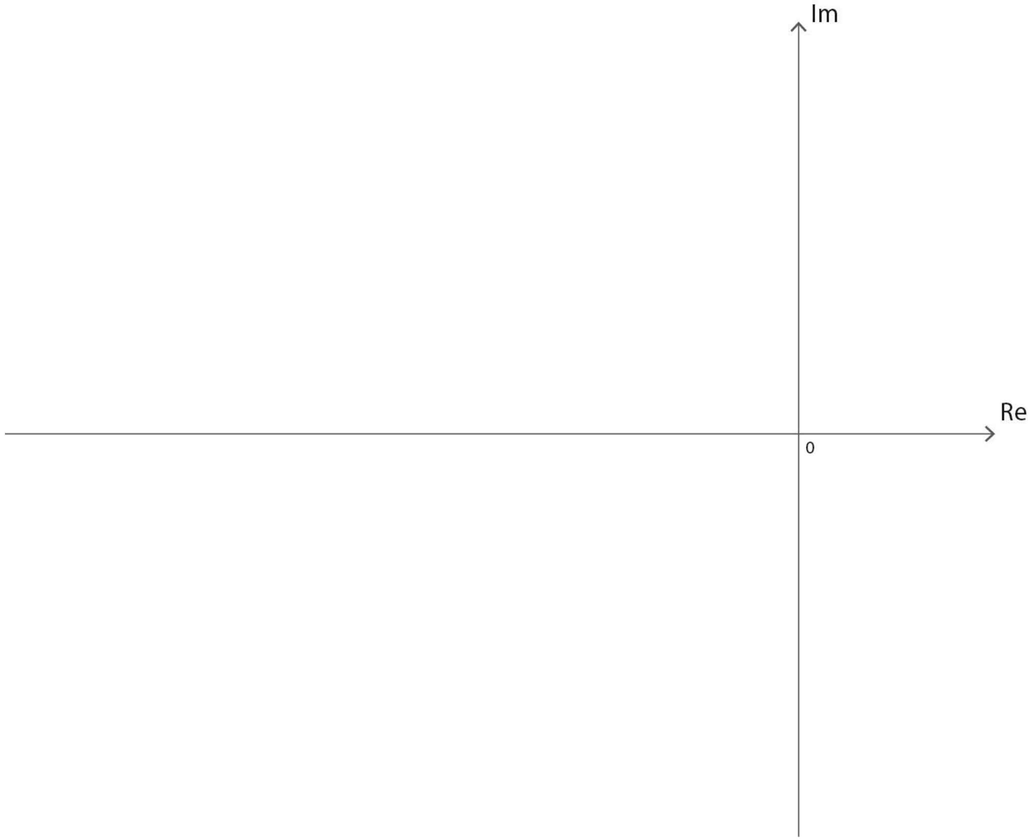


Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

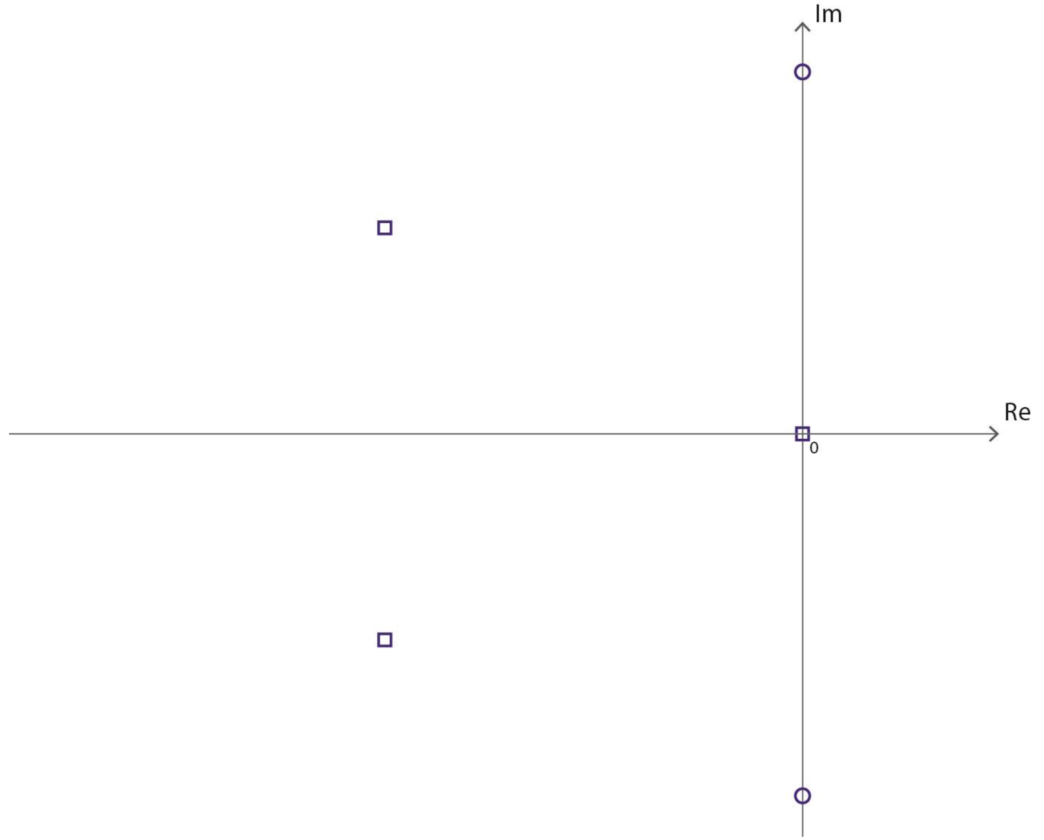
Regla 1:

- El LGR tiene $\max\{m, n\}$ ramas independientes
  - $n = gr\{p(s)\}$
  - $m = gr\{q(s)\}$
- n ramas comienzan en los polos de G_{OL}
- m ramas comienzan en los ceros de G_{OL}



Hoja 7. Ejercicio 6

- Ramas = 3
- Polos = $\left\{\pm\frac{j\sqrt{2}}{2}\right\}$
- Ceros= $\left\{\frac{-5\pm j\sqrt{23}}{12}\right\}$

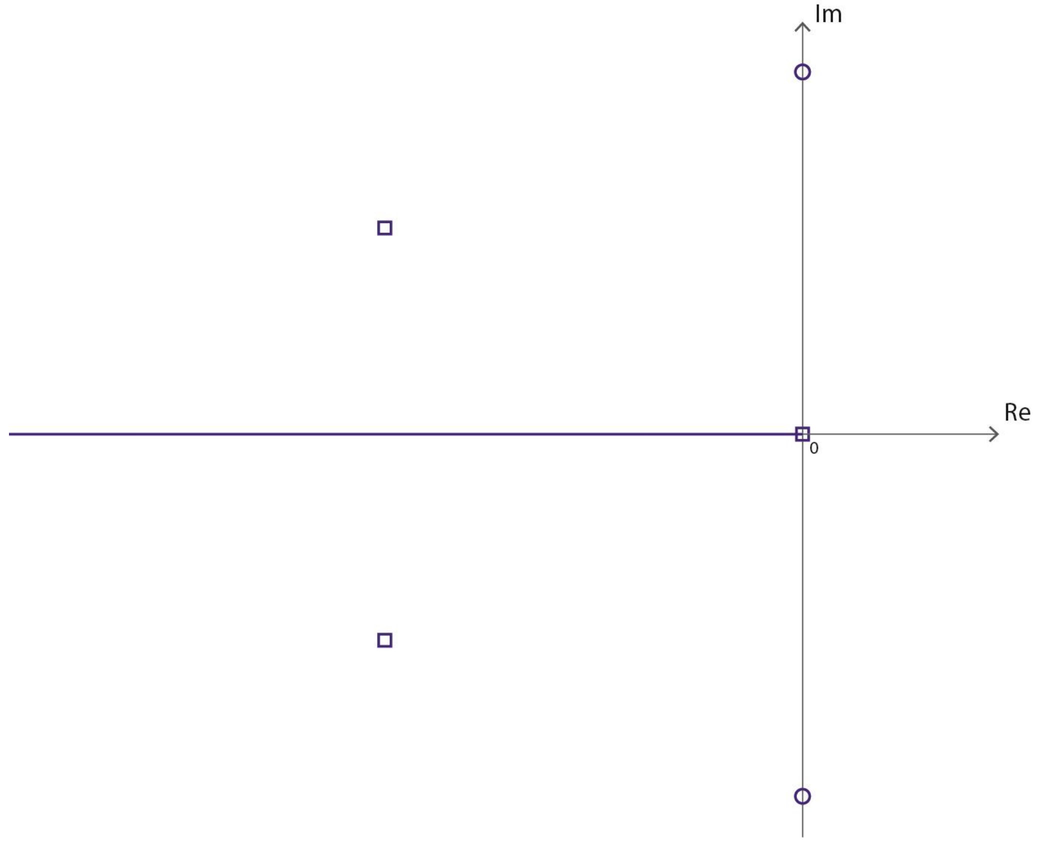


Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

Regla 2: Pertenencia del eje real

- Pertenecen al LGP las porciones del eje real que tienen a su derecha un número impar de singularidades

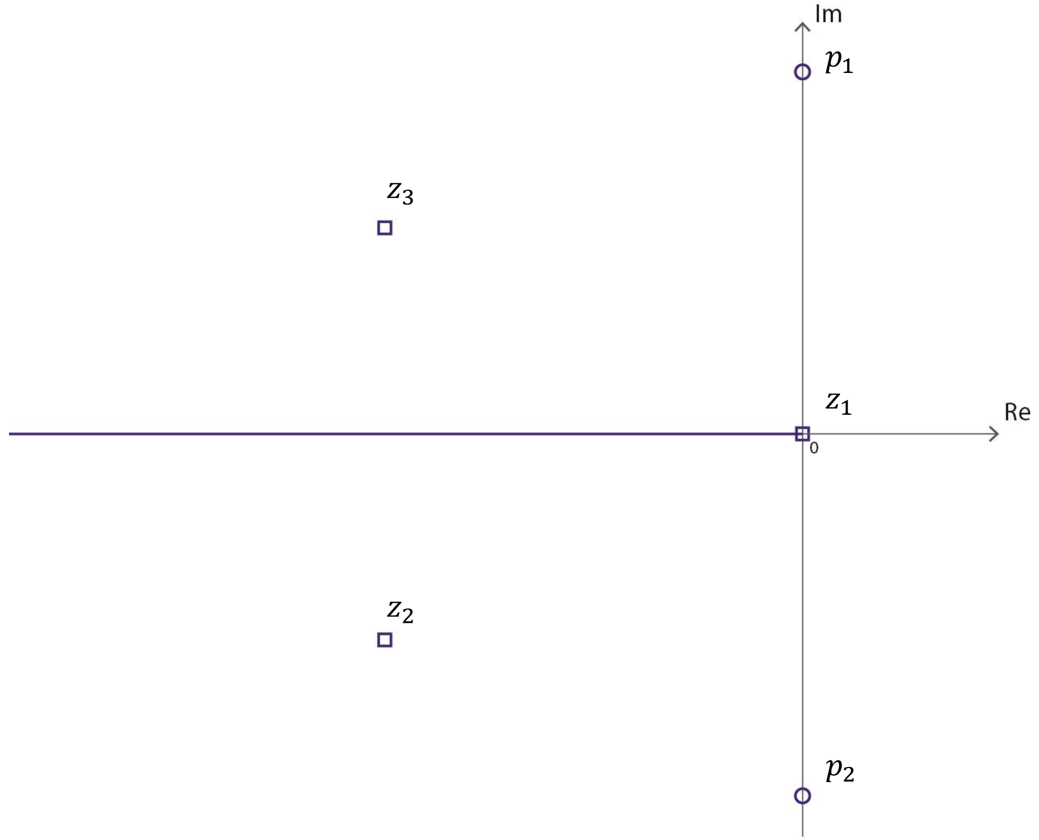


Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

Regla 2: Pertenencia del eje real

- Pertenecen al LGP las porciones del eje real que tienen a su derecha un número impar de singularidades

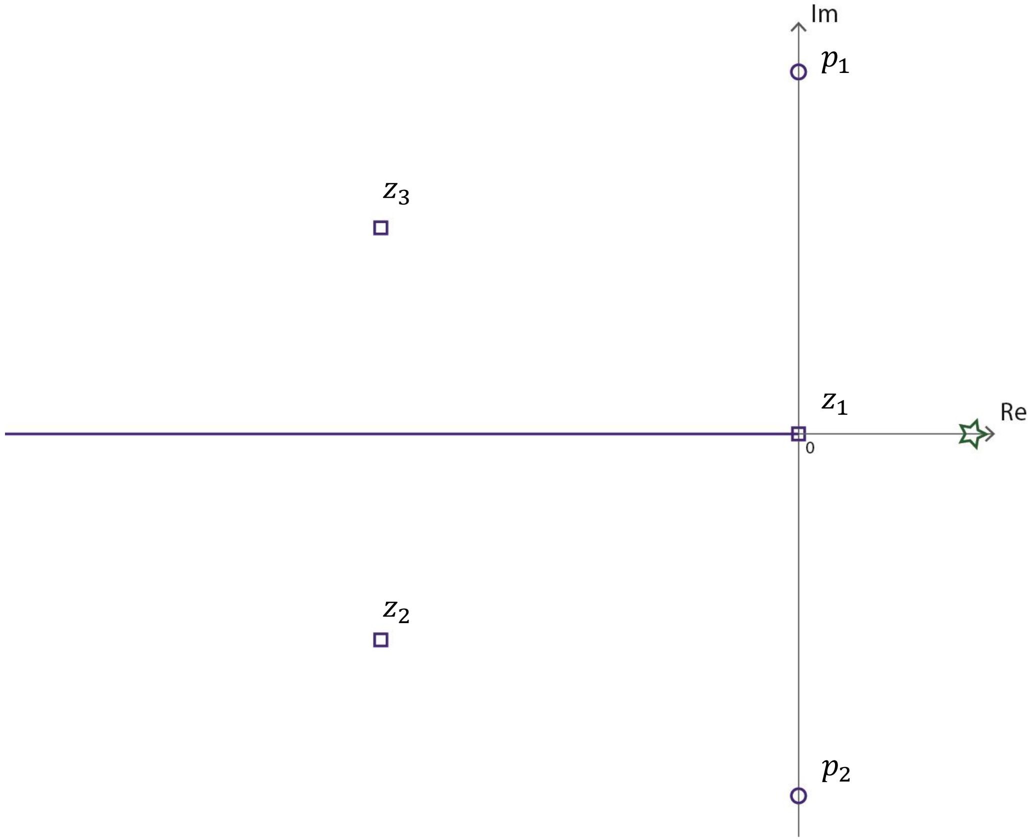


Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

Regla 3: Centroide

- $c = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = \frac{\frac{j\sqrt{2}}{2} - \frac{j\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{5}{12} + \frac{j\sqrt{23}}{12} + \frac{5}{12} - \frac{j\sqrt{23}}{12}}{3-2}$
- $c = \frac{5}{6}$



Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

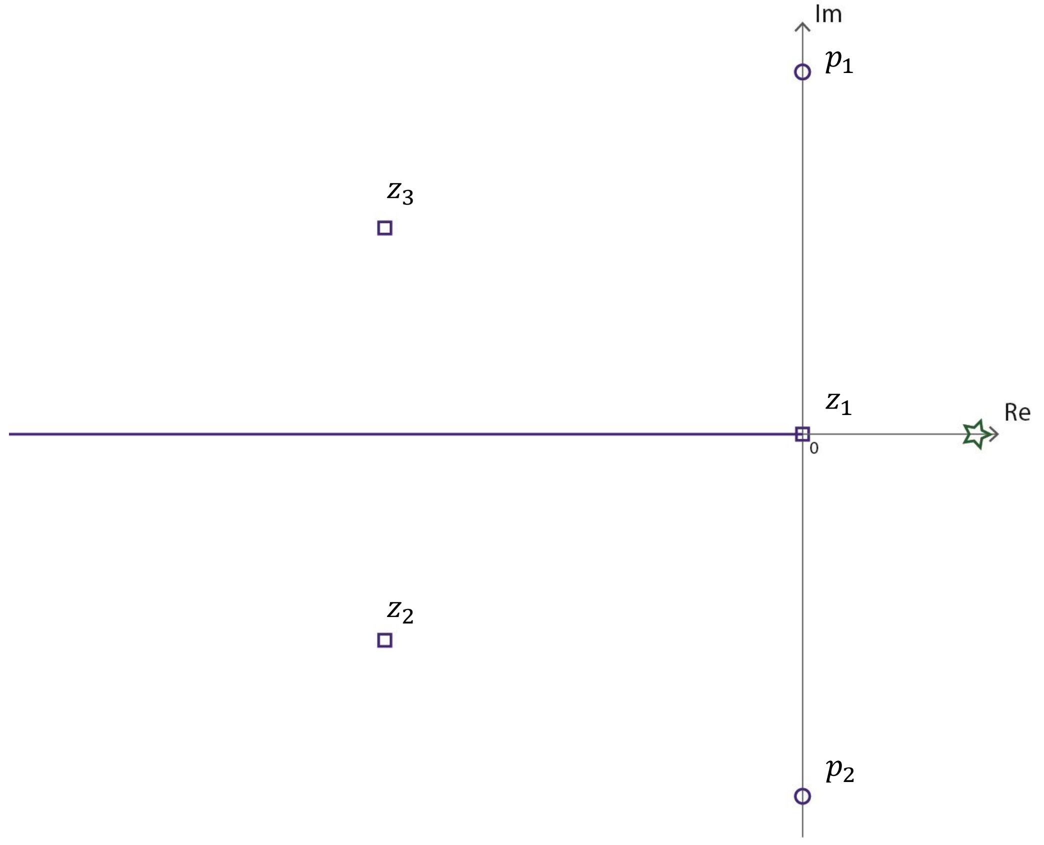
Regla 4: Ángulos de partida y llegada

- $\theta_{partida_{pk}} = \pi + \sum \varphi_{ik} - \sum_{j \neq k} \psi_{jk}$
- $\theta_{llegada_{pk}} = \pi - \sum_{j \neq k} \varphi_{ik} + \sum \psi_{jk}$
- ψ ángulo "desde polos"
- φ ángulo "desde ceros"

$$G_{OL}(s) = \alpha . \frac{\prod (s-z_i)}{\prod (s-p_j)}$$

$$Im\{G_{OL}(s)\} = 0$$

$$Re\{G_{OL}(s)\} < 0 \ (LGP)$$



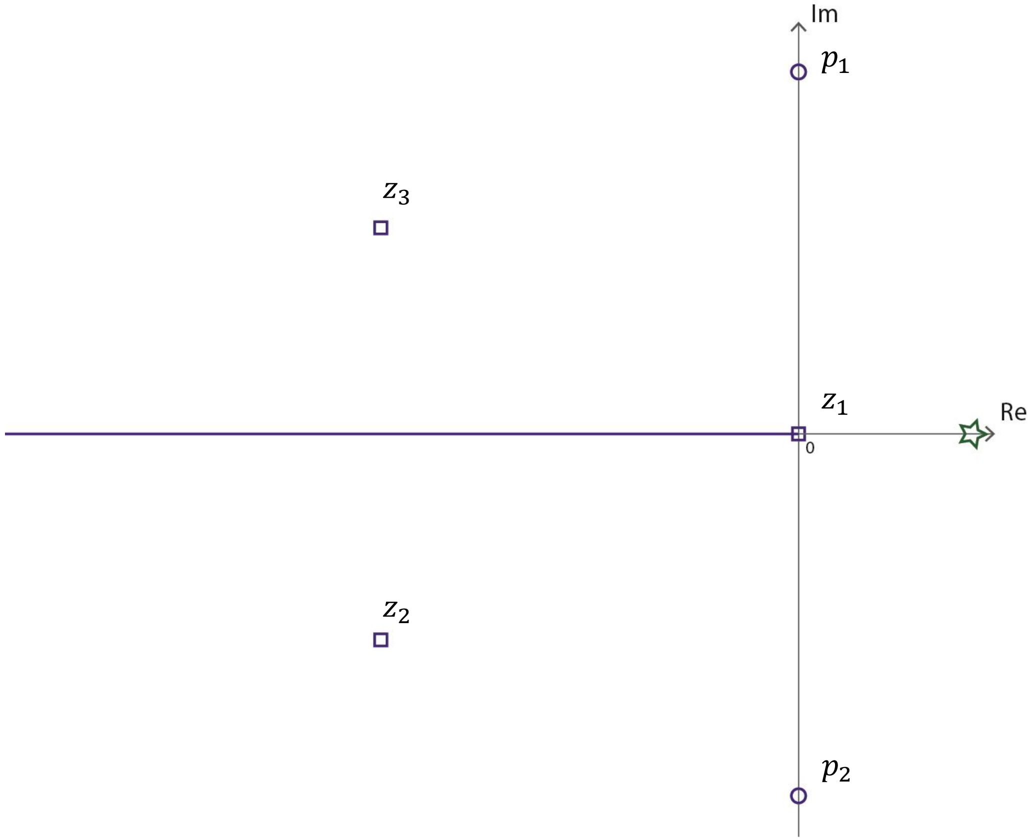
Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \alpha.\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_j)}$$

$$Im\{G_{OL}(s)\} = 0$$

$$Re\{G_{OL}(s)\} < 0\ (LGP)$$

$$Arg[G_{OL}(s)] = \sum\varphi_{ik} - \sum\psi_{jk} = \pi$$

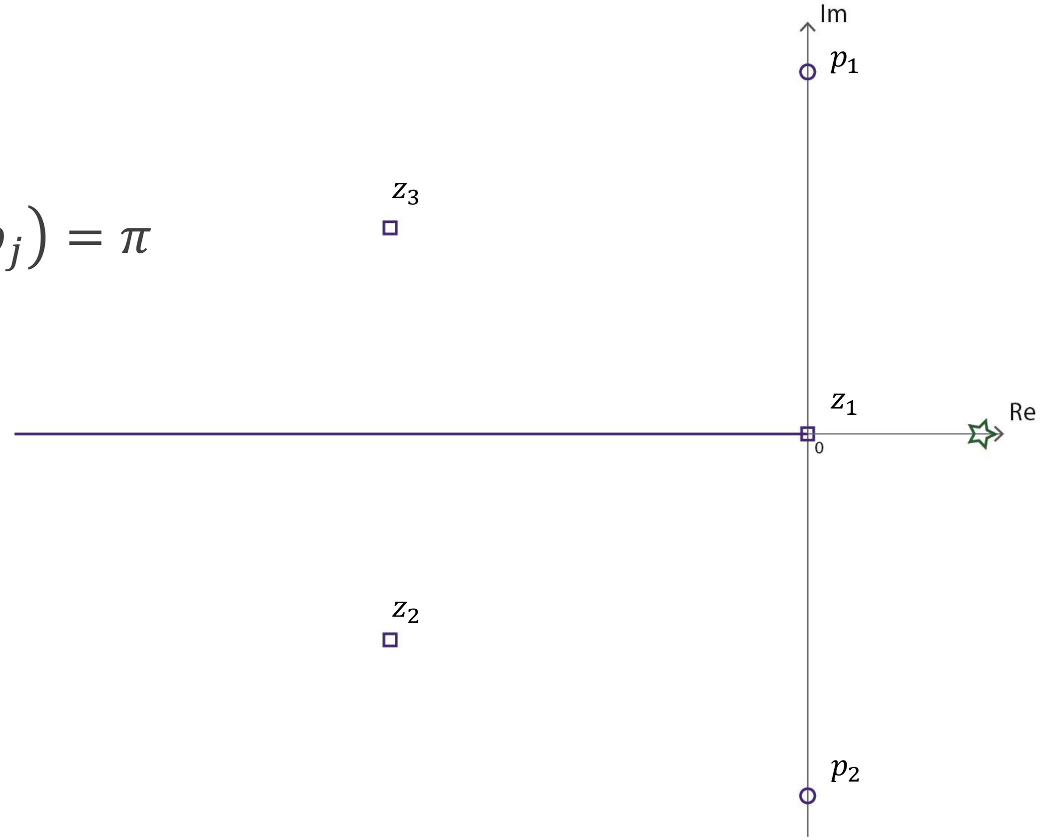


Hoja 7. Ejercicio 6

- $Arg[G_{OL}(s)] = \sum\varphi_{ik} - \sum\psi_{jk} = \pi$

Sea $s^* \cong z_3$

$$Arg[G_{OL}(s^*)] = \sum Arg(s^* - z_i) - \sum Arg\left(s^* - p_j\right) = \pi$$



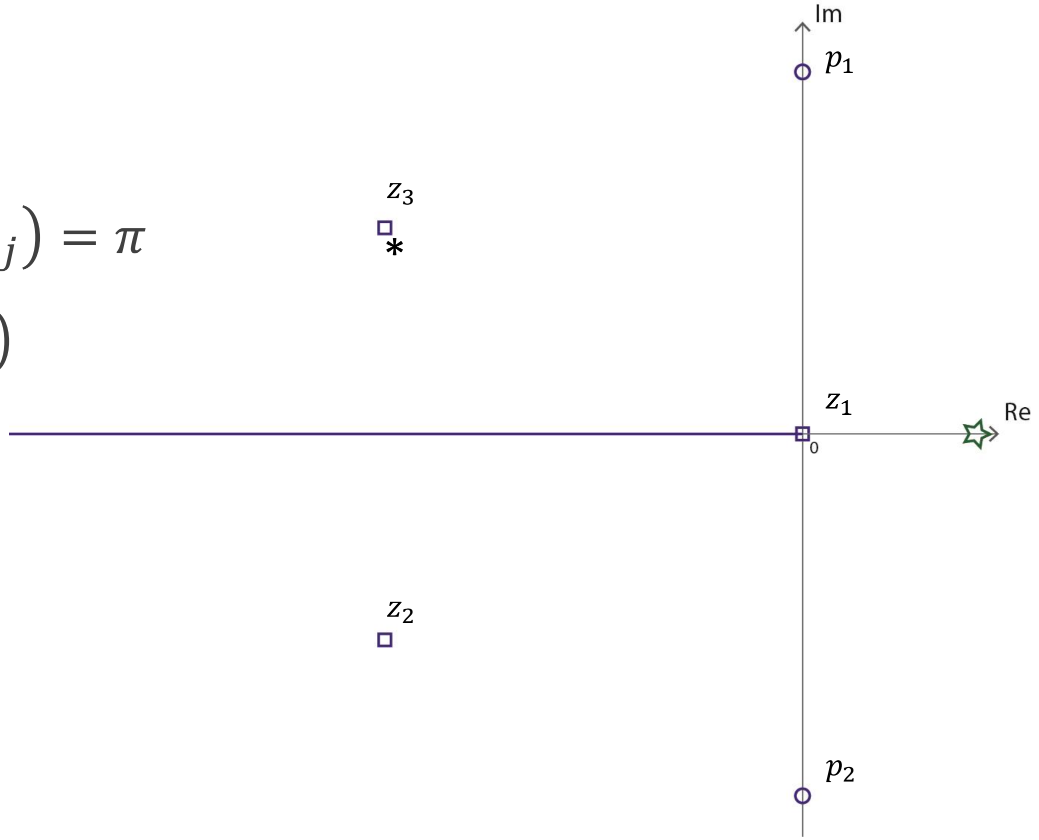
Hoja 7. Ejercicio 6

- $Arg[G_{OL}(s)] = \sum\varphi_{ik} - \sum\psi_{jk} = \pi$

Sea $s^* \cong z_3$

$$Arg[G_{OL}(s^*)] = \sum Arg(s^* - z_i) - \sum Arg\left(s^* - p_j\right) = \pi$$

$$Arg(s^* - z_3) = \pi - \sum_{i \neq 3}(s^* - z_i) + \sum\left(s^* - p_j\right)$$



Hoja 7. Ejercicio 6

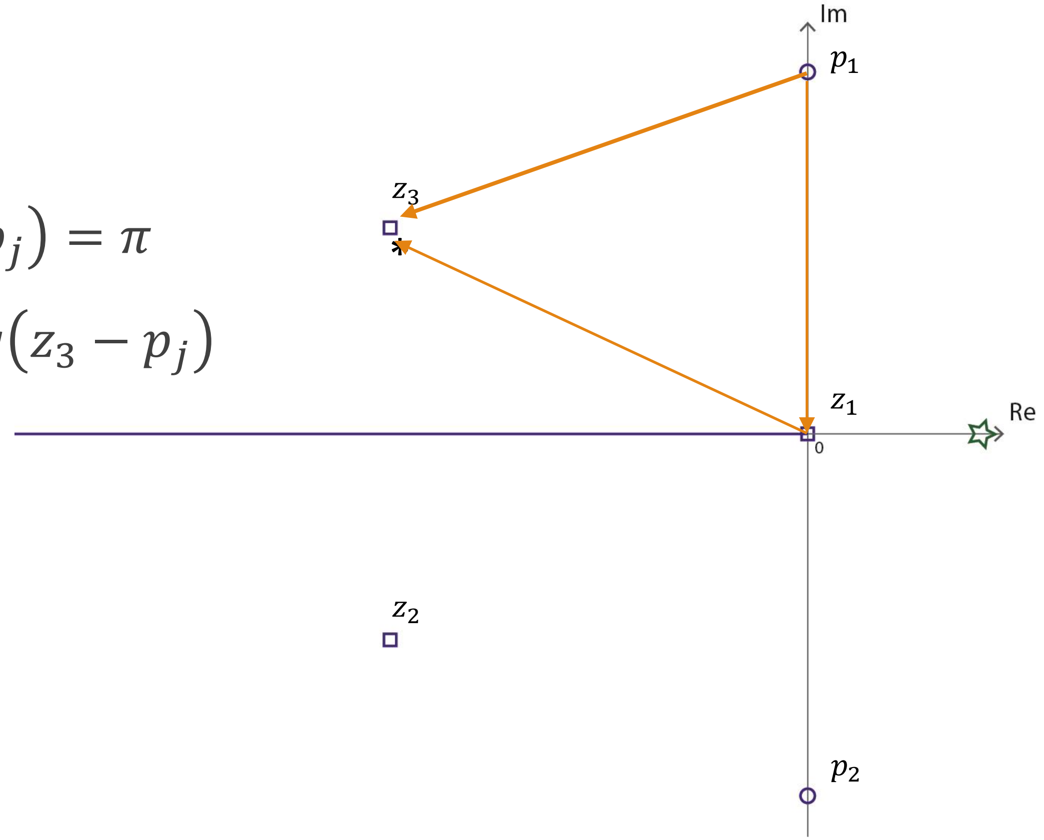
- $Arg[G_{OL}(s)] = \sum\varphi_{ik} - \sum\psi_{jk} = \pi$

Sea $s^* \cong z_3$

$$Arg[G_{OL}(s^*)] = \sum Arg(s^* - z_i) - \sum Arg\left(s^* - p_j\right) = \pi$$

$$Arg(s^* - z_3) \cong \pi - \sum_{i\neq 3} Arg(z_3 - z_i) + \sum Arg\left(z_3 - p_j\right)$$

$$Arg(s^* - z_3) \cong \pi - \sum_{j\neq 3} \varphi_{ik} + \sum\psi_{jk}$$

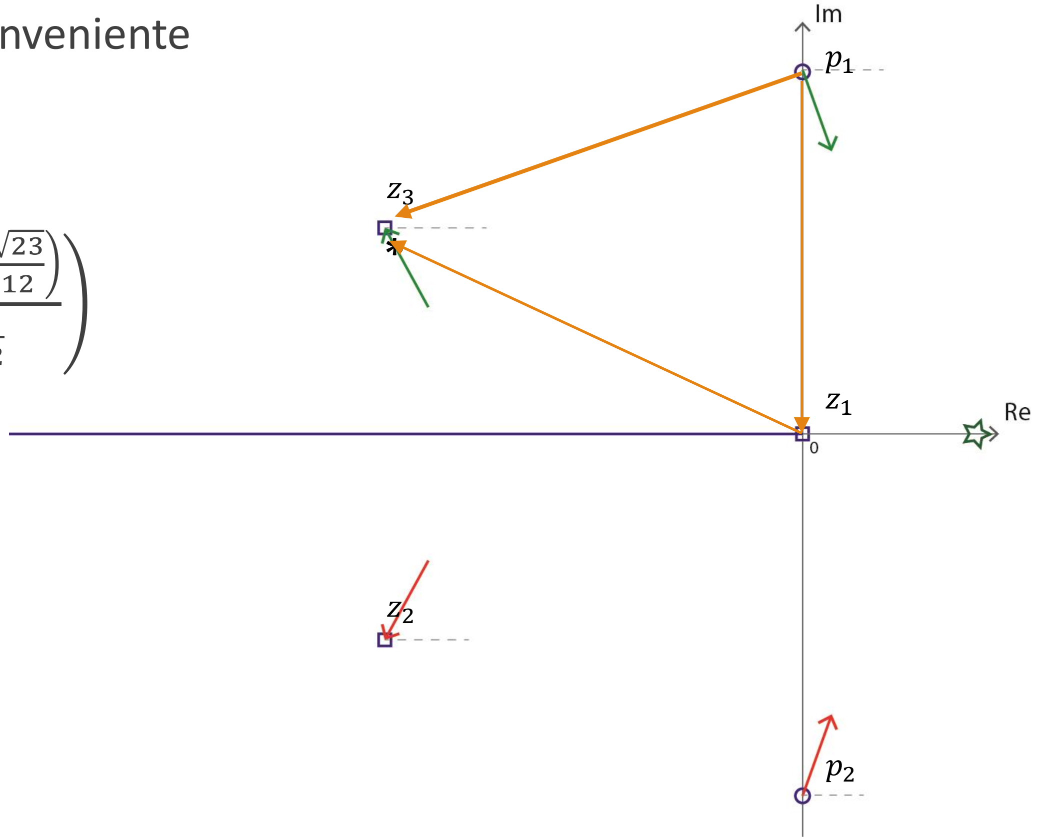


Hoja 7. Ejercicio 6

- Para hallar los ángulos de partida y de llegada es conveniente notar que el LGR es simétrico respecto al eje real

  Calculemos para p_1

- $\theta_{p_1} = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + Arctg\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{23}}{12}\right)}{\frac{5}{12}}\right) + Arctg\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{23}}{12}\right)}{\frac{5}{12}}\right)$
- $\theta_{p_1} = 285°$
- $\theta_{p_2} = -285°$
- $\theta_{z_3} = -\theta_{z_2} = -31°$



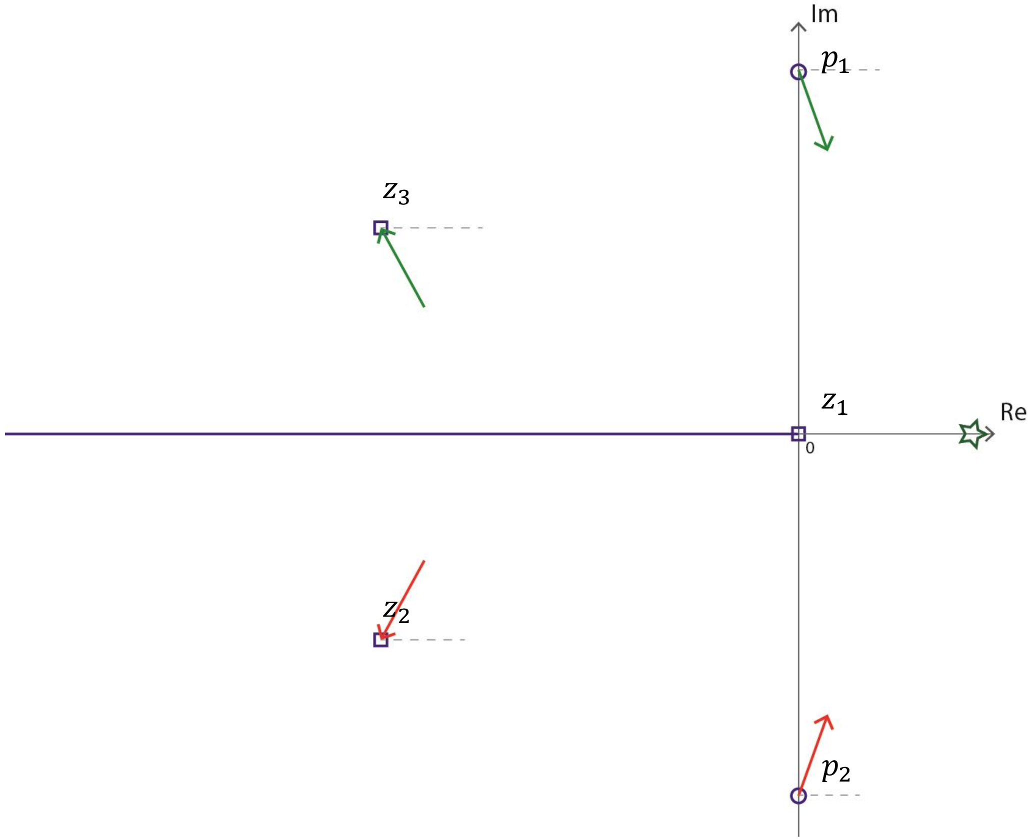
Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

Regla 5: Puntos múltiples

Un punto s^* es punto múltiple de $G_{OL}(s)$ si verifica que

- $G'(s^*) = 0$
- $1 + kG(s^*) = 0 \rightarrow \in LGR$



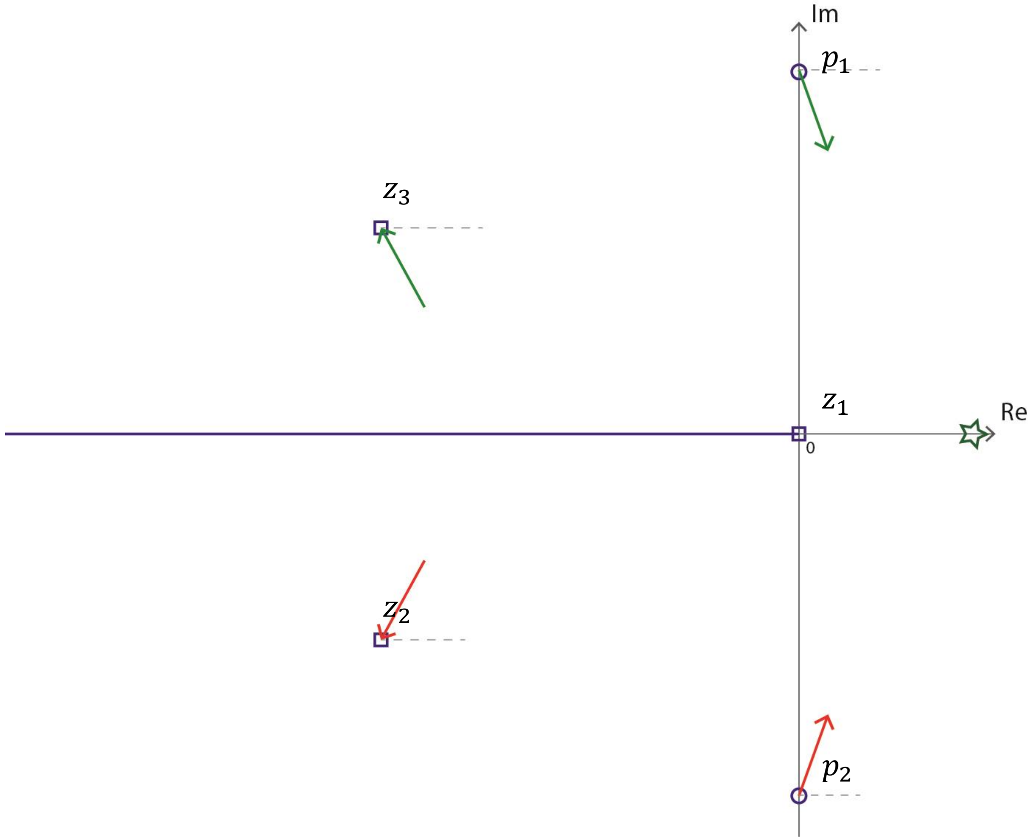
Hoja 7. Ejercicio 6

- $G'(s^*) = \frac{24s^4+28s^2+20s+4}{(2+4s^2)^2} = 0$

Sus raíces son

- $-0{,}313 \pm j0{,}130$
- $-0{,}313 \pm j0{,}1{,}16$

$$1 + kG(s^*) = 0$$



Hoja 7. Ejercicio 6

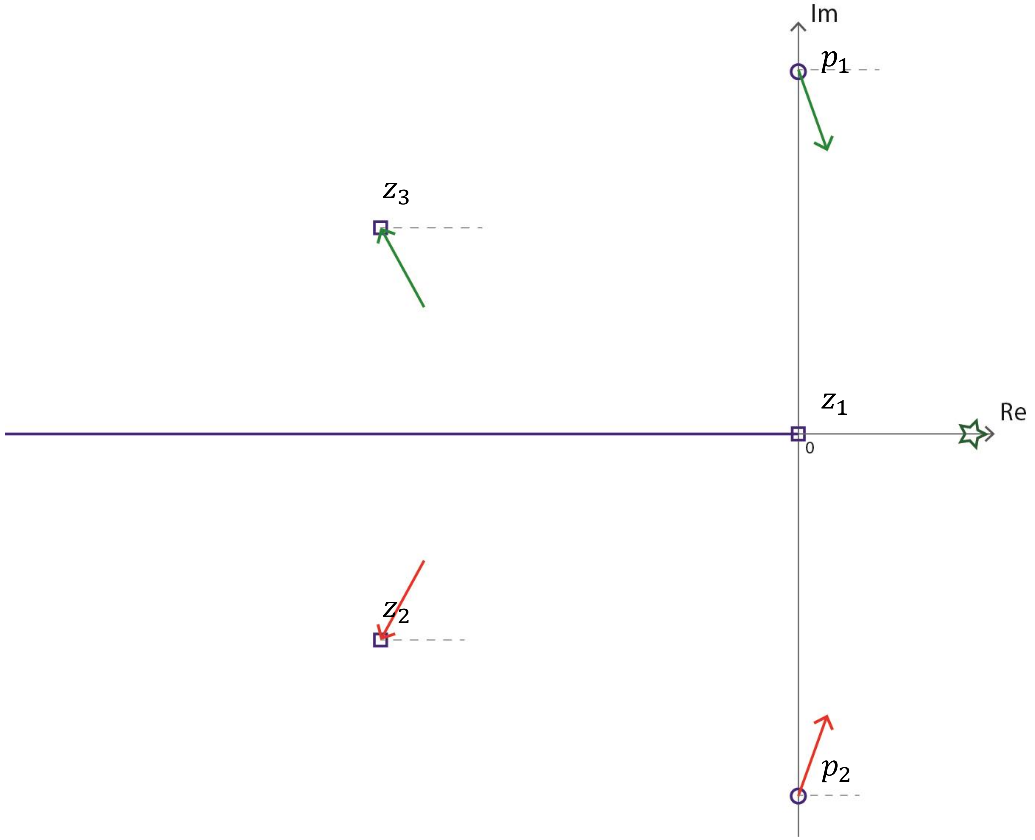
- $G'(s^*) = \frac{24s^4+28s^2+20s+4}{(2+4s^2)^2} = 0$

Sus raíces son

- $-0{,}313 \pm j0{,}130$
- $-0{,}313 \pm j0{,}1{,}16$

$$k = -\frac{1}{G(s^*)}$$

En este caso, $\nexists k \in R$ que cumpla. No hay puntos múltiples

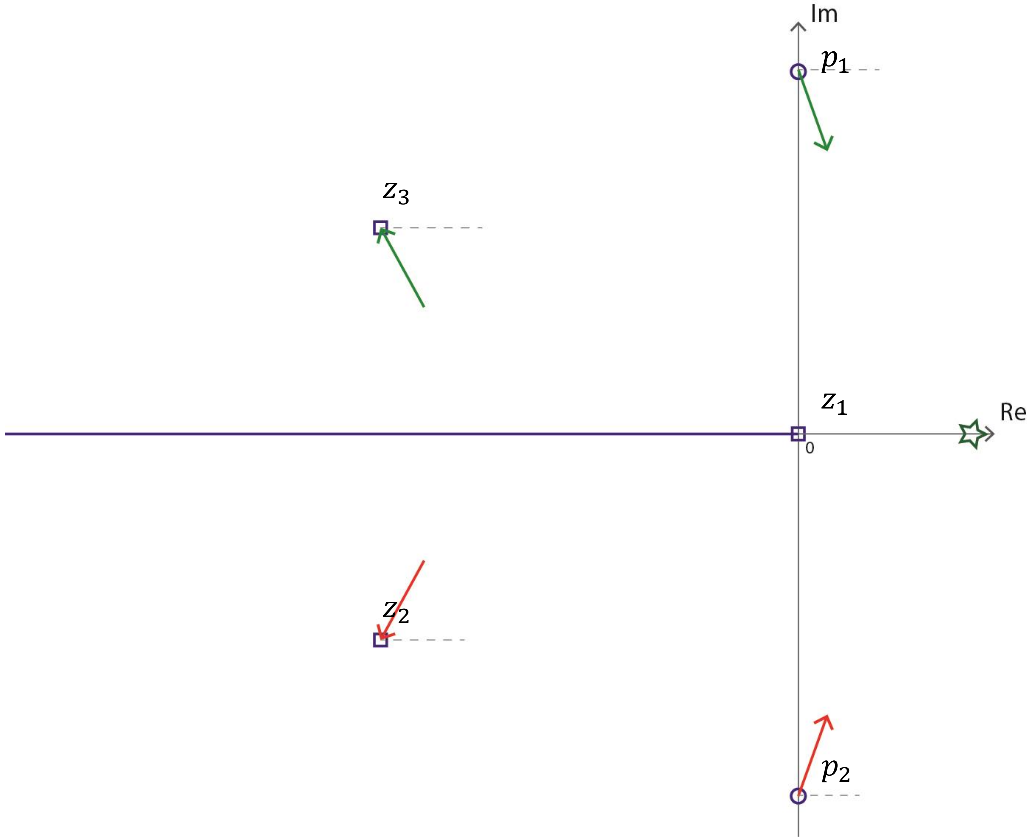


Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

Regla 6: Cortes con el eje imaginario

- Los cortes con el eje imaginario son, en definitiva, los puntos que determinan la estabilidad de $C_{CL}(s)$

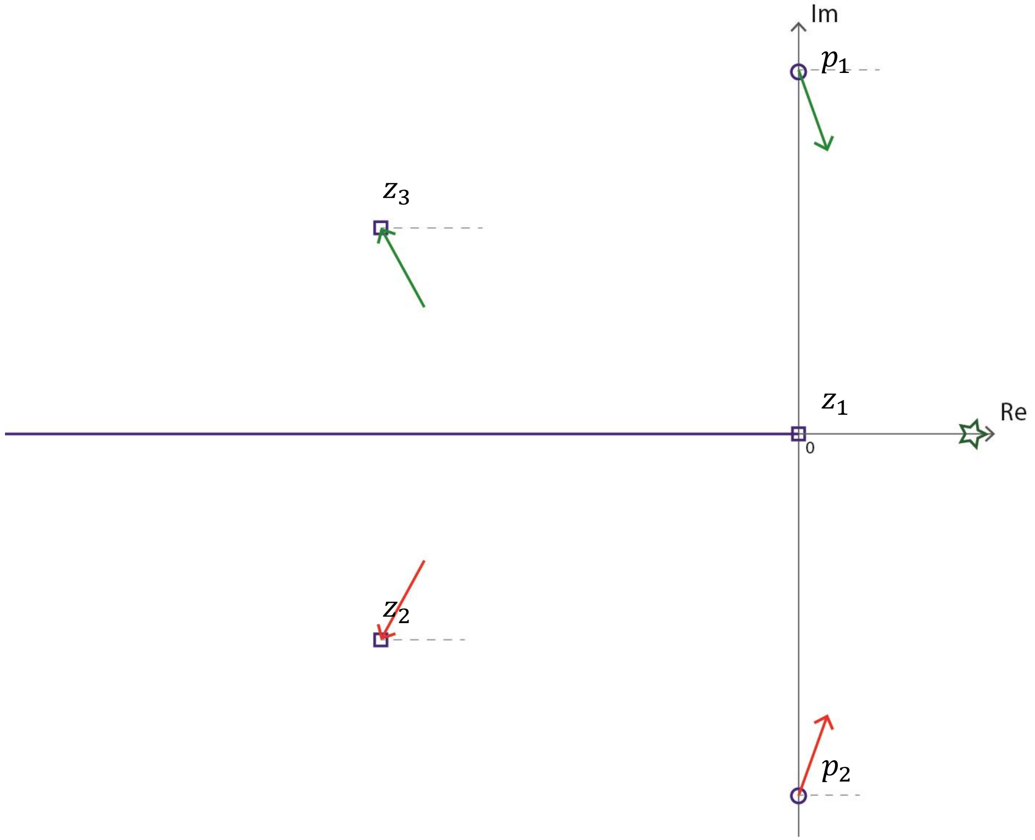


Hoja 7. Ejercicio 6

$$G_{OL}(s) = \frac{6s^3+5s^2+2s}{2+4s^2}$$

Regla 6: Cortes con el eje imaginario

- Los cortes con el eje imaginario son, en definitiva, los puntos que determinan la estabilidad de $C_{CL}(s)$
- En b) hallamos los K para los cuales el LGR corta el eje imaginario $\left(K = \frac{2}{5}\right)$



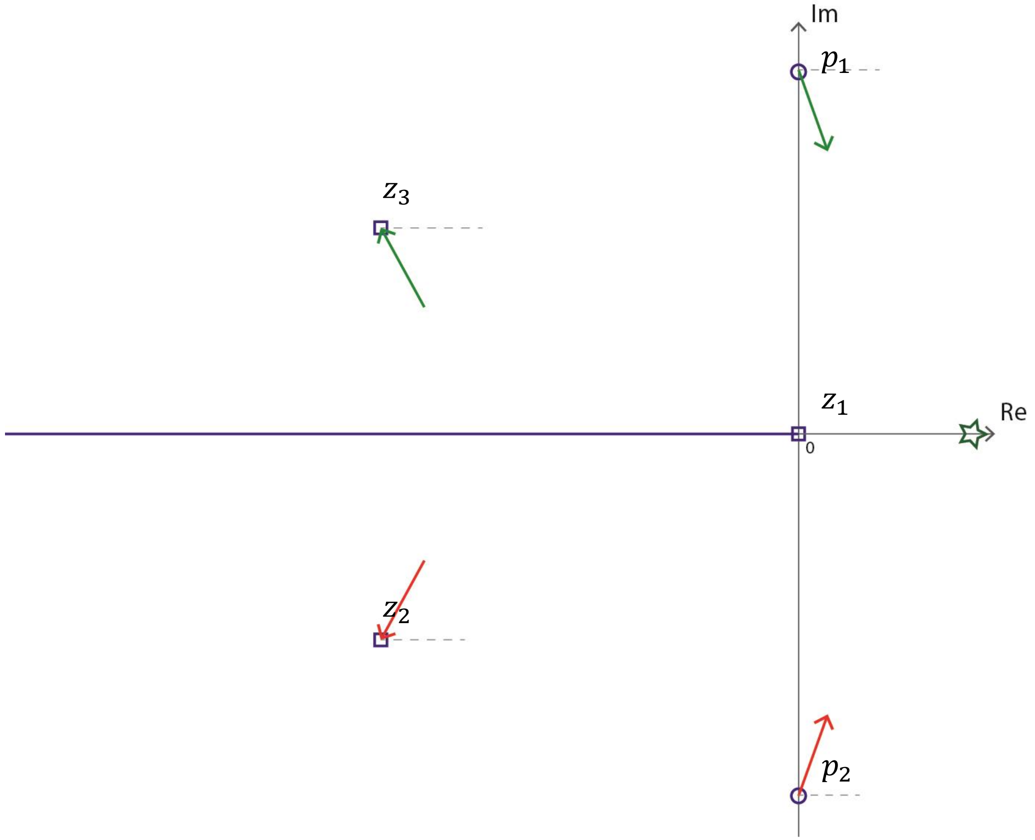
Hoja 7. Ejercicio 6

$G_{CL}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$

$q(s) = 6Ks^3 + (5K + 4).s^2 + 2ks + 2$

$q(s) = \frac{12}{5}s^3 + 6s^2 + \frac{4}{5}s + 2$

Por la forma del LGR, podemos suponer que $q(s)$ tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.



Hoja 7. Ejercicio 6

$G_{CL}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$

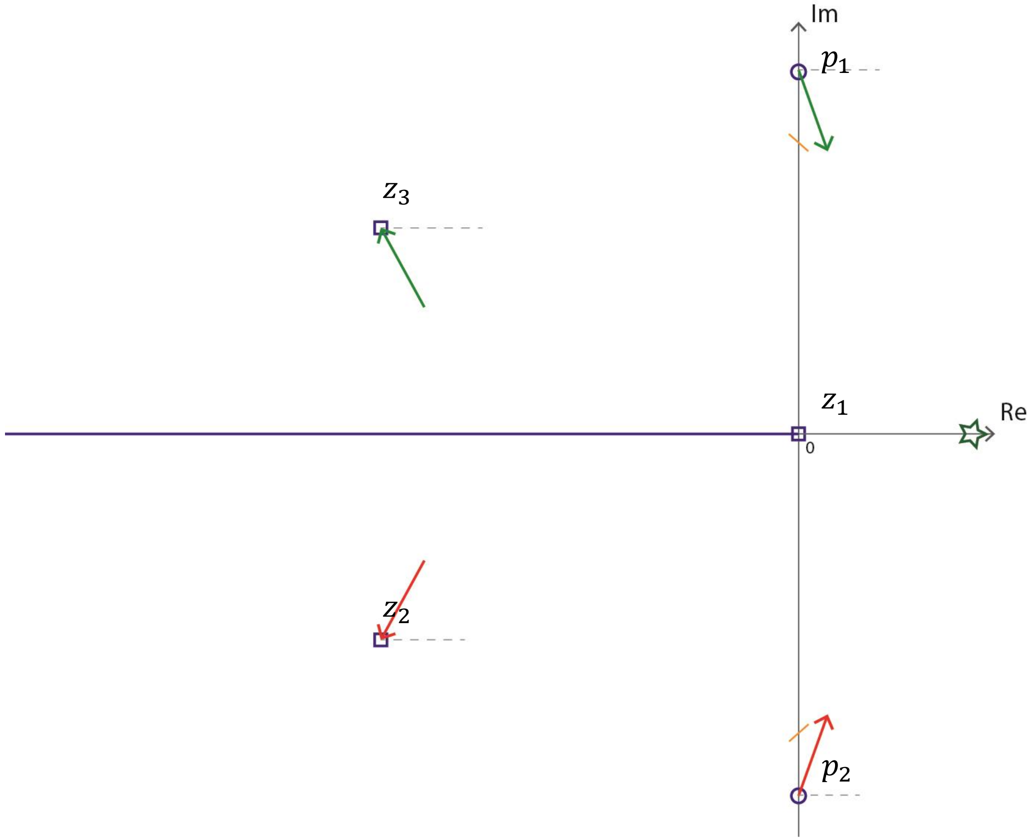
$q(s) = 6Ks^3 + (5K + 4).s^2 + 2ks + 2$

$q(s) = \frac{12}{5}s^3 + 6s^2 + \frac{4}{5}s + 2$

Por la forma del LGR, podemos suponer que $q(s)$ tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.

$(s^2 + \omega^2)(as + b) = \frac{12}{5}s^3 + 6s^2 + \frac{4}{5}s + 2$

$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$



Hoja 7. Ejercicio 6

Con todos estos datos, dibujamos el LGR más "verosímil"