Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 4.

Ejercicio 1. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & 3a-1 & a^2-a-4 \\ a & a^2 & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & a \\ 1 & a-3 & a-3 \\ 1 & 1 & a^2-15 \end{pmatrix}$$

1. Hallar el rango de A y B discutiendo según a .
2. En cada caso para aquel valor de a para el cual el rango de la matriz respectiva es 2 hallar un generador *minimal* (o sea un generador linealmente independiente) del espacio de columnas.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. $\text{rango}(A) \leq m$
2. $\text{rango}(A) \leq n$
3. $\text{rango}(A) = \min\{m, n\}$
4. A es invertible si y solo si $m = n$
5. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}, B, X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$:
   (a) El sistema $AX = B$ es compatible determinado si y solo si $\text{rango}(A) = n$.
   (b) Si $\text{rango}(A) < n$ el sistema $AX = B$ es incompatible.
   (c) Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B)$ entonces el sistema es compatible.
   (d) El sistema $AX = B$ es compatible indeterminado si y solo si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) < n$.

Ejercicio 3. Transformaciones elementales y matrices elementales
Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Hallar matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que $E_1A = B$, $E_2B = A$, $E_3A = C$ y $E_4C = A$.

Ejercicio 4. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

se le aplica el proceso de eliminación gaussiana. En el primer paso obtenemos

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Hallar una matriz M tal que $B = MA$.

2. Hallar una matriz N tal que $A = NB$.

Ejercicio 5. Sea A una matriz $m \times n$, y B una matriz que se obtiene intercambiando las filas de A. Mostrar que existe una matriz P de tamaño $m \times m$ tal que $B = PA$.

Ejercicio 6. Sea A una matriz cualquiera, y E una forma escalerizada de A. Mostrar que existen matrices cuadradas M y N tales que $E = MA$ y $A = NE$.

Ejercicio 7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Hallar las matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2 E_1 A = I$.
2. Hallar A^{-1}.
3. Expresar A como el producto de matrices elementales.