Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 10, CLASE 1

Transformada Z

- Transformación que convierte sucesiones reales en funciones de variable compleja
- Sea una sucesión $\{h_k\} = [h_0, h_1, h_2, \dots]$

$$\mathbb{Z}(\{h_k\}) = H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

Transformada Z

- Transformación que convierte sucesiones reales en funciones de variable compleja
- Sea una sucesión $\{h_k\} = [h_0, h_1, h_2, \dots]$

$$\mathbb{Z}(\{h_k\}) = H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

- Esta definición corresponde a la transformada Z unilateral
  - Corresponde al caso en el que $h_k = 0 \;\; \forall \, k < 0$
  - Este caso corresponde a sucesiones obtenidas mediante el muestreo de sistemas causales

Transformada Z

- Transformación que convierte sucesiones reales en funciones de variable compleja
- Sea una sucesión $\{h_k\} = [h_0, h_1, h_2, \ldots]$

$$\mathbb{Z}(\{h_k\}) = H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

- Esta definición corresponde a la transformada Z unilateral
  - Corresponde al caso en el que $h_k = 0 \;\; \forall\, k < 0$
  - Este caso corresponde a sucesiones obtenidas mediante el muestreo de sistemas causales
  - La relación entre sucesiones causales y transformadas Z es unívoca
    - No hay dos sucesiones causales distintas que tengan la misma transformada Z
    - No hay dos transformadas Z distintas que sean fruto de la misma sucesión causal

Transformada Z

- Transformación que convierte sucesiones reales en funciones de variable compleja
- Sea una sucesión $\{h_k\} = [h_0, h_1, h_2, \dots]$

$$\mathbb{Z}(\{h_k\}) = H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

- Esta definición corresponde a la transformada Z unilateral
  - Corresponde al caso en el que $h_k = 0 \ \forall\, k < 0$
  - Este caso corresponde a sucesiones obtenidas mediante el muestreo de sistemas causales
  - La relación entre sucesiones causales y transformadas Z es unívoca
    - No hay dos sucesiones causales distintas que tengan la misma transformada Z
    - No hay dos transformadas Z distintas que sean fruto de la misma sucesión causal
    - Esto no se cumple para transformada Z bilateral

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = 1$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n}$$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = 1$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = 1$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = 1$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Serie geométrica

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$\{u_n\} = 1$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Serie geométrica

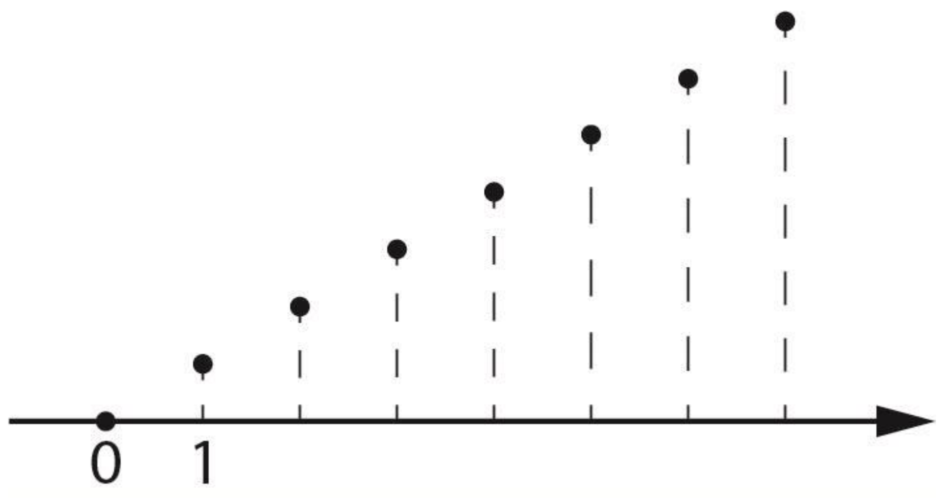
Convergente $\forall z \; tq \; |z| > 1$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n}$$

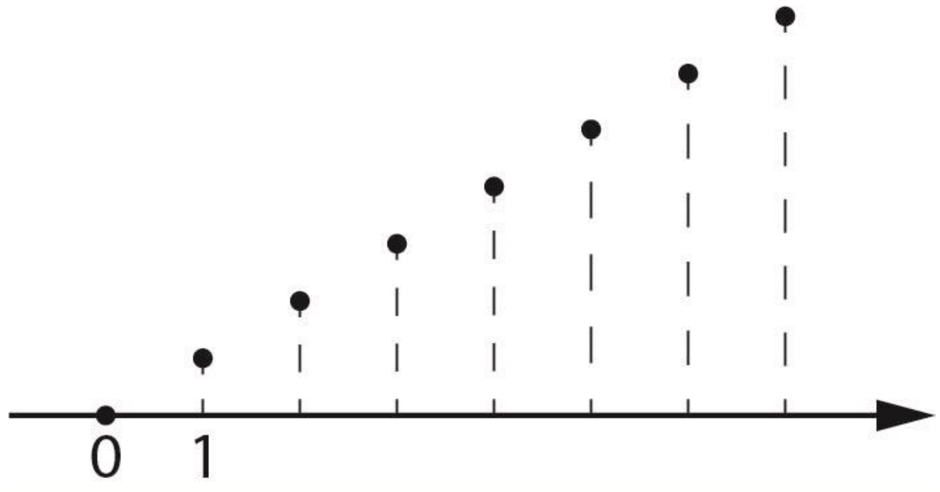


Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$



Ejercicio 1

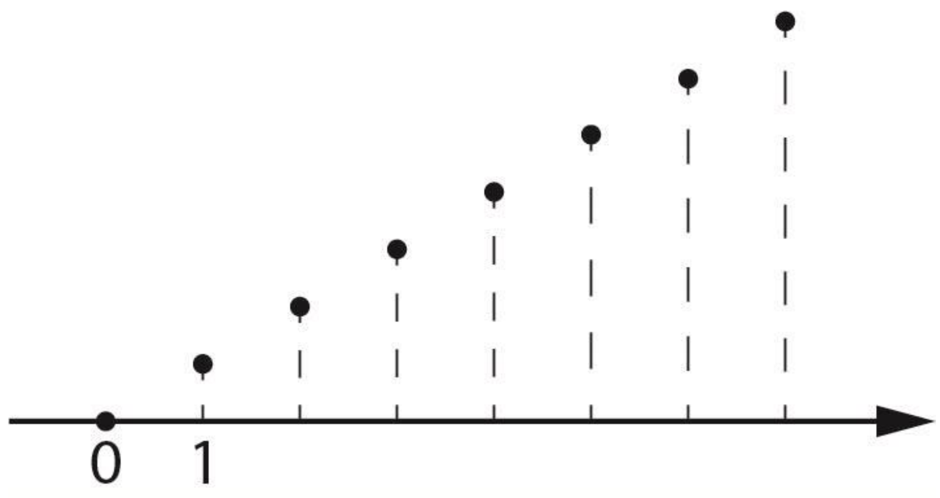
1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$

Propiedad de transformada Z – Diferenciación

$\mathbb{Z}(\{n . u_n\}) = -z \frac{d}{dz} X(z)$, donde $X(z) = \mathbb{Z}(\{u_n\})$



Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

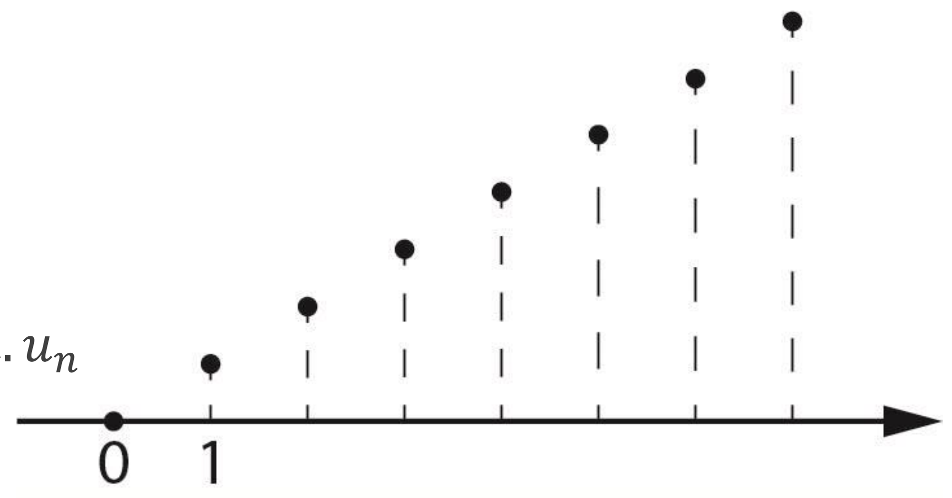
$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$

Propiedad de transformada Z – Diferenciación

$\mathbb{Z}(\{n . u_n\}) = -z \frac{d}{dz} X(z)$, donde $X(z) = \mathbb{Z}(\{u_n\})$

Si tomamos $u_n = 1$, tenemos que nuestra sucesión es $n . u_n$



Ejercicio 1

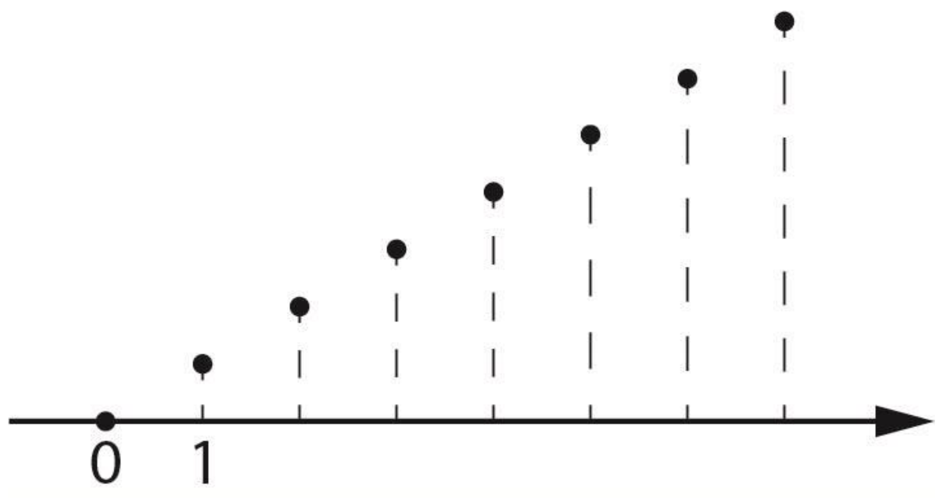
1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = -z.\frac{d}{dz}X(z)$$



Ejercicio 1

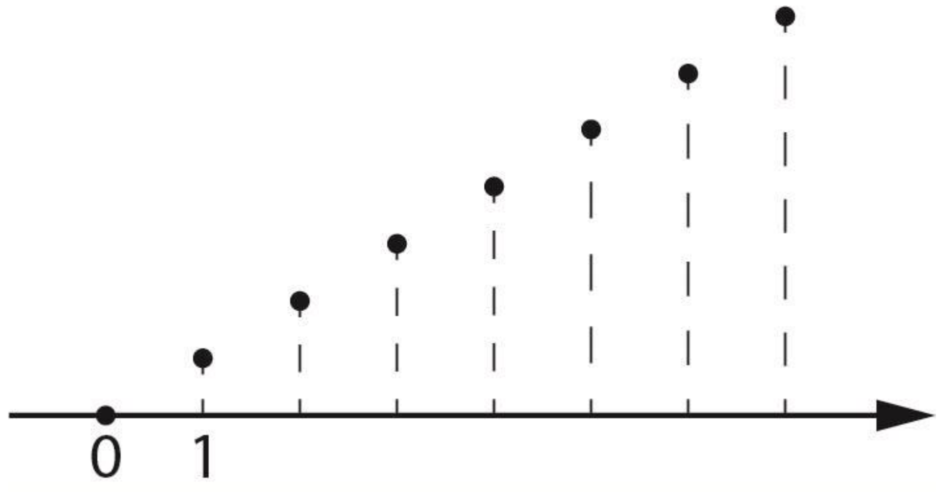
1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = -z.\frac{d}{dz}X(z) = -z.\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$



Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

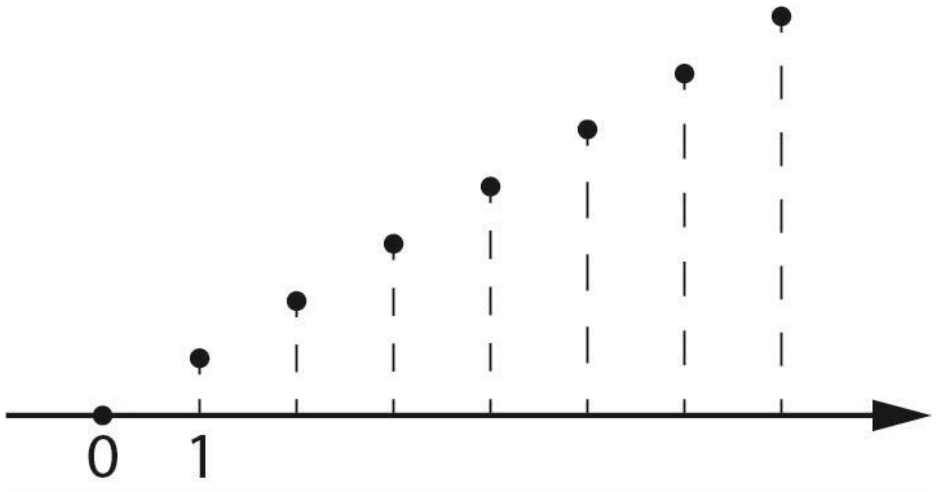
$\{u_n\} = n$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = -z.\frac{d}{dz}X(z) = -z.\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = -z.\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$



Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

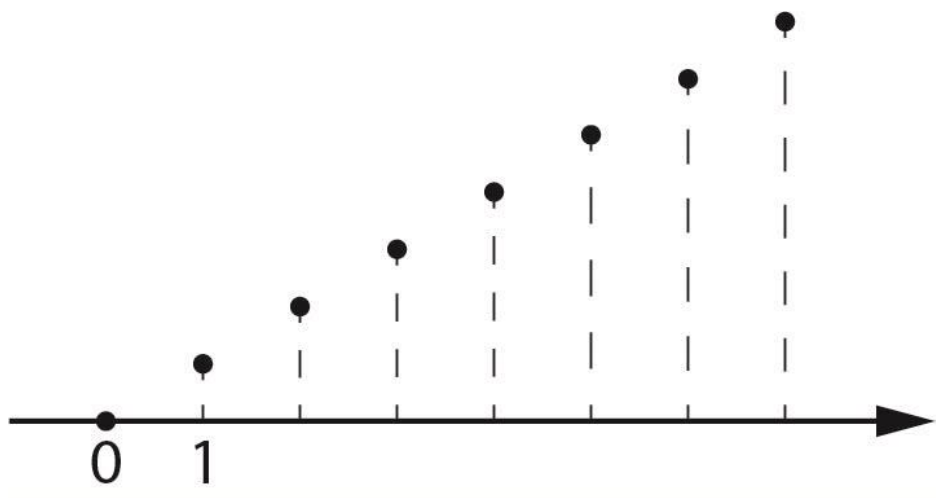
$$\{u_n\} = n$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n . z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = -z.\frac{d}{dz}X(z) = -z.\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = -z.\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$



Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} . z^{-n}$$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} . z^{-n}$$

Propiedad de transformada Z – Traslación compleja

$\mathbb{Z}(\{\gamma^n . u_n\}) = X(\gamma^{-1} z)$, donde $X(z) = \mathbb{Z}(\{u_n\})$

Si tomamos $x_n = 1$, tenemos que nuestra sucesión puede expresarse como $u_n = \gamma^n . x_n$, con $\gamma = \frac{1}{2}$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} . z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de traslación compleja

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = \mathbb{Z}(\{\gamma^n . x_n\}) = X(\gamma^{-1} z)$$

Ejercicio 1

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

$$\{u_n\} = \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} . z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de traslación compleja

$$\mathbb{Z}(\{u_n\}) = \mathbb{Z}(\{\gamma^n . x_n\}) = X(\gamma^{-1}z) = \frac{\gamma^{-1}z}{\gamma^{-1}z - 1} = \frac{z}{z-\gamma}$$

Ejercicio 2a

2) La transformada Z de una sucesión $\mathbf{h_k}$ es:

$$\mathbf{H(z) = \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9}}$$

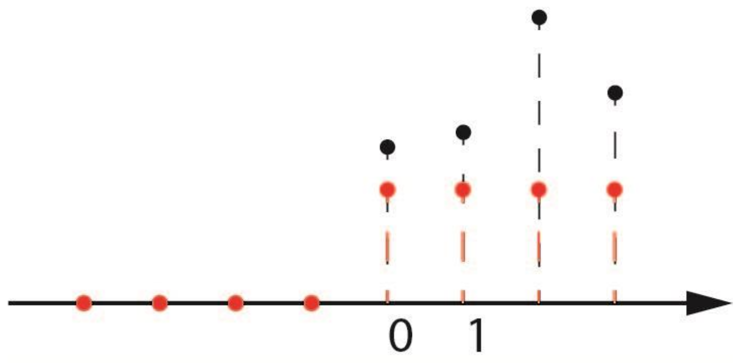
a) Hallar la transformada Z de la sucesión $\mathbf{h_{k-3}.u_{k-3}}$ (donde u_k es el escalón unitario).

b) Hallar la transformada Z de la sucesión $\mathbf{h_{k+1}.u_k}$

Ejercicio 2a

Por defecto, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

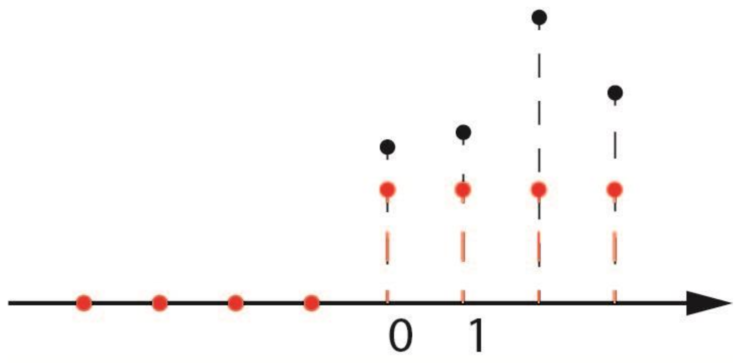
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$



Ejercicio 2a

Por defecto, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

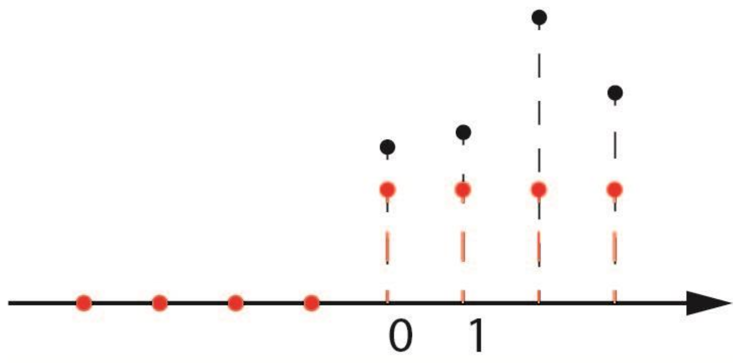
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- La sucesión $\mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$ es causal ($\{h_k u_k\} = 0 \forall k < 0$)
  - Podemos aplicar la propiedad de retraso



Ejercicio 2a

Por defecto, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

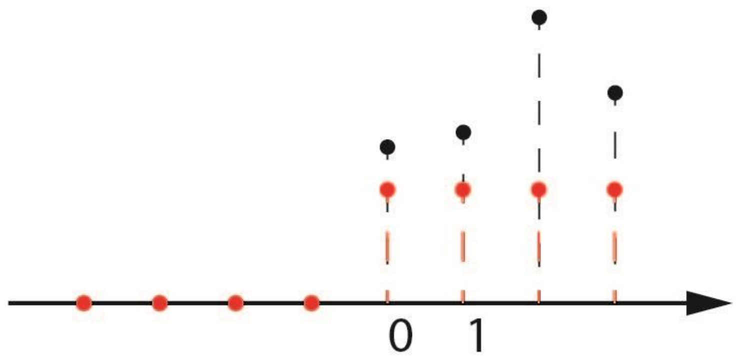
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- La sucesión $\mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$ es causal ($\{h_k u_k\} = 0 \forall k < 0$)
  - Podemos aplicar la propiedad de retraso
- Propiedad de retraso. Sea $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z)$
  - $\mathbb{Z}[\{h_{k-n}\}] = z^{-n} H(z)$



Ejercicio 2a

Por defecto, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

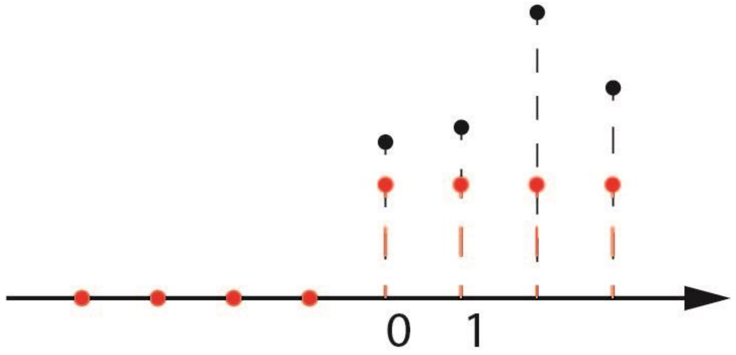
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- La sucesión $\mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$ es causal ($\{h_k u_k\} = 0 \forall k < 0$)
  - Podemos aplicar la propiedad de retraso
- Propiedad de retraso. Sea $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z)$
  - $\mathbb{Z}[\{h_{k-n}\}] = z^{-n} H(z)$
- Si aplicamos la propiedad de retraso a la sucesión $\{h_k u_k\}$
- $\mathbb{Z}[\{h_{k-3} u_{k-3}\}] = z^{-3} \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}] = \frac{1}{z^3-3z^2+5z-9}$



Ejercicio 2b

Nuevamente, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

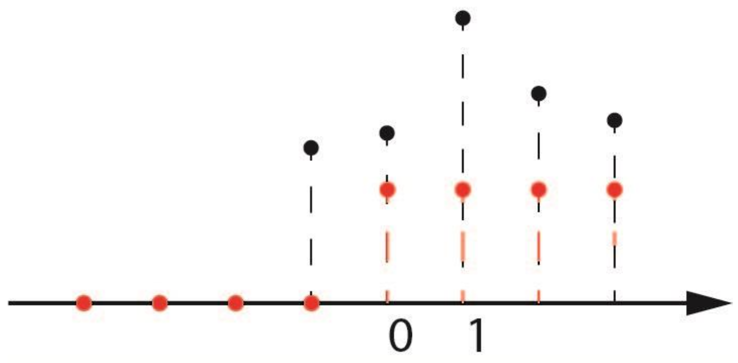
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$



Ejercicio 2b

Nuevamente, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

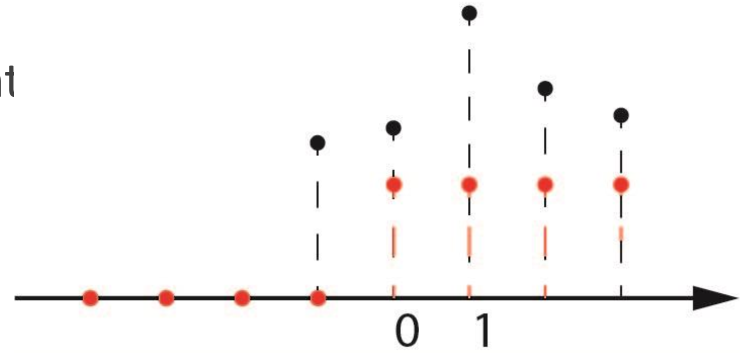
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- $\mathbb{Z}\left[\{h_{k+1}u_k\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- $\mathbb{Z}\left[\{h_{k+1}u_{k+1}\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$



Ejercicio 2b

Nuevamente, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

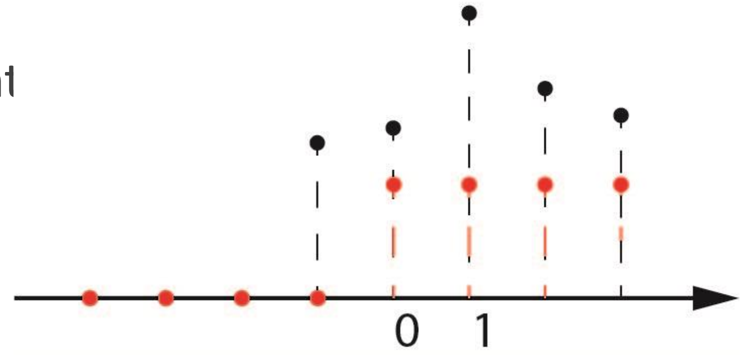
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- $\mathbb{Z}\,[\{h_{k+1}u_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- $\mathbb{Z}\,[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- En estas condiciones, podemos aplicar la propiedad de adelant



Ejercicio 2b

Nuevamente, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

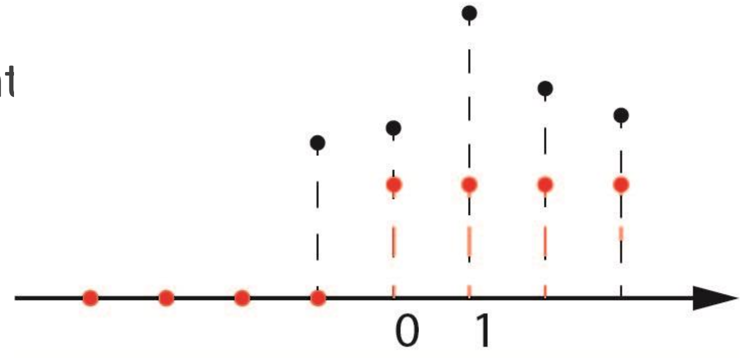
- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- $\mathbb{Z}\,[\{h_{k+1}u_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- $\mathbb{Z}\,[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- En estas condiciones, podemos aplicar la propiedad de adelant
  - Propiedad de adelanto. Sea $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z)$
    - $\mathbb{Z}[\{h_{k+n}\}] = z^n\left[H(z) + \sum_{j=0}^{n-1} h_j z^{-j}\right]$



Ejercicio 2b

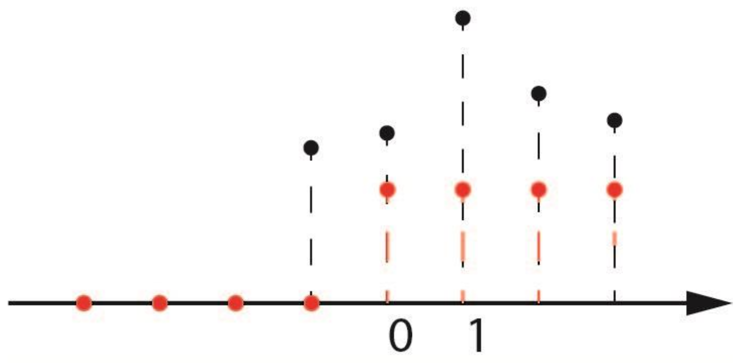
Nuevamente, $H(z)$ es la transformación de una sucesión causal

- $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \mathbb{Z}[\{h_k u_k\}]$
- $\mathbb{Z}\left[\{h_{k+1}u_k\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- $\mathbb{Z}\left[\{h_{k+1}u_{k+1}\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}u_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\, h_{k+1}$
- En estas condiciones, podemos aplicar la propiedad de adelant
  - Propiedad de adelanto. Sea $\mathbb{Z}[\{h_k\}] = H(z)$
    - $\mathbb{Z}[\{h_{k+n}\}] = z^n\left[H(z) + \sum_{j=0}^{n-1} h_j z^{-j}\right]$
  - Aplicando la propiedad de adelanto
    - $\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \mathrm{z}(H(z) + h_0.u_o)$



Ejercicio 2b

- $\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \mathrm{z}(H(z) + h_0 . u_o)$
  - Sabemos que $u_o = 1$
  - Cómo podemos averiguar h_0?

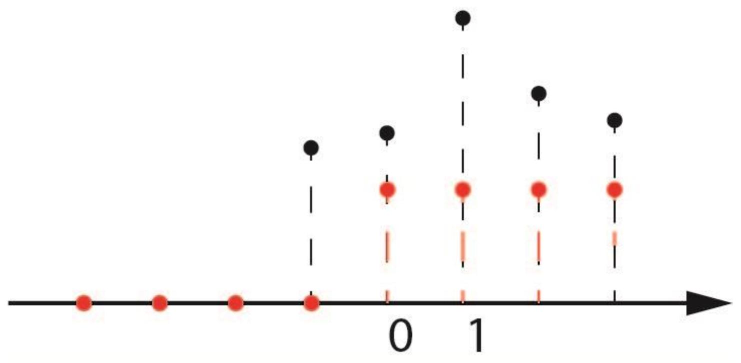


Ejercicio 2b

- $\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \mathrm{z}(H(z) + h_0.u_o)$
  - Sabemos que $u_o = 1$
  - Cómo podemos averiguar h_0?

- Teorema del valor inicial

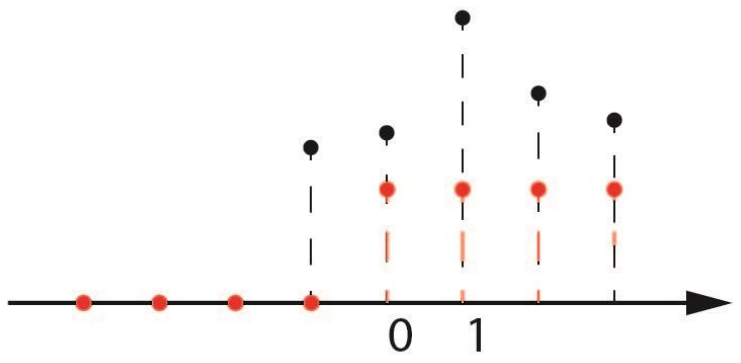
$$h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z)$$



Ejercicio 2b

- $\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \mathrm{z}(H(z) + h_0.u_o)$
  - Sabemos que $u_o = 1$
  - Cómo podemos averiguar h_0?
- Teorema del valor inicial

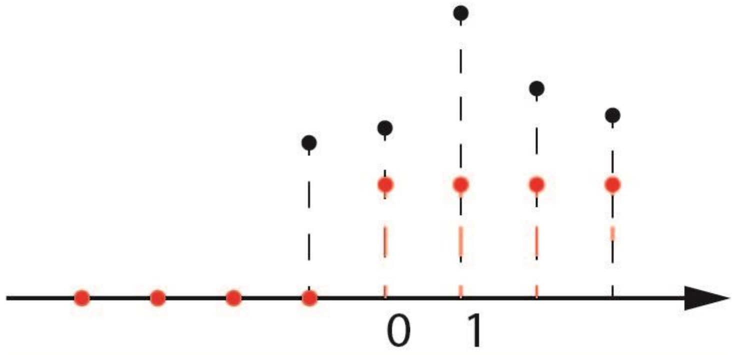
$$h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9}$$



Ejercicio 2b

- $\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \text{z}(H(z) + h_0.u_o)$
  - Sabemos que $u_o = 1$
  - Cómo podemos averiguar h_0?
- Teorema del valor inicial

$$h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} = 1$$



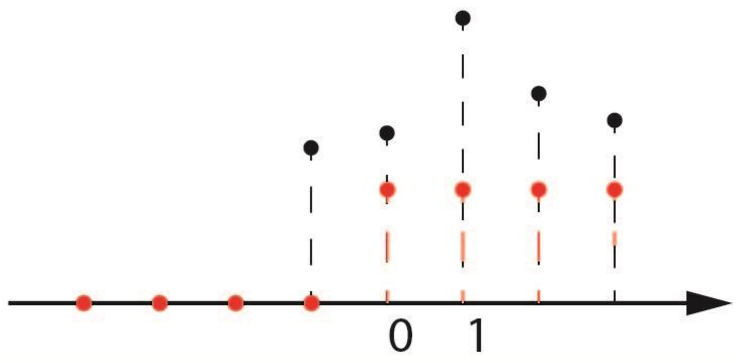
Ejercicio 2b

- $\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_{k+1}\}] = \mathrm{z}(H(z) + h_0.u_o)$
  - Sabemos que $u_o = 1$
  - Cómo podemos averiguar h_0?

- Teorema del valor inicial

$$h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} = 1$$

$$\mathbb{Z}[\{h_{k+1}u_k\}] = \mathrm{z}(H(z) + 1) = \frac{\mathrm{z}(3z^2 - 5z + 9)}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9}$$



Ejercicio 3

3) Hallar las sucesiones cuyas transformadas Z son las siguientes:

$$a)\ H(z) = \frac{0,5.z}{(z-1)(z-0,6)} \qquad b)\ H(z) = \frac{0,5.(z+1)}{(z-1)(z-0,6)}$$

$$c)\ H(z) = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,6)} \qquad d)\ H(z) = \frac{z.(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}$$

$$e)\ H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1} \qquad f)\ H(z) = \frac{0,5.(z+1)}{z^2 - 2.z + 4}$$

Ejercicio 3a

$$H(z) = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Ejercicio 3a

$$H(z) = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} \rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Aplicando fracciones simples

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0{,}6}\right)$$

Ejercicio 3a

$$H(z) = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} \rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Aplicando fracciones simples

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0{,}6}\right)$$

$$H(z) = \frac{5}{4}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}6}\right)$$

Ejercicio 3a

$$H(z)=\frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}\rightarrow\frac{H(z)}{z}=\frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Aplicando fracciones simples

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-0{,}6}\right)$$

$$H(z)=\frac{5}{4}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}6}\right)\rightarrow\mathbb{Z}^{-1}(H(z))=$$

Ejercicio 3a

$$H(z) = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} \rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Aplicando fracciones simples

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0{,}6}\right)$$

$$H(z) = \frac{5}{4}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}6}\right) \rightarrow \mathbb{Z}^{-1}(H(z)) = \frac{5}{4}u_k$$

Ver ejercicio 1.1

Ejercicio 3a

$$H(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,6)} \rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,6)}$$

Aplicando fracciones simples

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,6}\right)$$

$$H(z) = \frac{5}{4}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,6}\right) \rightarrow \mathbb{Z}^{-1}(H(z)) = \frac{5}{4}u_k - \frac{5}{4}.\,0,6^k u_k$$

Ver ejercicio 1.3

Ejercicio 3b

$H(z) = \frac{0,5(z+1)}{(z-1)(z-0,6)}$

Ejercicio 3b

$$H(z) = \frac{0{,}5(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} + \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Ejercicio 3b

$$H(z) = \frac{0{,}5(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} + \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Calculamos su anti transformada en el ejercicio anterior

Ejercicio 3b

$$H(z) = \frac{0{,}5(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} + \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Sea $\mathbb{Z}(\{h'_k\}) = H'(z) = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$. Aplicando la propiedad de atraso,

- $\mathbb{Z}(\{h'_{k-1}\}) = \mathrm{z}^{-1}H'^{(z)} = \mathrm{z}^{-1}.\frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$

Ejercicio 3b

$$H(z) = \frac{0,5(z+1)}{(z-1)(z-0,6)} = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,6)} + \frac{0,5}{(z-1)(z-0,6)}$$

Sea $\mathbb{Z}(\{h'_k\}) = H'(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,6)}$. Aplicando la propiedad de atraso,

- $\mathbb{Z}(\{h'_{k-1}\}) = \mathrm{z}^{-1}H'^{(z)} = \mathrm{z}^{-1}.\frac{0,5z}{(z-1)(z-0,6)}$
- La anti transformada de este término corresponde a la anti transformada del ejercicio anterior atrasada una posición

Ejercicio 3b

$$H(z) = \frac{0{,}5(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)} + \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{5}{4}\left([1-0{,}6^{k}]u_k + [1-0{,}6^{k-1}]u_{k-1}\right)$$

Linealidad

Sea $\mathbb{Z}(\{h'_k\}) = H'(z) = \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$. Aplicando la propiedad de atraso,

- $\mathbb{Z}(\{h'_{k-1}\}) = \mathrm{z}^{-1}H'^{(z)} = \mathrm{z}^{-1}.\frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$
- La anti transformada de este término corresponde a la anti transformada del ejercicio anterior atrasada una posición

Ejercicio 3c

$$H(z) = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Ejercicio 3c

$$H(z) = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{0{,}5(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)} - \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Si bien ya calculamos esta anti transformada utilizando la propiedad de atraso, podemos aplicar nuevamente la propiedad de linealidad

Ejercicio 3c

$$H(z) = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,6)} = \frac{0,5(z+1)}{(z-1)(z-0,6)} - \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,6)}$$

$H(z)$ de la parte a)

$H(z)$ de la parte b)

Ejercicio 3c

$$H(z) = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)} = \frac{0{,}5(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)} - \frac{0{,}5z}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

$H(z)$ de la parte a)

$H(z)$ de la parte b)

$$h_k = \frac{5}{4}\left([1-0{,}6^k]u_k + [1-0{,}6^{k-1}]u_{k-1}\right) - \frac{5}{4}\left([1-0{,}6^k]u_k\right)$$

Ejercicio 3c

$$H(z) = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,6)} = \frac{0,5(z+1)}{(z-1)(z-0,6)} - \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,6)}$$

$H(z)$ de la parte a)

$H(z)$ de la parte b)

$$h_k = \frac{5}{4}\left([1 - 0,6^k]u_k + [1 - 0,6^{k-1}]u_{k-1}\right) - \frac{5}{4}\left([1 - 0,6^k]u_k\right)$$

$$h_k = \frac{5}{4}\left([1 - 0,6^{k-1}]u_{k-1}\right)$$

Ejercicio 3d

$$H(z) = \frac{z(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}$$

Ejercicio 3d

$$H(z) = \frac{z(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}\right]$$

Ejercicio 3d

$$H(z) = \frac{z(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}\right]$$

- Sea $H'(z) = \frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}$. A partir de los resultados del ejercicio 3b, y aplicando linealidad

Ejercicio 3d

$$H(z) = \frac{z(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}\right]$$

- Sea $H'(z) = \frac{(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}$. A partir de los resultados del ejercicio 3b, y aplicando linealidad
- $h'_k = \mathbb{Z}^{-1}\big(H'(z)\big) = \frac{5}{2}[1 - 0,6^k]u_k + \frac{7}{4}[1 - 0,6^{k-1}]u_{k-1}$

Ejercicio 3d

$H(z) = \frac{z(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}\right]$

- Sea $H'(z) = \frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}$. A partir de los resultados del ejercicio 3b, y aplicando linealidad
- $h'_k = \mathbb{Z}^{-1}\big(H'(z)\big) = \frac{5}{2}[1 - 0{,}6^k]u_k + \frac{7}{4}[1 - 0{,}6^{k-1}]u_{k-1}$
- Aplicando la propiedad de adelanto
- $\mathbb{Z}\big(H'(z+1)\big) = z(H'(z) + h_0)$

Ejercicio 3d

$H(z) = \frac{z(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}\right]$

- Sea $H'(z) = \frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}$. A partir de los resultados del ejercicio 3b, y aplicando linealidad
- $h'_k = \mathbb{Z}^{-1}\left(H'(z)\right) = \frac{5}{2}[1 - 0{,}6^k]u_k + \frac{7}{4}[1 - 0{,}6^{k-1}]u_{k-1}$
- Aplicando la propiedad de adelanto
- $\mathbb{Z}\left(H'(z+1)\right) = z(H'(z) + h_0)$

TVI : $h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = 0$

Ejercicio 3d

$$H(z) = \frac{z(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}\right]$$

- Sea $H'(z) = \frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}$. A partir de los resultados del ejercicio 3b, y aplicando linealidad
- $h'_k = \mathbb{Z}^{-1}\big(H'(z)\big) = \frac{5}{2}[1-0{,}6^k]u_k + \frac{7}{4}[1-0{,}6^{k-1}]u_{k-1}$
- Aplicando la propiedad de adelanto
- $\mathbb{Z}\big(H'(z+1)\big) = z(H'(z) + h_0) = zH'(z) = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)}\right]$

TVI : $h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{(z-0{,}7)}{(z-1)(z-0{,}6)} = 0$

Ejercicio 3d

$H(z) = \frac{z(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)} = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}\right]$

- Sea $H'(z) = \frac{(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}$. A partir de los resultados del ejercicio 3b, y aplicando linealidad
- $h'_k = \mathbb{Z}^{-1}\big(H'(z)\big) = \frac{5}{2}[1 - 0,6^k]u_k + \frac{7}{4}[1 - 0,6^{k-1}]u_{k-1}$
- Aplicando la propiedad de adelanto
- $\mathbb{Z}\big(H'(z+1)\big) = z(H'(z) + h_0) = zH'(z) = \mathrm{z}\left[\frac{(z-0,7)}{(z-1)(z-0,6)}\right]$
- $h_k = \mathbb{Z}\big(H(z)\big) = \frac{5}{2}[1 - 0,6^{k+1}]u_{k+1} + \frac{7}{4}[1 - 0,6^k]u_k$

Ejercicio 3e

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$$

Ejercicio 3e

$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$

Polos complejos conjugados en $\left\{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Ejercicio 3e

$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$

Polos complejos conjugados en $\left\{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$|p| = 1 \rightarrow$ Recordemos que la transformada Z mapea el eje imaginario de la transformada de Laplace en el círculo unidad

Ejercicio 3e

$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$

Polos complejos conjugados en $\left\{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$|p| = 1 \rightarrow$ Recordemos que la transformada Z mapea el eje imaginario de la transformada de Laplace en el círculo unidad. A que señal corresponde $H(z)$?

Ejercicio 3e

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$$

Utilizando una tabla de equivalencias

8	$t^2 e^{-at}$	$(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2 e^{-aT} z(z + e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^3}$
9	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2 + b^2}$	$\frac{z sin(bT)}{z^2 - 2z cos(bT) + 1}$
10	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2 + b^2}$	$\frac{z^2 - z cos(bT)}{z^2 - 2z cos(bT) + 1}$
11	$e^{-at} sin(bt)$	$e^{-akT} sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2 + b^2}$	$\frac{z e^{-aT} sinbT}{z^2 - 2z e^{-aT} cosbT + e^{-2aT}}$

Ejercicio 3e

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1} = z.\frac{\sin(bT)}{z^2 - 2z\cos(bT) + 1}$$

Utilizando una tabla de equivalencias

8	$t^2 e^{-at}$	$(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2 e^{-aT} z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$\sin(bt)$	$\sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z\sin(bT)}{z^2 - 2z\cos(bT) + 1}$
10	$\cos(bt)$	$\cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2 - z\cos(bT)}{z^2 - 2z\cos(bT) + 1}$
11	$e^{-at}\sin(bt)$	$e^{-akT}\sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos bT + e^{-2aT}}$

Ejercicio 3e

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1} = z.\frac{\sin(bT)}{z^2 - 2z\cos(bT) + 1}$$

$$\cos(bT) = \frac{1}{2} \rightarrow bT = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi$$

Utilizando una tabla de equivalencias

8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$\sin(bt)$	$\sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z\sin(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
10	$\cos(bt)$	$\cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-z\cos(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
11	$e^{-at}\sin(bt)$	$e^{-akT}\sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

Ejercicio 3e

$$H(z)=\frac{z}{z^2-z+1}=z.\frac{\sin(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$$

$$\sin(bT)=\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(bT)=\frac{1}{2}\rightarrow bT=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\pi$$

Utilizando una tabla de equivalencias

8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$\sin(bt)$	$\sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z\sin(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
10	$\cos(bt)$	$\cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-z\cos(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
11	$e^{-at}\sin(bt)$	$e^{-akT}\sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

Ejercicio 3e

$$H(z) = \frac{z}{z^2-z+1} = z.\frac{\sin(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$$

$$\sin(bT) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(bT) = \frac{1}{2} \rightarrow bT = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi$$

Utilizando una tabla de equivalencias

8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{zsin(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
10	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-zcos(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
11	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}sinbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$

Ejercicio 3e

$$h_k = \mathbb{Z}\big(H(z)\big) = \sin(bT)\,.\sin(\mathrm{bT.k}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)$$

$$\sin(bT) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$bT = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi$$

Utilizando una tabla de equivalencias

8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$\sin(bt)$	$\sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z\sin(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
10	$\cos(bt)$	$\cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-z\cos(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
11	$e^{-at}\sin(bt)$	$e^{-akT}\sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

Ejercicio 3f

$H(z) = \frac{0,5(z+1)}{z^2-z+1}$. Que propiedades podemos utilizar para calcular esta sucesión?