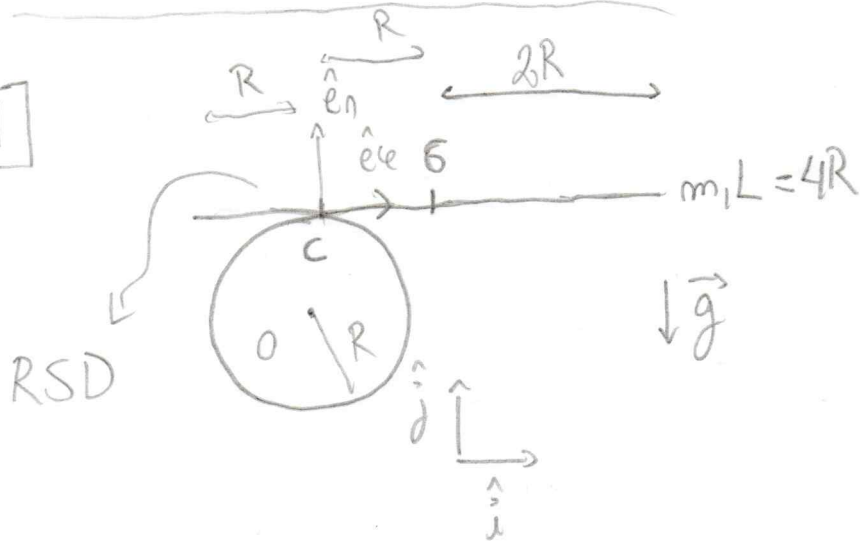


# Problemas de clase. Práctico 6

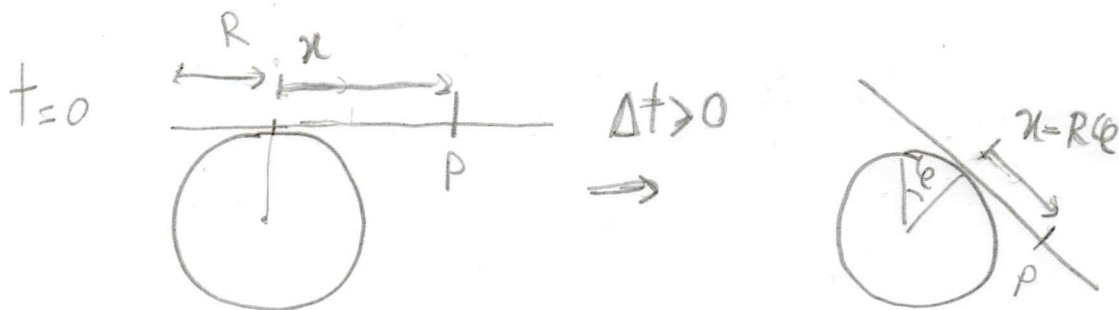
1



a) Hallar  $\vec{v}_0$

I) Derivando

Vamos primero a hallar la velocidad de un punto genérico de la barra.



$$\vec{r}_p = R \hat{e}_n + x \hat{e}_\epsilon - R \epsilon \hat{e}_\epsilon \quad (x: \text{Cantidad fija que da la pos. dentro de la barra})$$

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = R \dot{\epsilon} \hat{e}_\epsilon + x \dot{\epsilon} (-\hat{e}_n) - R \dot{\epsilon} \hat{e}_\epsilon + R \epsilon \dot{\epsilon} \hat{e}_n$$

$$= \boxed{\dot{\epsilon} (R\epsilon - x) \hat{e}_n}$$

Podemos destacar tres casos:  $\cdot) x = 0$ , el punto de la barra que está inicialmente en contacto con el disco

$\cdot) x = R$ , el centro de masas

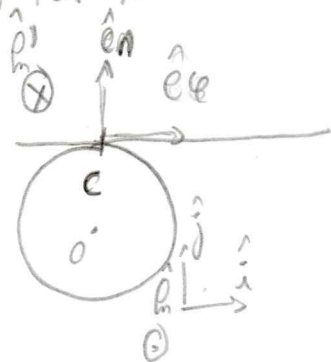
$\cdot) x = R\epsilon$ , el punto de la barra que está en contacto con el disco instantáneamente, para cada  $\epsilon$ .

abs. En este último caso  $\vec{v}_p = 0$  para todo instante (RSD).

Para el CM de la barra,  $x=R$

$$\vec{v}_G = R\dot{\varphi}(\varphi-1)\hat{e}_n$$

II) Por Roverbal



- sistema fijo: S

$$S: O, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$$

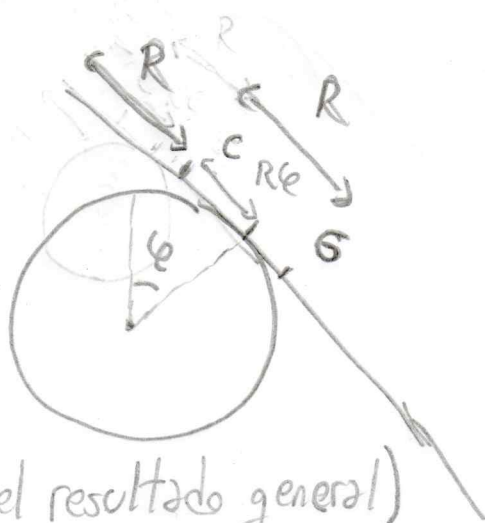
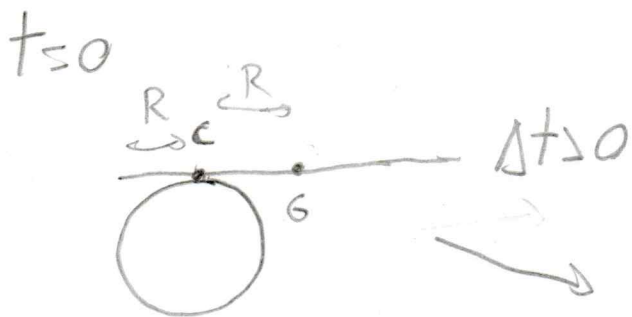
$$S': C, \{\hat{e}_n, \hat{e}_t, \hat{e}_m\}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{k} = -\dot{\varphi}\hat{m}$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (G-C) + \vec{v}_G'$$

Vamos a ver tres elecciones posibles de C

- C como punto material fijo: El punto de la barra inicialmente en contacto con el disco.



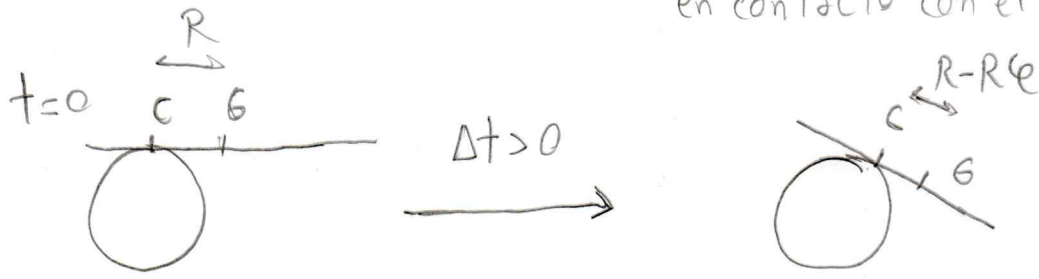
$$\vec{v}_C = R\dot{\varphi}\hat{e}_n \quad (x=0 \text{ en el resultado general})$$

$$G-C = R\hat{e}_t \quad (\text{distancia fija})$$

$\vec{v}' = 0$  ( $S'$  es solidario a la barra, su CM está quieto en dicho sistema de ref.)

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (G-C) = R\dot{\varphi}\hat{e}_n + (-\dot{\varphi}\hat{m}) \times R\hat{e}_t = R\dot{\varphi}(\varphi-1)\hat{e}_n$$

- C como punto material instantáneo: El punto de la barra instantáneamente en contacto con el disco.



$$\vec{V}_C = 0 \quad (\text{RSD, } \kappa = R\dot{\epsilon} \text{ en el resultado general)}$$

$$G - C = (R - R\epsilon)\hat{e}_\epsilon$$

$$\vec{V}' = 0 \quad (S' \text{ es solidario a la barra)}$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times (G - C) = \vec{0} + (\dot{\epsilon})\hat{e}_n \times (R - R\epsilon)\hat{e}_\epsilon = \boxed{R\dot{\epsilon}(\epsilon - 1)\hat{e}_n}$$

- C como punto geométrico: El punto de contacto entre el disco y la barra.

$$\vec{V}_C = R\dot{\epsilon}\hat{e}_\epsilon : \text{ Como punto geométrico, } C \text{ está haciendo un movimiento circular}$$



$$G - C = (R - R\epsilon)\hat{e}_\epsilon \quad (\text{La distancia es igual al caso anterior})$$

$$\vec{V}' = -R\dot{\epsilon}\hat{e}_\epsilon : \text{ El punto geométrico } C \text{ na es un punto del rígido. Visto desde la barra, } C \text{ se está moviendo a lo largo de la misma con una velocidad } R\dot{\epsilon}.$$

Entonces, desde un sist. de ref. con origen en C y ejes  $(\hat{e}_n, \hat{e}_\epsilon, \hat{e}_t)$ , el CM de la barra se está moviendo con la velocidad opuesta.

$$\begin{aligned} \vec{V}_G &= \vec{V}_C + \vec{\omega} \times (G - C) + \vec{V}' = R\dot{\epsilon}\hat{e}_\epsilon + (\dot{\epsilon})\hat{e}_n \times (R - R\epsilon)\hat{e}_\epsilon - R\dot{\epsilon}\hat{e}_\epsilon \\ &= \boxed{R\dot{\epsilon}(\epsilon - 1)\hat{e}_n} \end{aligned}$$

b) Hallar ec. de mov.

I) Por energía

La energía se conserva (El peso es conservativo, las reacciones no trabajan por haber RSDL)

→  $\frac{dE}{dt} = 0$  o equivalentemente  $E = E_0$  da la ecuación de movimiento.

$$E = T + U \quad T = \frac{1}{2} m (\vec{v}_Q)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_Q \vec{\omega}) + m \vec{N}_Q \cdot (\vec{\omega} \times (\mathbf{s} - \mathbf{a}))$$

Siendo Q un punto cualquiera del rígido

Elegimos  $Q = G$ , el CM.

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_G \vec{\omega})$$

$$(\vec{v}_G)^2 = R^2 \dot{\phi}^2 (R - r)^2 \quad (\vec{v}_G \text{ ya lo tenemos de la parte a)}$$

$$\text{Luego, } \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_G \vec{\omega}) = (0, 0, \dot{\phi}) \cdot \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right]$$

En la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ 
Vector fila
Matriz
Vector columna

Vector columna

$$= (\mathbb{I}_G)_{33} \dot{\phi}^2$$

↓  
Componente (3,3)

En este caso  $(\mathbb{I}_G)_{33} = \frac{mL^2}{12} = \frac{m(4R)^2}{12} = \frac{4}{3} mR^2$

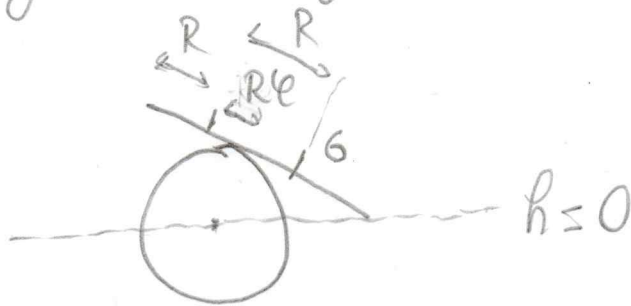
Entonces,  $T = \frac{1}{2} m (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_G \vec{\omega}) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 (\varphi-1)^2 + \frac{1}{2} \frac{4}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2$

$$= m R^2 \dot{\varphi}^2 \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} (\varphi-1)^2 \right]$$

La energía potencial:

$$U = m g h = m g (\vec{r}_G \cdot \hat{j}) = m g (R \hat{e}_1 + R(1-\varphi) \hat{e}_2) \cdot \hat{j}$$

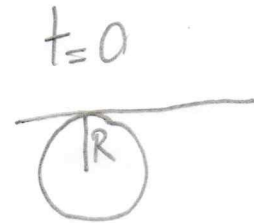
Altura del CM



$$U = m g R [\cos \varphi + (\varphi-1) \sin \varphi]$$

→ Ec. de mov.  $E = E_0 = m g R$

↓ Energía Inicial      ↓  $\varphi(0) = 0$   
 $\dot{\varphi}(0) = 0$



$$\rightarrow m R \dot{\varphi}^2 \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} (\varphi-1)^2 \right] + m g R [\cos \varphi + (\varphi-1) \sin \varphi] = m g R$$

II) Por cardinales

Segunda cardinal con resp. a C:

$$m(G-C) \times \vec{a}_C + \frac{d(\mathbb{I}_C \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_C^{(EXT)} = m(G-C) \times \vec{g} + \mathbb{I}_C \vec{\alpha}$$

Primero,  $\vec{M}_c^{(EXT)} = (G-C) \times mg(-\hat{j}) = R(1-e)\hat{e}_e \times mg(-\hat{j})$

$$\left( \begin{array}{c} \hat{j} \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_e \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \hat{e}_n \\ \hat{e}_e \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \hat{h}' \\ \hat{h}' \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \hat{e}_n \times \hat{e}_e = \hat{h}' \\ \hat{e}_e \times \hat{e}_n = -\hat{h}' \end{array} \quad = \underline{mgR(1-e) \hat{e}_e \hat{h}'} \quad (1)$$

Luego, proyectando la segunda cardinal en  $\hat{h}'$ :

$$\hat{h}' \cdot [m(G-C) \times \vec{a}_c] + \underbrace{\hat{h}' \cdot \frac{dI_c \vec{\omega}}{dt}}_{=0} = \vec{M}_c^{(EXT)} \cdot \hat{h}'$$

$$\frac{d}{dt} [(0 \ 0 \ 1) (I_c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}] = \frac{d}{dt} (I_c \dot{\theta})$$

Con  $I_c = (I_c)_{33}$ , componente (3,3)

$$I_c = I_G + m d^2 = \frac{mL^2}{12} + m(R-R_e)^2 = mR^2 \left[ \frac{4}{3} + (1-e)^2 \right]$$

Steiner  $d$ : Dist. entre  $G$  y  $C$

Vamos a ver dos casos posibles de  $C$

•)  $C$  como punto geométrico

$$\vec{a}_c = R\ddot{\theta}\hat{e}_e - R\dot{\theta}^2\hat{e}_n \quad (C \text{ está haciendo un mov. circular})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{h}' \cdot [m(G-C) \times \vec{a}_c] &= \hat{h}' \cdot [mR(1-e)\hat{e}_e \times (R\ddot{\theta}\hat{e}_e - R\dot{\theta}^2\hat{e}_n)] \\ &= \underline{mR^2\ddot{\theta}^2(1-e) = mR\ddot{\theta}^2(e-1)} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \frac{d}{dt} (I_c \dot{\theta}) = \frac{d}{dt} \left[ mR^2 \left( \frac{4}{3} + (e-1)^2 \right) \dot{\theta} \right] = \underline{mR^2 \left( \frac{4}{3} + (e-1)^2 \right) \ddot{\theta} + 2mR^2 \dot{\theta}^2 (e-1)} \quad (3)$$

Juntando (1), (2) y (3):

$$mR^2 \left[ \frac{4}{3} + (\varphi - 1)^2 \right] \ddot{\varphi} + mR^2 \dot{\varphi}^2 (\varphi - 1) - mgR(\varphi - 1) \cos \varphi = 0$$

Se puede verificar que esta ecuación se puede obtener como  $\frac{dE}{dt} = 0$

•) C como punto material instantáneo

En este caso hay dos detalles a tener en cuenta:

- Si bien  $\vec{v}_C = 0$  por RSD,  $\vec{a}_C \neq 0$  pues el punto material de la barra en contacto con el disco está instantáneamente "despegándose" del mismo  $\rightarrow$  Su aceleración no puede ser cero.

Para hallar  $\vec{a}_C$  podemos hallar  $\vec{a}$  de un punto genérico de la barra partiendo del resultado de la velocidad obtenido en la parte

anterior:  $\vec{v}_P = \dot{\varphi} (R\varphi - x) \hat{e}_n$

$$\rightarrow \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \ddot{\varphi} (R\varphi - x) \hat{e}_n + \dot{\varphi}^2 (R\varphi - x) \hat{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2 \hat{e}_n$$

Recordar que el punto material en contacto instantáneo con el disco corresponde a  $x = R\varphi$

$$\rightarrow \vec{a}_C = R\dot{\varphi}^2 \hat{e}_n$$

$$\rightarrow (m(G-C) \times \vec{a}_C) \cdot \hat{p}'_1 = m R (1-e) \hat{e}_e \times R \dot{e}^2 \hat{e}_n = \boxed{m R^2 \dot{e}^2 (1-e)}$$

- En el término  $\frac{dI_C \dot{e}}{dt}$ , el momento de inercia, a pesar de que depende de  $e$ , no se deriva.

Esto se puede ver de la siguiente forma:

Esta cantidad se obtiene de

$$\hat{p}'_1 \cdot \frac{dI_C \vec{\omega}}{dt}$$

La derivada se puede expresar como

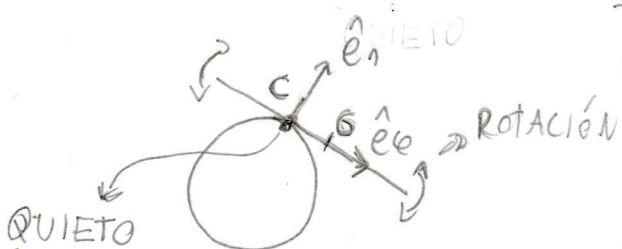
$$\frac{dI_C \vec{\omega}}{dt} = \frac{d' I_C \vec{\omega}}{dt'} + \vec{\omega} \times (I_C \vec{\omega})$$

Tomando  $S': C, \{\hat{e}_n, \hat{e}_e, \hat{p}'_1\}$  como sistema móvil.

Como  $\vec{\omega} = \dot{e} \hat{p}'_1 = -\dot{e} \hat{p}_1$ ,  $\hat{p}'_1 \cdot [\vec{\omega} \times (I_C \vec{\omega})] = 0$  ya que  $\vec{\omega} \times (I_C \vec{\omega}) \perp \vec{\omega}$ .

$$\text{Entonces } \hat{p}'_1 \cdot \frac{dI_C \vec{\omega}}{dt} = \hat{p}'_1 \cdot \frac{d' I_C \vec{\omega}}{dt'}$$

En el sistema móvil  $S'$ , la barra está haciendo un movimiento de rotación pura en torno a  $C$ , pues  $\vec{v}_C = 0$  (RSD).



La dist. de masa con resp. a  $C$  en la base  $\{\hat{e}_n, \hat{e}_e, \hat{p}'_1\}$  no cambia en la rotación.

$$\rightarrow I_C = I_G + m \underbrace{(R-R'e)^2}_{\text{Distancia evaluada en ese } e} = \text{CTE.}$$



Entonces,

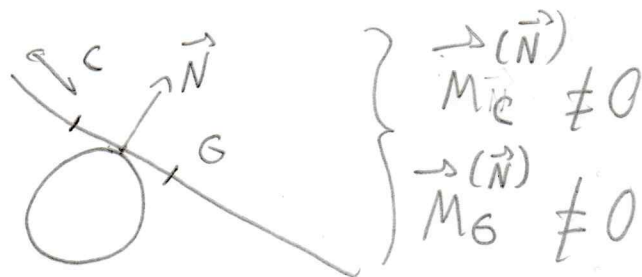
$$\begin{aligned} \hat{p}_m \cdot \frac{d}{dt'} I_c \vec{\omega} &= \frac{d}{dt'} I_c \dot{\epsilon} = \frac{d}{dt'} \underbrace{[I_G + m(R - R\epsilon)^2]}_{\substack{\text{FIJO EN} \\ S'}} \dot{\epsilon} \\ &= [I_G + m(R - R\epsilon)^2] \ddot{\epsilon} \\ &= mR^2 [4/3 + (\epsilon - 1)^2] \ddot{\epsilon} \end{aligned}$$

La segunda cardinal nos queda:

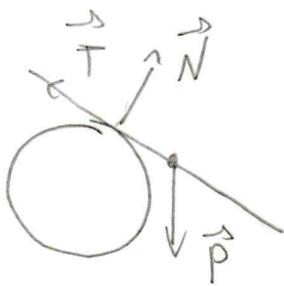
$$[m(G - C) \times \vec{a}_c] \cdot \hat{p}_m + \hat{p}_m \cdot \frac{d}{dt} I_c \vec{\omega} = \vec{M}_c^{(EXT)} \cdot \hat{p}_m$$

$$\rightarrow mR^2 [4/3 + (\epsilon - 1)^2] \ddot{\epsilon} + mR^2 \dot{\epsilon}^2 (\epsilon - 1) \mp mgR(\epsilon - 1) \cos \epsilon = 0$$

Se puede tomar la segunda cardinal con respecto a  $\subseteq$  como punto material fijo o con respecto a  $G$ , pero en ese caso hay que considerar el momento de la reacción normal:



1)



$$\vec{F} = -mg\hat{j} + N\hat{e}_n + T\hat{e}_t$$

Primera cardinal:

$$\vec{F} = m\vec{a}_G$$

$\vec{a}_G$  Se puede obtener del resultado de la aceleración para un punto genérico de la barra tomando  $x=R$ , o a partir de  $\frac{d\vec{v}_G}{dt}$ .

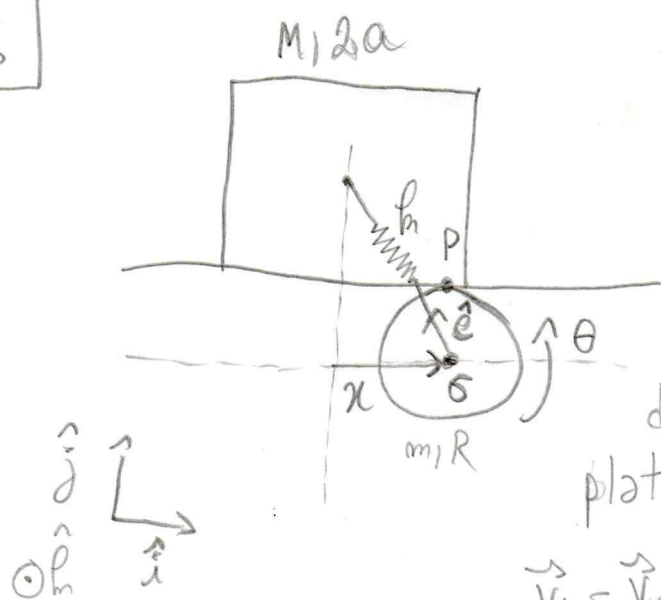
$$\vec{a}_G = R[\ddot{\theta}(\ell-1) + \dot{\theta}^2]\hat{e}_n + R\dot{\theta}^2(\ell-1)\hat{e}_t$$

Proyectando en  $\hat{e}_n$  y  $\hat{e}_t$  la primera cardinal se obtiene, respectivamente:

$$N = mg \cos \ell + mR[\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}(\ell-1)]$$

$$T = +mg \sin \ell - mR\dot{\theta}^2(\ell-1)$$

2



a) i) Hallar condición para que el disco permanezca apoyado sobre la superficie.

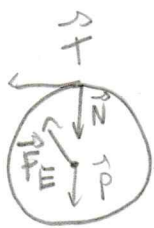
Primero, la velocidad del punto del disco en contacto con la plataforma:

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (P-G) \\ &= \dot{x}\hat{i} + (-\dot{\theta})\hat{l} \times R\hat{j} \\ &= (\dot{x} - R\dot{\theta})\hat{i} \end{aligned}$$

Como el disco rueda sin deslizar,  $\vec{v}_p = 0 \rightarrow \dot{\alpha} = R\dot{\theta}$

Luego, la primera cardinal:

$$m\vec{a}_s = \vec{F} \rightarrow m\ddot{\alpha}\hat{i} = -mg\hat{j} - N\hat{j} - T\hat{i} - f_m(\alpha\hat{i} - (a+R)\hat{j})$$



Proyectando en  $\hat{j}$ :

$$0 = -mg - N + f_m(a+R) = 0$$

$$\rightarrow N = f_m(a+R) - mg$$

Para que el disco permanezca apoyado, debe ser  $N \geq 0$

$$\rightarrow \boxed{f_m > \frac{mg}{(a+R)}}$$

ii) Hallar la ec. de mov. del disco.

Segunda cardinal con resp. a G:

$$\frac{d}{dt} \#_G \vec{\omega} = \vec{M}_G^{(EXT)} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} \hat{p}_m \right) = T R \hat{p}_m$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m R \ddot{\theta} = \frac{1}{2} m \ddot{\alpha}}$$

RSD

Proyectando la primera cardinal en  $\hat{i}$ :

$$m\ddot{\alpha} = -T - f_m \alpha = -\frac{1}{2} m \ddot{\alpha} - f_m \alpha$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \ddot{\alpha} + \frac{f_m}{m} \alpha = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} + \frac{2f_m}{3m} \alpha = 0}$$

Solución general:  $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{2h}{3m}}$

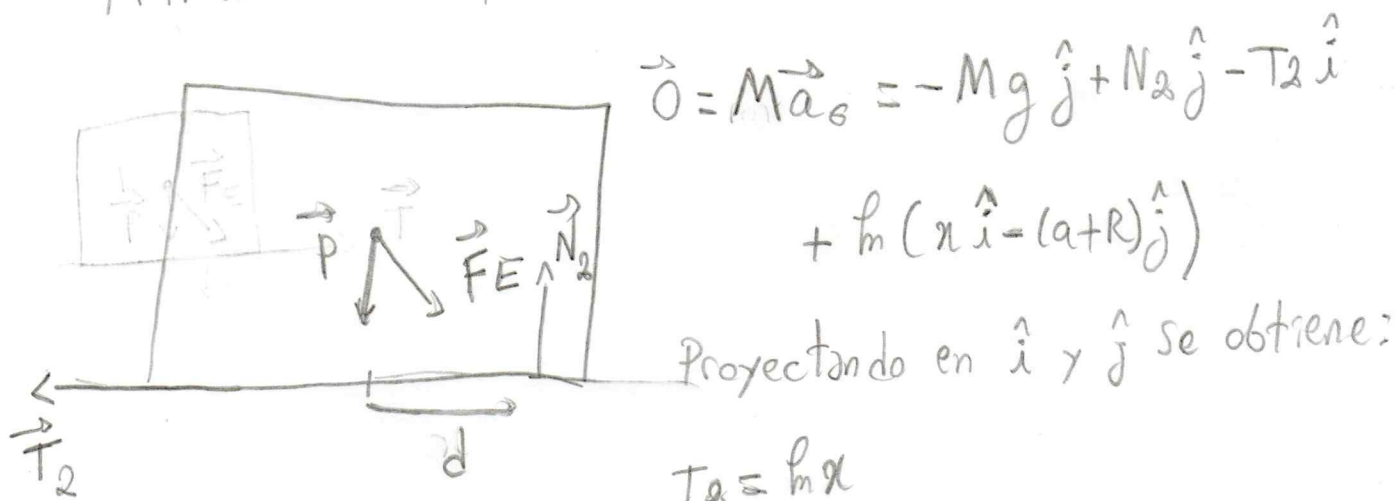
Condiciones iniciales:  $x(0) = 0 \rightarrow A = 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$

$\rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

b) i) Condición para que la placa no deslice

Primera ecuación para la placa:



$$\vec{0} = M \vec{a}_G = -Mg \hat{j} + N_2 \hat{j} - T_2 \hat{i} + m(x \hat{i} - (a+R) \hat{j})$$

Proyectando en  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  se obtiene:

$$T_2 = m x$$

$$N_2 = Mg + m(a+R)$$

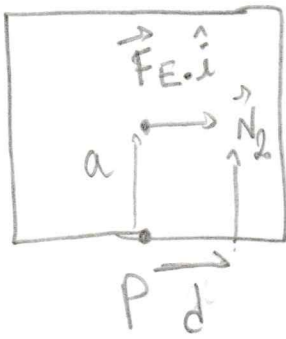
Para que la placa no deslice

$$|T_2| < f |N_2| \rightarrow m |x(t)| < f (Mg + m(a+R))$$

El valor máximo de  $|x(t)|$  es  $\frac{v_0}{\omega}$

$$\rightarrow m \frac{v_0}{\omega} < f (Mg + m(a+R))$$

ii) Condición para que la placa no vuelque.



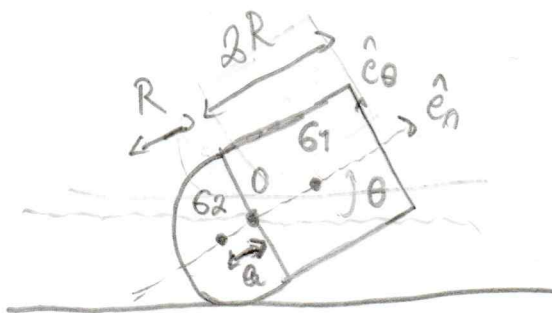
Tomando la segunda cardinal desde P, solamente hacen momento la normal y la componente horizontal de la fuerza elástica.

$$\begin{aligned} & \rightarrow N_2 d - \underbrace{(F_e \cdot \hat{i})}_{hx} a = 0 \\ & \rightarrow N_2 d = h x a, \quad d = \frac{h x a}{N_2} = \frac{h x a}{Mg + h(a+R)} \end{aligned}$$

Para que la placa no vuelque, debe ser  $|d| < a$

$$\rightarrow \frac{h |x| a}{Mg + h(a+R)} < a, \quad |x| = \frac{v_0}{\omega} \rightarrow \boxed{h v_0 / \omega < Mg + h(a+R)}$$

3

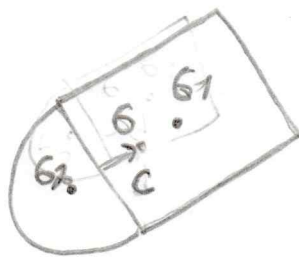


$$a = \frac{4R}{3\pi}$$

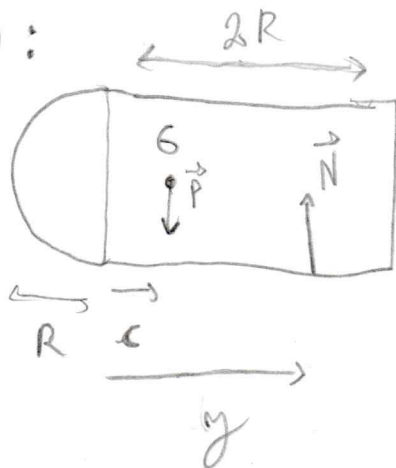
Centro de masa del sistema semidisco + placa (con resp. a O):

$$\begin{aligned} G &= G_1 + \frac{M_d}{M_d + M_P} (G_2 - G_1) \\ &= R \hat{e}_n + \frac{M_d}{M_d + M_P} \left( -\frac{4R}{3\pi} \hat{e}_n - R \hat{e}_n \right) \\ &= R \left[ 1 - \frac{M_d}{M_d + M_P} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \right] \hat{e}_n \end{aligned}$$

Definimos  $\underline{c} : G = c \hat{e}_n$



a)  $\theta = 0 :$



Segunda cardinal:

$$-Pc + Ny = 0$$

En este caso  $N = P$

$$\rightarrow y = c = R \left( 1 - \frac{M_d}{M_d + M_p} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \right)$$

Para que la placa no vuelque y permanezca en la posición  $\theta = 0$ , se debe cumplir  $0 < y < 2R$ .

$y < 2R$  siempre se cumple

$$0 < y \rightarrow 1 - \frac{M_d}{M_d + M_p} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) > 0 \rightarrow 1 + \frac{M_p}{M_d} > 1 + \frac{4}{3\pi}$$

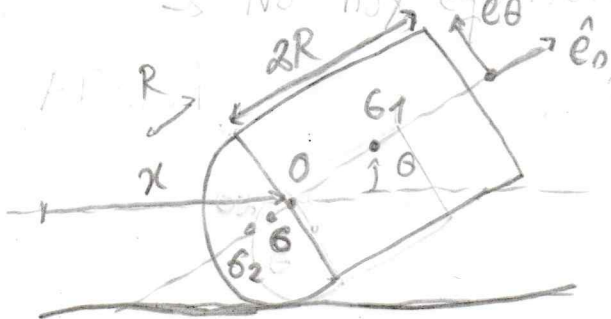
$$\rightarrow \frac{M_p}{M_d} > \frac{4}{3\pi}$$

b) Para esta parte  $M_d = 3M_p$ ,  $M_p = M$  a partir de ahora

$\rightarrow$  No hay equilibrio

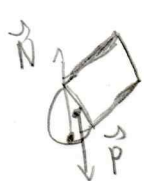
$\rightarrow$  No hay equilibrio

El sistema tiene dos grados de libertad:  $x, \theta$

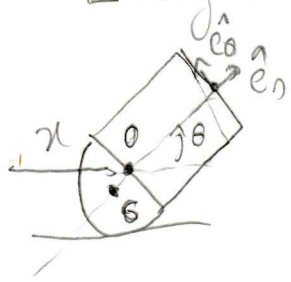


Las ecuaciones de mov. se pueden obtener a partir de

- Conservación de la energía (el piso es liso)
- Conservación de la componente horizontal del momento lineal:

$$\vec{F}^{EXT} \cdot \hat{i} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \hat{i} = 0 \rightarrow \vec{p} \cdot \hat{i} = \text{cte.}$$


Energía cinética:  $T = \frac{1}{2} M_T (\vec{v}_0)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_0 \vec{\omega}) + M_T \vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{c}-\vec{o})]$



$$\vec{v}_0 = \dot{\chi} \hat{i} \quad G=0 = -|\dot{\chi}| \hat{e}_n$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k} \quad M_T = M_p + M_d = M + 3M = 4M$$

$$\cdot) \frac{1}{2} M_T (\vec{v}_0)^2 = \frac{4}{2} M \dot{\chi}^2 = \boxed{2M \dot{\chi}^2}$$

$$\cdot) \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_0 \vec{\omega}) = \frac{1}{2} (0 \ 0 \ \dot{\theta}) \begin{pmatrix} \mathbb{I}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_0)_{33} \dot{\theta}^2$$

$(\mathbb{I}_0)_{33}$  se puede obtener como  $I_0^{DISCO} + I_0^{PLACA}$ , la suma de las momentos de inercia del semidisco y la placa.

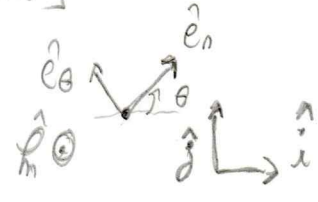
$$I_0^{DISCO} = \frac{1}{2} \frac{2MR^2}{2} = \frac{3}{2} MR^2, \text{ la mitad del momento de inercia de un disco entero con resp. a su centro. (el disco entero tendría masa } 2M_d).$$

$$I_0^{PLACA} = \underbrace{I_{G_1}^{PLACA}} + \underbrace{M_P R^2}_{\text{Traslado por Steiner a O.}} = \frac{M_P L^2}{6} + M_P R^2 = M_P R^2 \left( \frac{4}{6} + 1 \right) = \frac{5}{3} MR^2$$

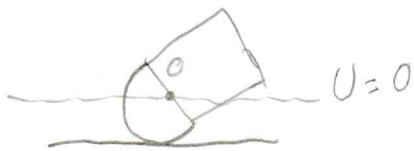
Momento de inercia de la placa con resp. a su centro de masa

Traslado por Steiner a O.

$$\rightarrow (\mathbb{I}_0)_{33} = MR^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{5}{3} \right) = MR^2 \frac{19}{6}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot) M_T \vec{v}_G \cdot [\vec{\omega} \times (G-O)] &= 4M \dot{x} \hat{i} \cdot [\dot{\theta} \hat{k} \times (-l \hat{e}_n)] \\
 &= 4M \dot{x} \dot{\theta} l \hat{i} \cdot (-\hat{e}_\theta) \\
 &= 4M \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta
 \end{aligned}$$


Energía potencial:  $U = M_T g \vec{r}_G \cdot \hat{j} = -4Mg l \cos \theta$



$$\vec{r}_G = x \hat{i} - l \hat{e}_n$$

$$\rightarrow E = 2M \dot{x}^2 + 4M \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta + \frac{19}{6} MR^2 \dot{\theta}^2$$

$$-4Mg l \cos \theta = E_0 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\theta(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

Momento lineal:  $\vec{P} = M_T \vec{v}_G = 4M \vec{v}_G$

$$\vec{r}_G = x \hat{i} - l \hat{e}_n \rightarrow \vec{v}_G = \dot{x} \hat{i} - l \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{P} \cdot \hat{i} = \dot{x} \rightarrow \vec{v}_G \cdot \hat{i} = \dot{x} \rightarrow \dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta} = \dot{x} \rightarrow \dot{\theta} = 0$$

$$\rightarrow \dot{x} = -l \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$\rightarrow E = 2M (-l \cos \theta \dot{\theta})^2 - 4Mg l \cos^2 \theta + \frac{29}{12} MR^2 \dot{\theta}^2$$

$$-4Mg l \cos \theta = 0$$

$$\rightarrow \dot{\theta}^2 \left[ -2M l^2 \cos^2 \theta + \frac{19}{6} MR^2 \right] - 4Mg l \cos \theta = 0$$

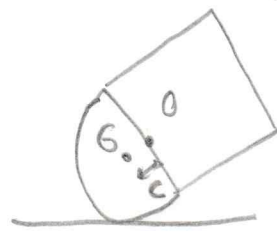


OBS: También se puede considerar el centro de masas para calcular la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} M_T (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_G \vec{\omega}) + \underbrace{M_T \vec{v}_G \cdot [\vec{\omega} \times (\mathbf{G}-\mathbf{O})]}_0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{2} M_T (\vec{v}_G)^2 &= \frac{1}{2} 4M (\dot{x} \hat{i} - l \dot{\theta} \hat{e}_\theta)^2 \\ &= 2M [\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} (\hat{i} \cdot \hat{e}_\theta)] \\ &= 2M [\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_G \vec{\omega}) = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$



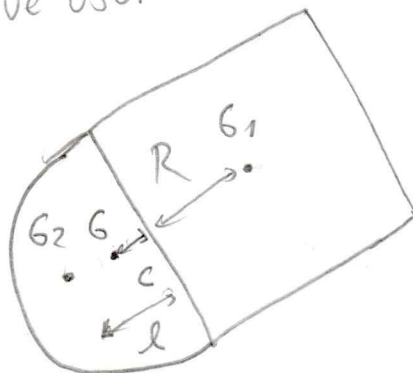
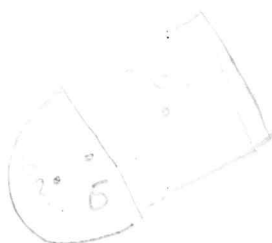
Por Steiner  
 $I_0 = I_G + M_T l^2$   
 $\rightarrow I_G = I_0 - 4M l^2$

$$\rightarrow \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_0 - 4M l^2) \dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow T = \underbrace{2M \dot{x}^2 + 2M l^2 \dot{\theta}^2}_{\frac{1}{2} M_T (\vec{v}_G)^2} + \underbrace{4M l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta}_{M_T \vec{v}_G \cdot [\vec{\omega} \times (\mathbf{G}-\mathbf{O})]} + \underbrace{\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 - 2M l^2 \dot{\theta}^2}_{\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\mathbb{I}_G \vec{\omega})}$$

Mismo resultado.

Para hallar  $I_G$  hay que usar Steiner:



$$I_G = I_G^{\text{DISCO}} + I_G^{\text{PLACA}}$$

$$\frac{I_G^{\text{DISCO}}}{I_G}$$

Por un lado,  $I_G^{\text{DISCO}} = I_{G2}^{\text{DISCO}} + M_d(l-c)^2$

Luego,  $I_G^{\text{DISCO}} = I_{G2}^{\text{DISCO}} + M_d l^2$

$\rightarrow I_{G2}^{\text{DISCO}} = I_0^{\text{DISCO}} - M_d l^2$

Con  $I_0^{\text{DISCO}} = \frac{M_d R^2}{2}$

$$\frac{I_G^{\text{PLACA}}}{I_G}$$

$I_G^{\text{PLACA}} = I_{G1}^{\text{PLACA}} + M_p(R+c)^2$

Con  $I_{G1}^{\text{PLACA}} = \frac{M_p L^2}{6} = \frac{4}{6} M_p R^2$

1)

$$\ddot{\theta} = \frac{2|c| \sin \theta}{\frac{19}{6} R^2 - 2|c|^2 \sin^2 \theta}$$

$$\ddot{\theta} \Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{2|c|}{\frac{19}{6} R^2 - 2|c|^2}$$