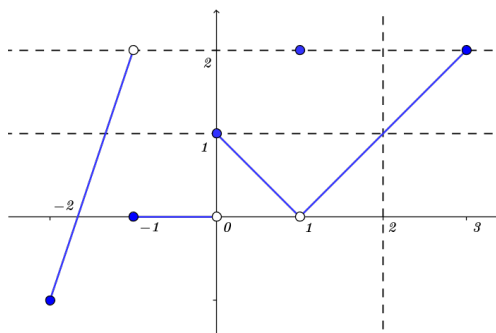


Ejercicio 1 (Cálculo gráfico de límites) Dada la gráfica:



1. Determinar:

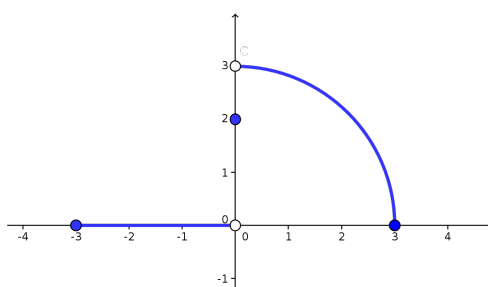
- a) $g(-2)$ b) $g(-1)$ c) $g(0)$ d) $g(1)$ e) $g(2)$ f) $g(3)$

2. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Ejercicio 2 (Cálculo gráfico de límites laterales) A partir de la función cuya gráfica se muestra calcular:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



Ejercicio 3 (Límites laterales) 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Graficar f y hallar:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

¿Qué sucede con los límites anteriores si f no está definida en $x = 1$?

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Graficar f y hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \leq -2, \\ -4 + x & \text{si } x > -2. \end{cases}$

Graficar f y hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Ejercicio 4 (Operaciones con límites) Calcular los siguientes límites, indicando las propiedades de las operaciones con límites utilizadas:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} 5x^2 - 2x + 3$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2 + 4x - 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}$

Ejercicio 5 (Operaciones con límites) Asumiendo que existe, calcular para los siguientes ejemplos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{5} = 1, \quad a = 3$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0, \quad a = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1, \quad a = -2$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3, \quad a = 2$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)^2 - 6f(x) + 2 = -7, \quad a = 2$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2f(x) - x}}{f(x)} = 1, \quad a = 1$

Ejercicio 6 (Interpretación gráfica de límite)

1. Dibujar el gráfico de una función f que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:

■ $f(0) = 3$

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2. Dibujar el gráfico de una función f que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:

■ $f(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

■ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

Ejercicio 7 (Límites con cociente de polinomios)

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2}$

2. Consideremos las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

$$h(x) = \frac{x^8 - 1}{x^5 - x}$$

a) Asumiendo que existen, calcular los límites:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

7) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

b) Calcular los límites indicados y revisar los resultados en en la siguiente [aplicación Geogebra](#).

Ejercicio 8 (Límites con valor absoluto)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow -4} |x + 4|$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 9 (Límites con radicales) Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x - 1} + 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 10 (Límites con exponencial y logaritmo) Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} e^{x^3 - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\sin(x - 2)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(\sqrt{x + 3}) - \ln(\sqrt{x})$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \log(x^2)$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \log(1 + \sin(x - 2))$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 11 (Límites con trigonométricas) Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1)(1 + \operatorname{sen}(2x))$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 2x^3)\cos(x^2)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \log(x^2) \operatorname{sen}^2(x + 1)$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 12 (Existencia y operaciones con límites) *Mostrar por medio de un ejemplo que:*

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$ puede existir aún cuando no exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ puede existir aún cuando no exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Ejercicio 13 (Infinitésimos equivalentes) 1. Dadas dos funciones reales f y g , decimos que f y g son infinitésimos en $x = a$ si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Decimos además, que son **infinitésimos equivalentes** si:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Con la ayuda de la siguiente [aplicación Geogebra de análisis de límite puntual](#), determinar si las siguientes son infinitésimos equivalentes en $x = 0$:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x$ | d) $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = x$ | g) $f(x) = \ln(1 + x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ |
| b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x^2$ | e) $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ | h) $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1 + x$ |
| c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ | f) $f(x) = \ln(1 + x)$ y $g(x) = x$ | |

2. A partir del ejercicio anterior calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\operatorname{sen}(x))^4}{4} - (\cos(x))^2}{e^{3x} + \ln(1 + 2x)}.$$

Ejercicio 14 (Órdenes de infinito) Supongamos f y g dos funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Decimos que f es un infinito de orden superior a g (y escribimos $g < f$) si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Con la siguiente [aplicación Geogebra](#), ordenar las siguientes funciones según los órdenes de infinitos:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1. $f_1(x) = 2^x$ | 3. $f_3(x) = x^5$ | 5. $f_5(x) = xe^x$ |
| 2. $f_2(x) = \ln(3x)$ | 4. $f_4(x) = 4x^{15}$ | 6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x}$ |

Ejercicio 15 (Cocientes de infinitos) Calcular los siguientes límites.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + \ln|x|}{7x^2 + \sqrt{|x|}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-1} - x^3}{-x^2 + \ln(x+5)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 1}{x^3 + e^{-x}}$$

Ejercicio 16 (Continuidad)

Para las siguientes funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ siendo D el máximo dominio de definición, indicar si f es continua en el punto x indicado.

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, \text{ si } x \neq 1, \text{ y } f(1) = -2 \text{ en } x = 1.$$

$$6. f(x) = e^{\sin(x-2)} \text{ en } x = 2.$$

$$2. f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \text{ en } x = 3.$$

$$7. f(x) = \ln(x^2) \text{ en } x = 1.$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{x-x}}{x-1} \text{ en } x = 1 \text{ si } x \neq 1, \text{ y } f(1) = 0 \text{ en } x = 1.$$

$$8. f(x) = \log(1 + \sin(x-2)) \text{ en } x = 2.$$

$$4. f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} \text{ en } x = 1.$$

$$9. f(x) = x \sin(x) \text{ en } x = 0.$$

$$5. f(x) = e^{x^3 - 1} \text{ en } x = 0.$$

$$10. f(x) = \log(x^2) \sin^2(x+1) \text{ en } x = 1.$$

Observar que las expresiones que definen a las funciones ya fueron analizadas en ejercicios anteriores.

Ejercicio 17 (Continuidad)

Determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la función f es continua:

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + ax + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax - 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2 \cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ ax^2 - a & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Ejercicio 18 (Teorema de Bolzano (TB)) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + e^x - 4$ y los intervalos $I = [-3, -1]$ y $J = [0, 3]$. Indicar la opción correcta:

1. f está en las hipótesis del TB en I y en J .

3. f está en las hipótesis del TB en J pero no en I .

2. f está en las hipótesis del TB en I pero no en J .

4. f no está en las hipótesis del TB ni para I ni para J .

Ejercicio 19 (Aplicaciones del Teorema de Bolzano)

1. Demuestre que la ecuación dada $x + 2 \cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.

2. En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n+1$ y $f(x) = 0$:

a) $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

b) $x + e^x$

3. Demostrar que existe un número x tal que:

a) $\sin(x) = x - 1$

b) $5 \sin(x) = \cos(x)^2$

c) $\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$

4. Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$:

$$x \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) - 5 = \log(x) - e^x$$