

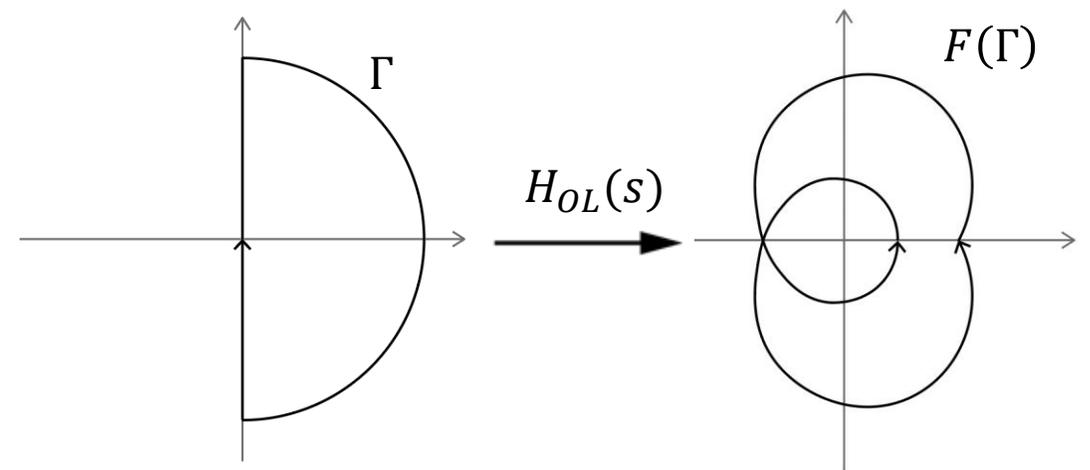
# Sistemas y Control

---

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 8, EJS 5

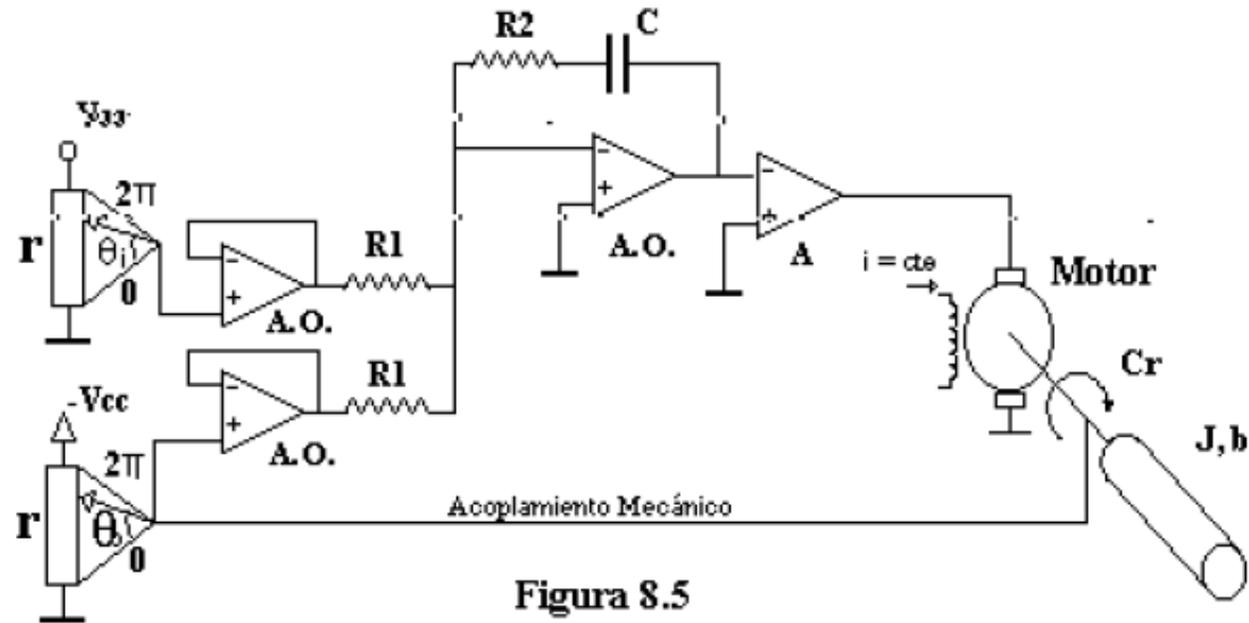
# Repaso: criterio de estabilidad de Nyquist

- El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad del sistema realimentado utilizando el principio del argumento
- Sean
  - $\Gamma$  una curva que contiene el semiplano complejo  $Re(s) > 0$ 
    - En este caso  $\Gamma$  está orientada negativamente
  - $H_{OL}(s)$  analítica en  $\Gamma$
  - Se cumple que
    - $Z = N + P$ 
      - $Z$  = Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
      - $P$  = Número de polos de  $H_{OL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
      - $N$  = Número de rodeos de  $H_{OL}(\Gamma)$  alrededor de -1



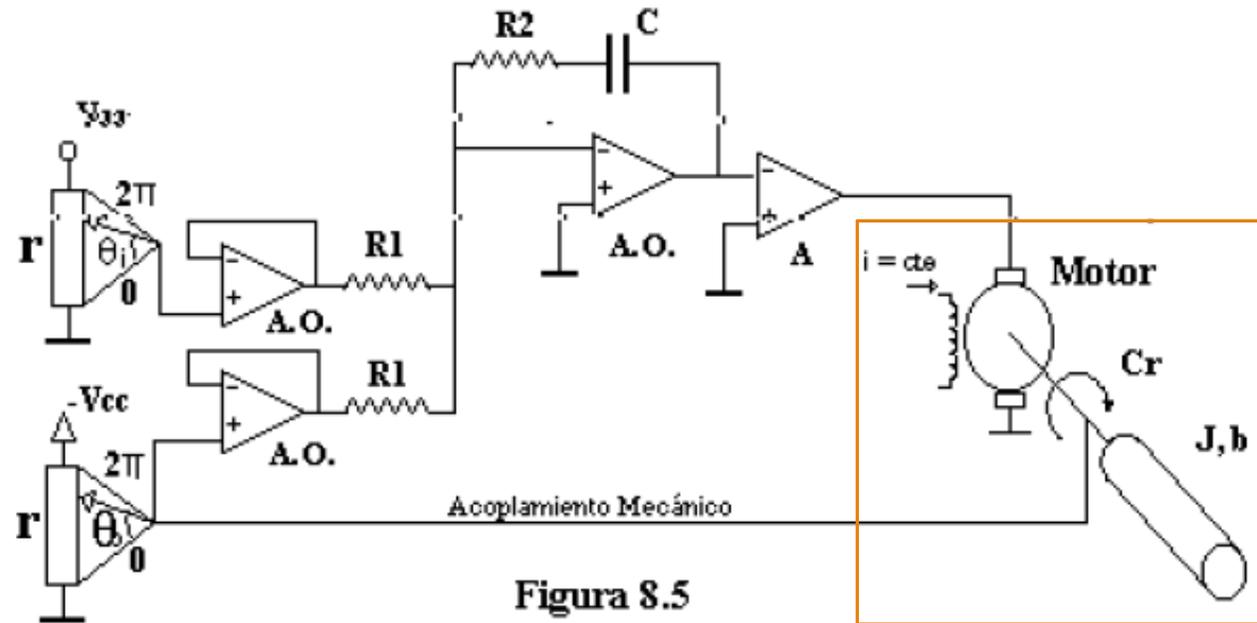
# Hoja 8. Ejercicio 5

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .



# Hoja 8. Ejercicio 5

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:

$$J\ddot{\theta}_0 = \tau_M - b\dot{\theta}_0$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:

$$J\ddot{\theta}_0 = \tau_M - b\dot{\theta}_0$$

$$J\ddot{\theta}_0 = A_\Phi i_\alpha - b\dot{\theta}_0$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:

$$J\ddot{\theta}_0 = \tau_M - b\dot{\theta}_0$$

$$J\ddot{\theta}_0 = A_\Phi i_a - b\dot{\theta}_0$$

- Aplicando 2da Ley de Kirchhoff a la malla del motor

$$v_0 = Ri_a + A_\Phi \dot{\theta}_0$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .

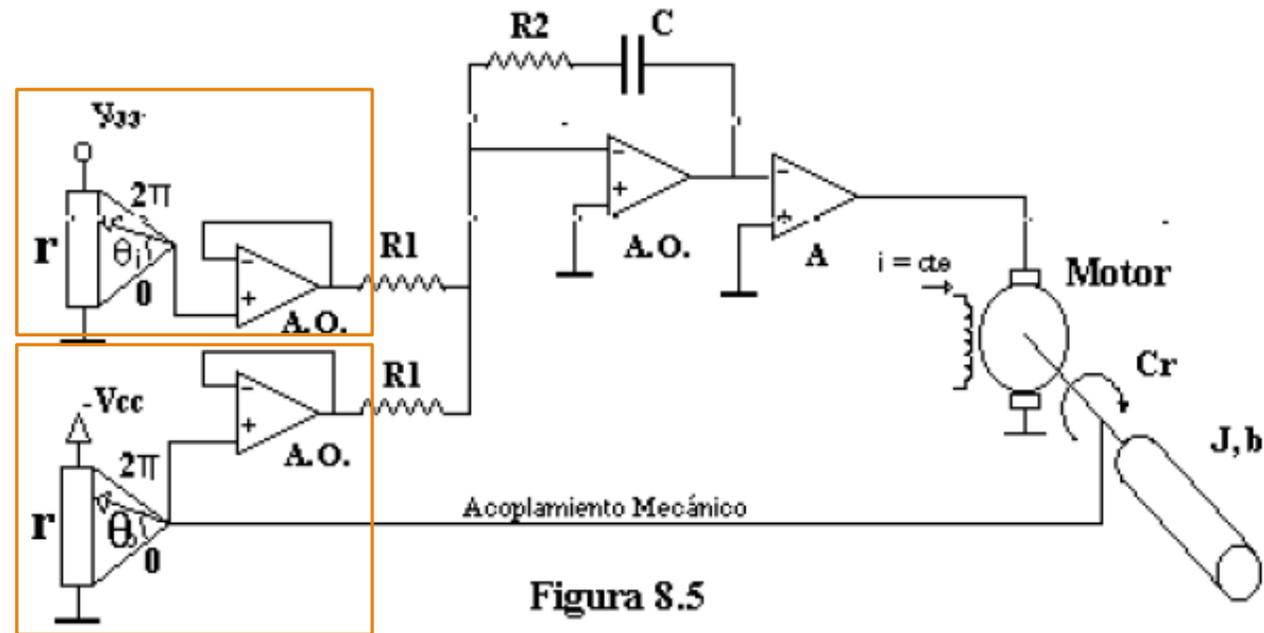


Figura 8.5

# Hoja 8. Ejercicio 5

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .

Configuración seguidora

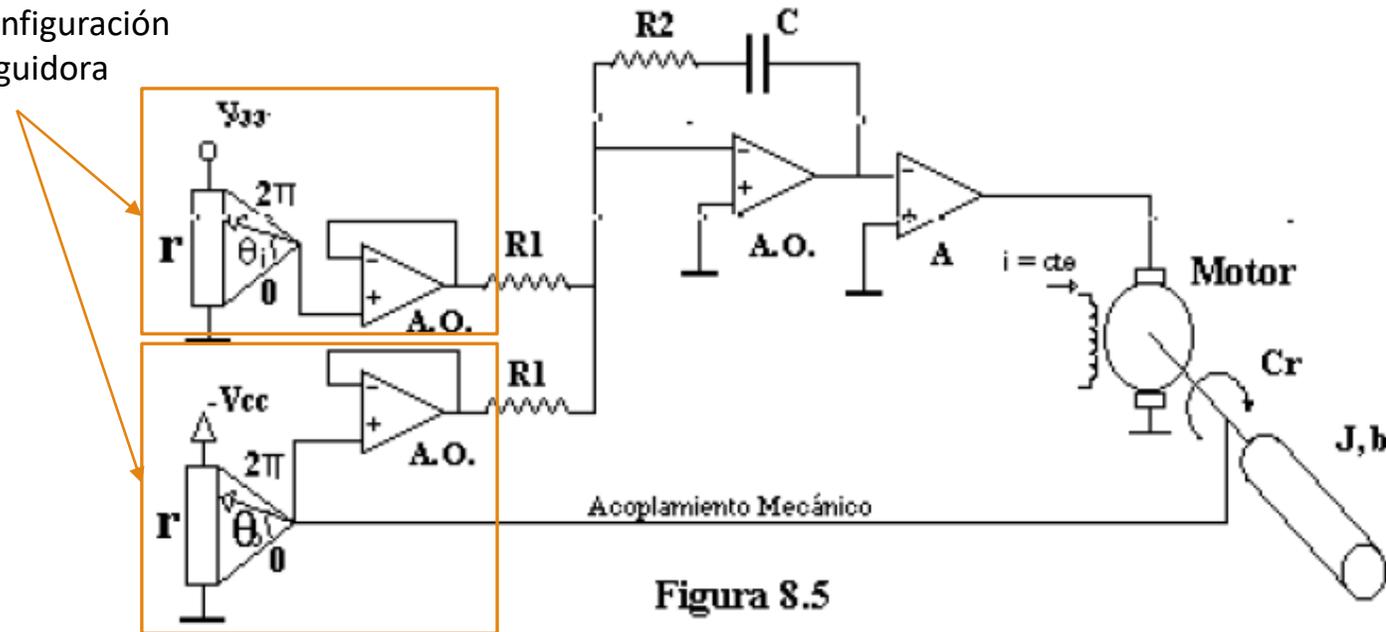
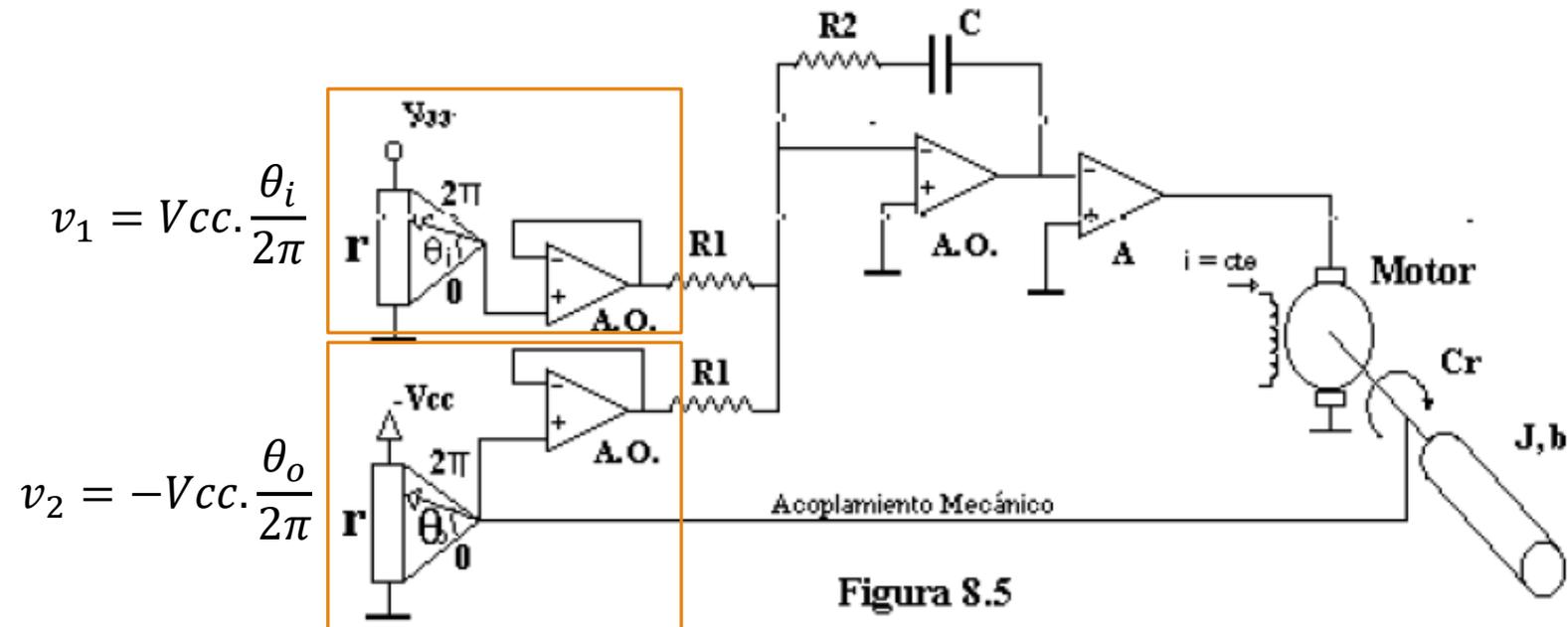


Figura 8.5

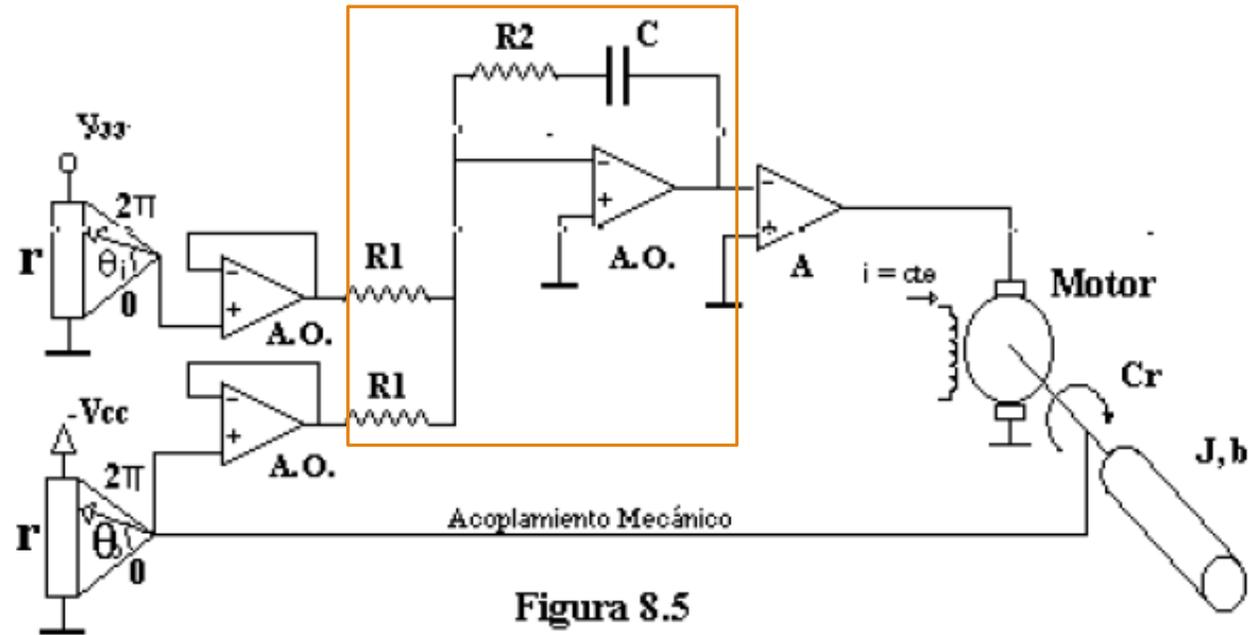
# Hoja 8. Ejercicio 5

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .



# Hoja 8. Ejercicio 5

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- Planteando las ecuaciones de nodos y mallas del circuito marcado en la figura

$$\frac{V_{cc}}{2\pi R_1} (\theta_i(s) - \theta_o(s)) = \frac{v_o(s)}{A} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{Cs}}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- Planteando las ecuaciones de nodos y mallas del circuito marcado en la figura

$$\frac{V_{cc}}{2\pi R_1} (\theta_i(s) - \theta_o(s)) = \frac{v_o(s)}{A} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{Cs}}$$

- Con el objetivo de compatibilizar los dominios de las ecuaciones anteriores y esta nueva ecuación, antitransformamos:

$$\frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi R_1} (\theta_i(t) - \theta_o(t)) + \frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi R_1} (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t)) R_2 C = C \cdot \dot{v}_o(t)$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\theta}_0 &= A_{\Phi}i_a - b\dot{\theta}_0 \\ v_0 &= Ri_a + A_{\Phi}\dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\}$$
$$\frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1}(\theta_i(t) - \theta_o(t)) + \frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1}(\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t))R_2C = C.v_o(t)$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_0 &= A_\Phi i_a - b\dot{\theta}_0 \\ v_0 &= Ri_a + A_\Phi \dot{\theta}_0 \end{aligned}$$

$$\frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} (\theta_i(t) - \theta_o(t)) + \frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t)) R_2 C = C \cdot \dot{v}_o(t)$$

$$v_o(t) = R \left( \frac{J\ddot{\theta}_0 - b\dot{\theta}_0}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \dot{\theta}_0$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_0 &= A_\Phi i_a - b\dot{\theta}_0 \\ v_0 &= Ri_a + A_\Phi \dot{\theta}_0 \end{aligned}$$

$$\frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} (\theta_i(t) - \theta_o(t)) + \frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t)) R_2 C = C \cdot \dot{v}_o(t)$$

$$v_o(t) = R \left( \frac{J\ddot{\theta}_0 - b\dot{\theta}_0}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \dot{\theta}_0$$

$$\dot{v}_o(t) = R \left( \frac{J\ddot{\theta}_0 - b\dot{\theta}_0}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \ddot{\theta}_0$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\theta}_0 &= A_\Phi i_a - b\dot{\theta}_0 \\ v_0 &= Ri_a + A_\Phi \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} (\theta_i(t) - \theta_o(t)) + \frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t)) R_2 C = C \cdot \dot{v}_o(t)$$

$$v_o(t) = R \left( \frac{J\ddot{\theta}_0 - b\dot{\theta}_0}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \dot{\theta}_0$$

$$\dot{v}_o(t) = R \left( \frac{J\ddot{\theta}_0 - b\dot{\theta}_0}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \ddot{\theta}_0$$

$$\frac{A.V_{CC}}{2\pi R_1} [\theta_i(t) - \theta_o(t) + R_2 C (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t))] = C \cdot \left[ R \left( \frac{J\ddot{\theta}_0(t) - b\dot{\theta}_0(t)}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \ddot{\theta}_0(t) \right]$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi R_1} [\theta_i(t) - \theta_o(t) + R_2 C (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t))] = C \cdot \left[ R \left( \frac{J \ddot{\theta}_o(t) - b \dot{\theta}_o(t)}{A_\Phi} \right) + A_\Phi \ddot{\theta}_o(t) \right]$$

- Pasando al dominio de Laplace y operando

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

Con

$$\alpha = \frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi} \cdot \frac{A_\Phi}{R}$$

$$\beta = b + \frac{A_\Phi^2}{R}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

Para obtener el diagrama de bloques

$$\theta_o(s)[JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha] = \theta_i(s)[\alpha(1 + sR_2C)]$$

$$\theta_o(s)s^3 + \frac{\beta}{J}\theta_o(s)s^2 + \frac{\alpha R_2}{JR_1}\theta_o(s)s + \frac{\alpha}{JR_1C}\theta_o(s) = \frac{\alpha}{JR_1C}\theta_i(s) + \frac{\alpha R_2}{JR_1}\theta_i(s)s$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

Para obtener el diagrama de bloques

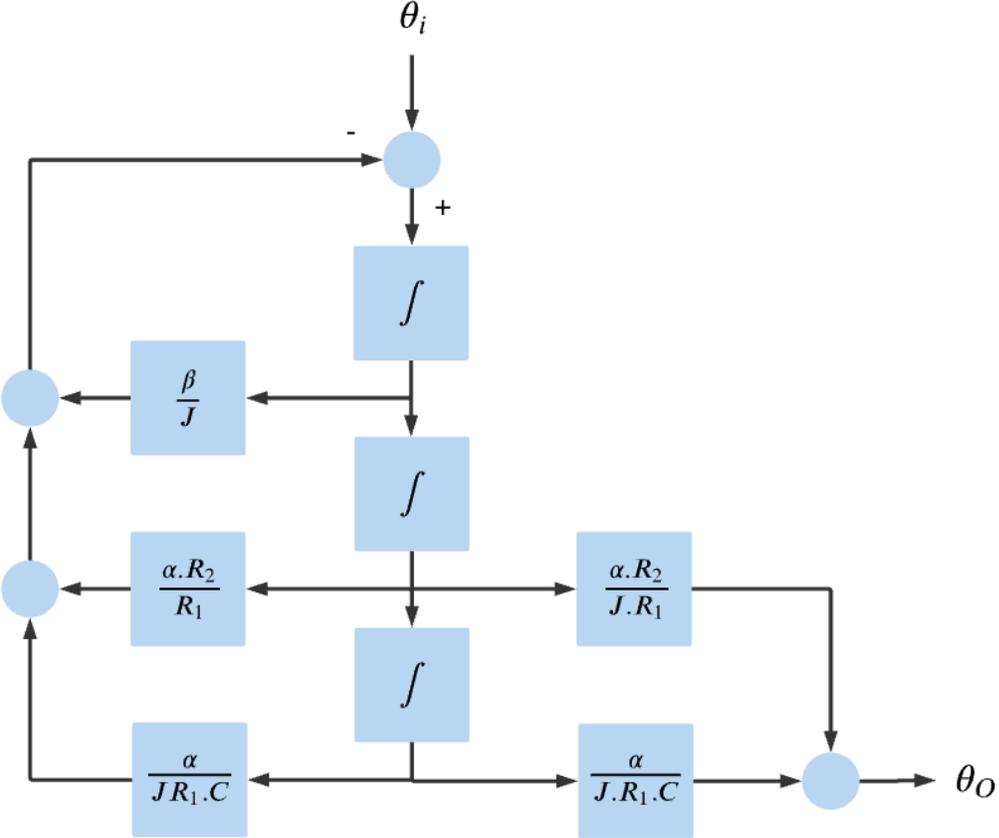
$$\theta_o(s) = b(s) \frac{1}{a(s)} \theta_i(s)$$

$$\theta_o(s) = b(s)Z(s)$$

$$Z(s) = \frac{1}{a(s)} \theta_i(s)$$

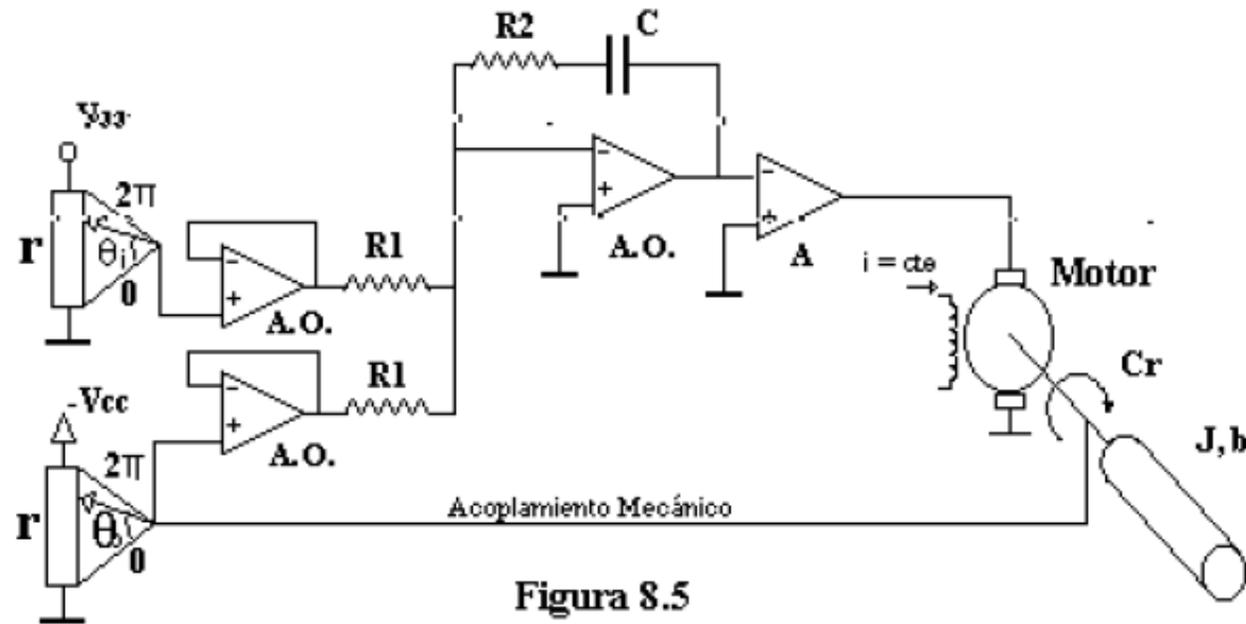
# Hoja 8. Ejercicio 5

---



# Hoja 8. Ejercicio 5

b) Dibujar el diagrama de Nyquist y determinar, a partir del mismo, la condición de estabilidad del sistema.



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

DATOS:

$$V_{cc} = 2 \pi V, \quad r = 1 \text{ k}\Omega, \quad C = 0,5 \mu\text{F}$$

(A.O.): Amplificador operacional ideal.

(A): Amplificador de potencia de ganancia  $A = 10$ ,  $Z_{in} = \infty$ ,  $Z_o = 0$

(M): Motor de corriente continua de excitación independiente,  $A\Phi = 4,2 \text{ Vs/rad}$ .  
Constantes de Armadura:  $R = 8 \text{ ohms}$ ,  $L$  despreciable.

(C): Carga que ejerce un par resistente  $C_r = b(d\theta_o/dt)$ ,  $b = 0,295 \text{ Nm/s}$   
Inercia complexiva del motor y la carga  $J = 0,05 \text{ Nm/s}^2$ .

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

$$\alpha = \frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi} \cdot \frac{A_\Phi}{R}$$

$$\beta = b + \frac{A_\Phi^2}{R}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

$$\alpha = \frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi} \cdot \frac{A_\Phi}{R} = 5,25$$

$$\beta = b + \frac{A_\Phi^2}{R} = 2,5$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

$$\alpha = \frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi} \cdot \frac{A_\Phi}{R} = 5,25$$

$$\beta = b + \frac{A_\Phi^2}{R} = 2,5$$

Si expresamos  $R_1$  y  $R_2$  en  $M\Omega$

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{5,25(1 + 0,5R_2s)}{2,5 \times 10^{-2} R_1 s^3 + 1,25 R_1 s^2 + 2,625 \cdot R_2 s + 5,25}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\alpha(1 + sR_2C)}{JR_1Cs^3 + \beta R_1Cs^2 + \alpha R_2Cs + \alpha}$$

$$\alpha = \frac{A \cdot V_{cc}}{2\pi} \cdot \frac{A_\Phi}{R} = 5,25$$
$$\beta = b + \frac{A_\Phi^2}{R} = 2,5$$

Si expresamos  $R_1$  y  $R_2$  en  $M\Omega$

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{5,25(1 + 0,5R_2s)}{2,5 \times 10^{-2} R_1 s^3 + 1,25 R_1 s^2 + 2,625 \cdot R_2 s + 5,25}$$



Esta transferencia es de lazo cerrado o de lazo abierto?

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL} = \frac{5,25(1 + 0,5R_2s)}{2,5 \times 10^{-2} R_1 s^3 + 1,25 R_1 s^2 + 2,625 \cdot R_2 s + 5,25}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL} = \frac{5,25(1 + 0,5R_2s)}{2,5 \times 10^{-2} R_1 s^3 + 1,25 R_1 s^2 + 2,625 \cdot R_2 s + 5,25}$$

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL} = \frac{\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL}}{1 + \left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL}}$$

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL} = \frac{\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL}}{1 - \left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL}}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL} = \frac{5,25(1 + 0,5R_2s)}{2,5 \times 10^{-2} R_1 s^3 + 1,25 R_1 s^2 + 2,625 \cdot R_2 s + 5,25}$$

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{CL} = \frac{\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL}}{1 + \left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL}}$$

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL} = \frac{4,2(1 + 0,5R_2s)}{R_1 s^2 (1 + 0,02s)}$$

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL} = \frac{4,2(1 + 0,5R_2s)}{R_1s^2(1 + 0,02s)}$$

Una vez que obtuvimos la transferencia de lazo abierto del sistema, estamos en condiciones de dibujar su Diagrama de Bode para luego estudiar la estabilidad mediante el Diagrama de Nyquist

# Hoja 8. Ejercicio 5

---

$$\left. \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \right|_{OL} = \frac{4,2(1 + 0,5R_2s)}{R_1s^2(1 + 0,02s)}$$

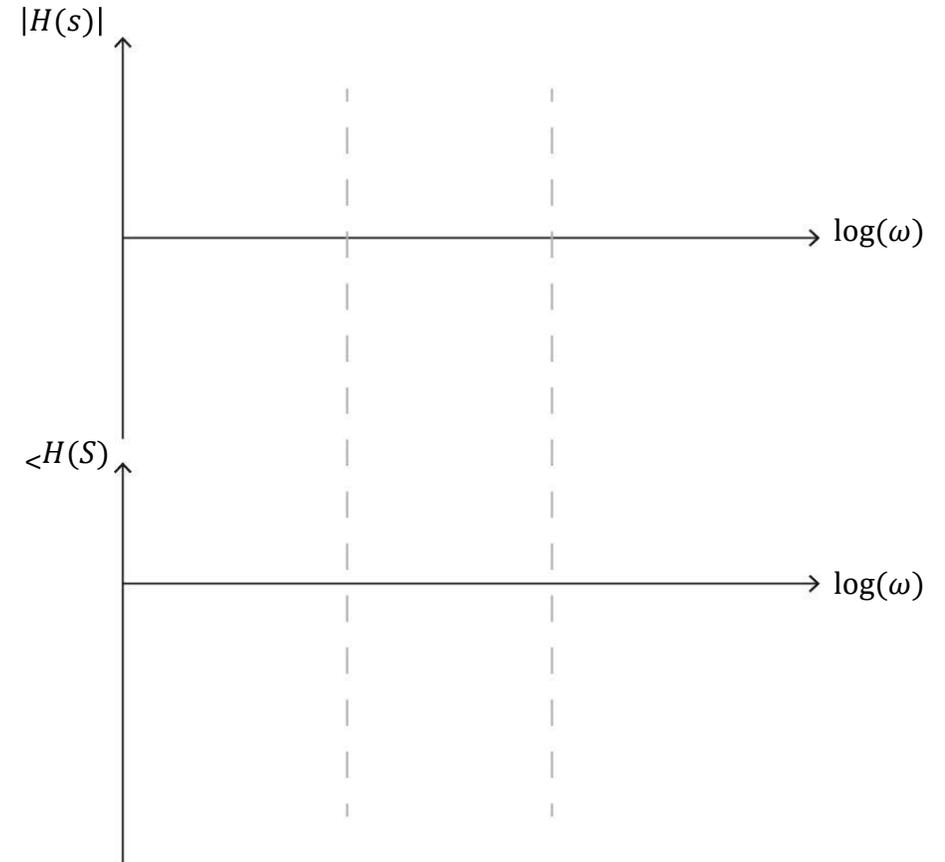
Una vez que obtuvimos la transferencia de lazo abierto del sistema, estamos en condiciones de dibujar su Diagrama de Bode para luego estudiar la estabilidad mediante el Diagrama de Nyquist

- Problema: La posición relativa del cero y uno de los polos depende del parámetro  $R_2$ 
  - Debemos estudiar cada uno de los casos de forma independiente

# Hoja 8. Ejercicio 5

- Caso 1:  $0,5R_2 = 0,02 \rightarrow R_2 = 40k\Omega$

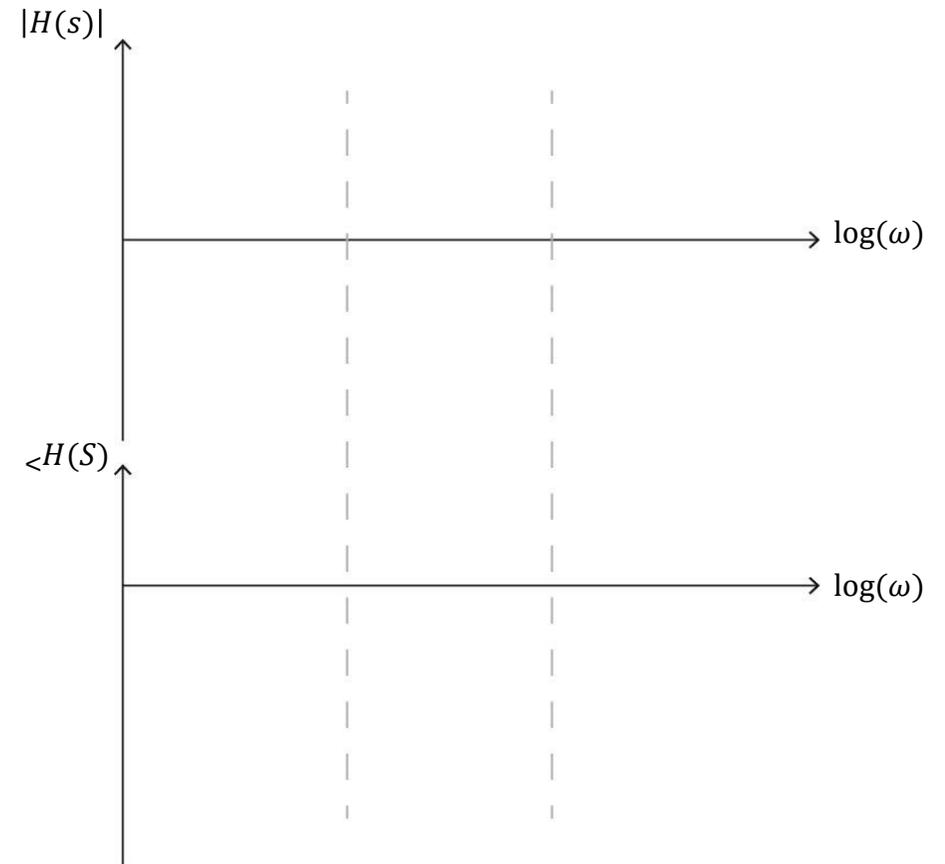
- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$



# Hoja 8. Ejercicio 5

■ Caso 1:  $0,5R_2 = 0,02 \rightarrow R_2 = 40k\Omega$

■  $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)} = \frac{4,2}{R_1s^2}$

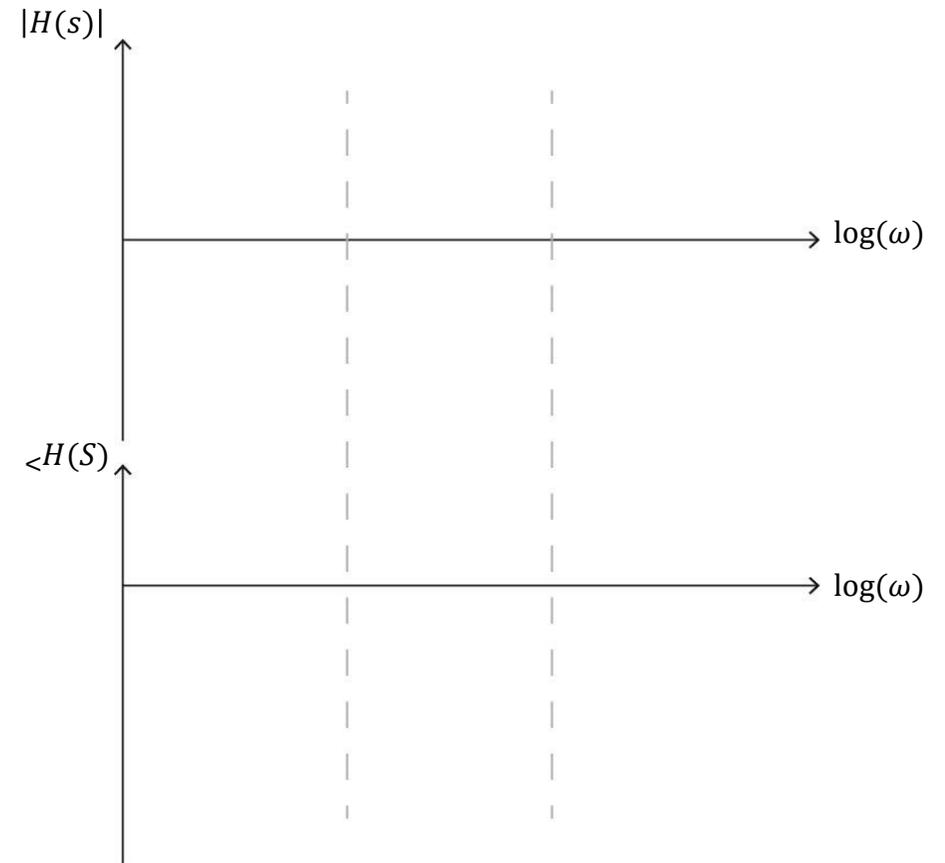


# Hoja 8. Ejercicio 5

- Caso 1:  $0,5R_2 = 0,02 \rightarrow R_2 = 40k\Omega$

- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)} = \frac{4,2}{R_1s^2}$

- $H(j\omega) = -\frac{4,2}{R_1\omega^2}$

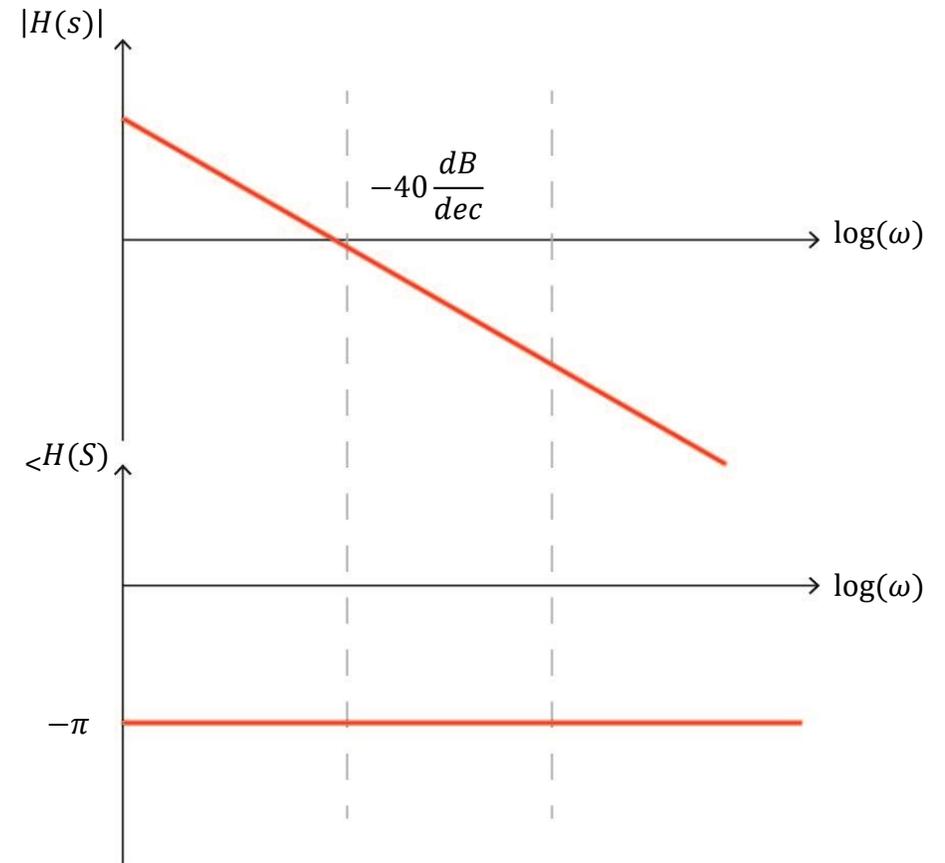


# Hoja 8. Ejercicio 5

■ Caso 1:  $0,5R_2 = 0,02 \rightarrow R_2 = 40k\Omega$

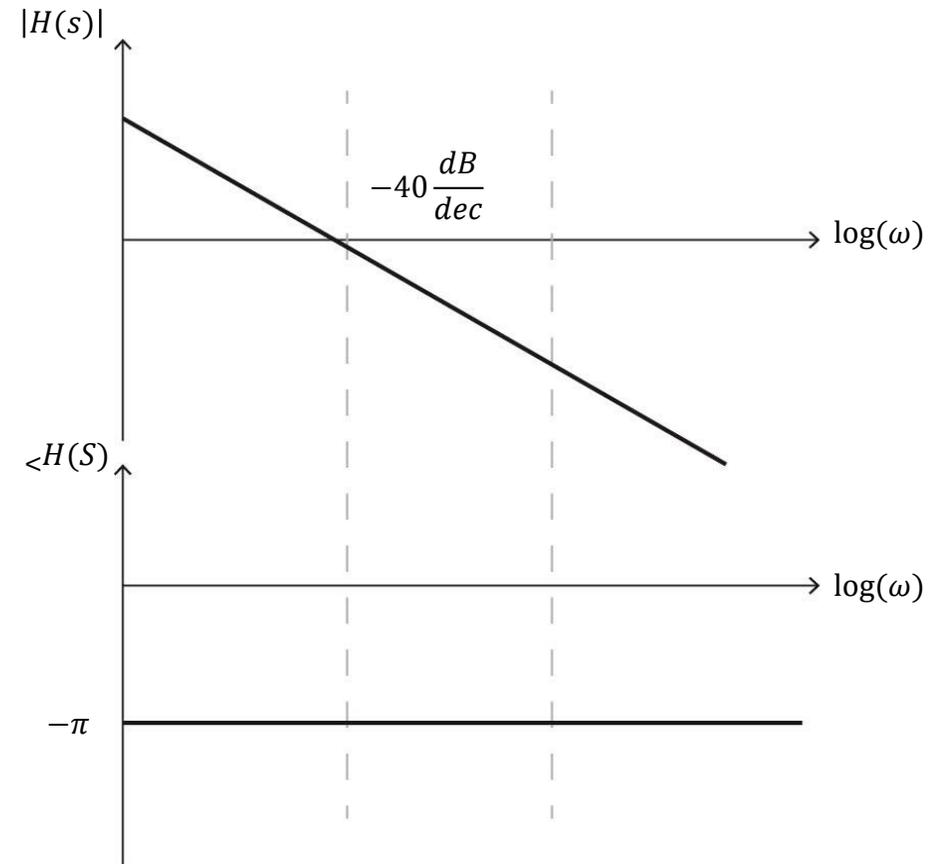
■  $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)} = \frac{4,2}{R_1s^2}$

■  $H(j\omega) = -\frac{4,2}{R_1\omega^2}$



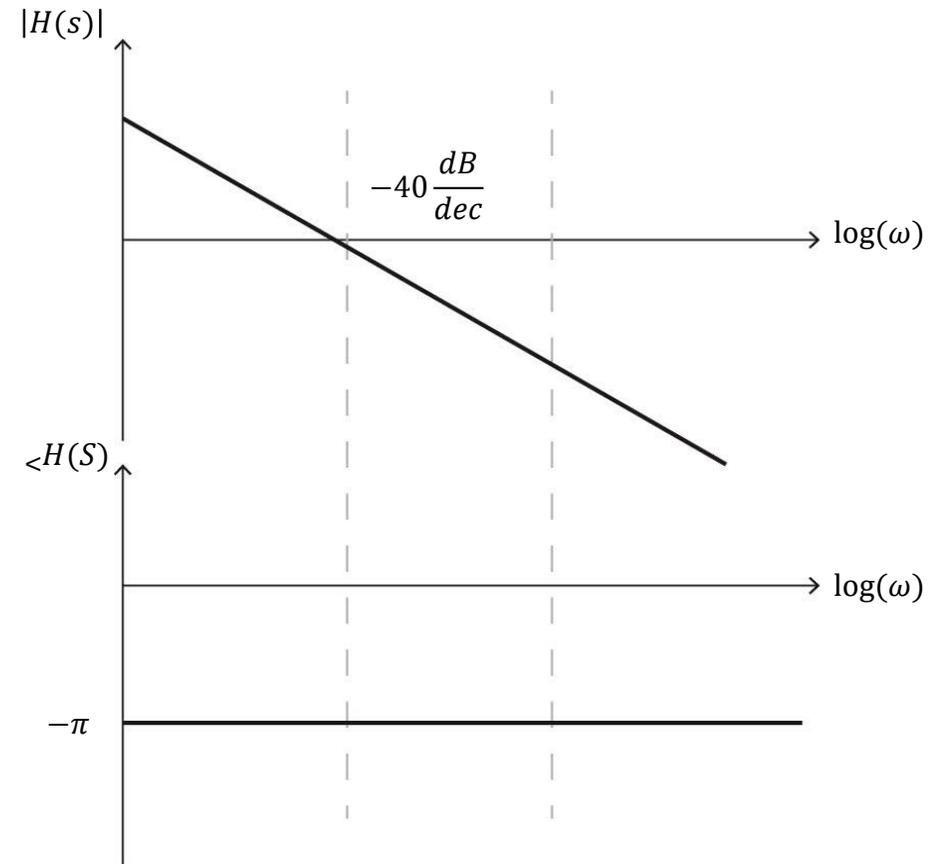
# Hoja 8. Ejercicio 5

- Una vez que tenemos el Diagrama de Bode, procedemos a trazar el Diagrama de Nyquist



# Hoja 8. Ejercicio 5

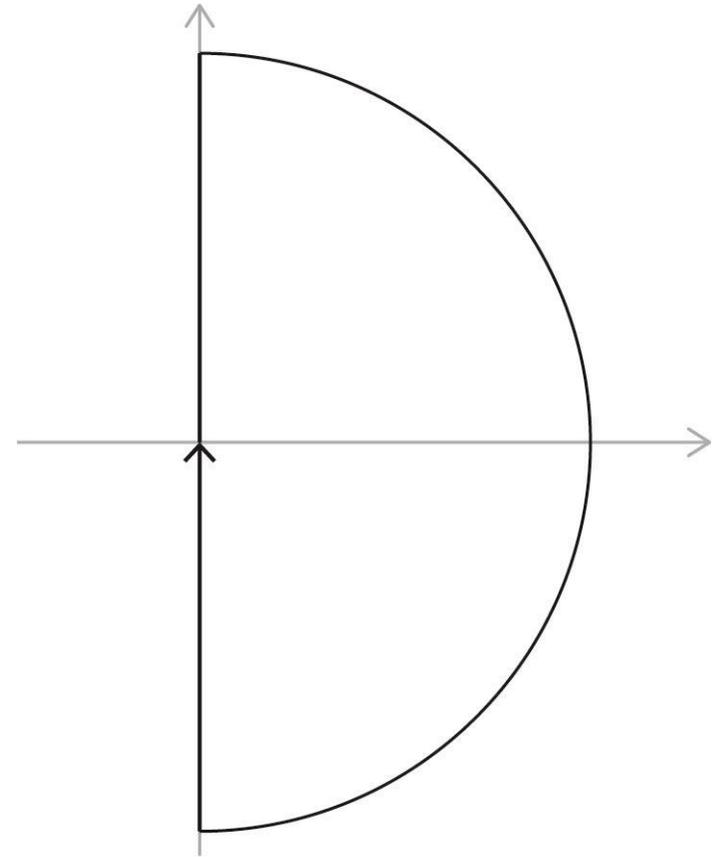
- Una vez que tenemos el Diagrama de Bode, procedemos a trazar el Diagrama de Nyquist
  - Para esto, debemos determinar la curva  $\Gamma$ , analítica en  $H_{OL}(s)$



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

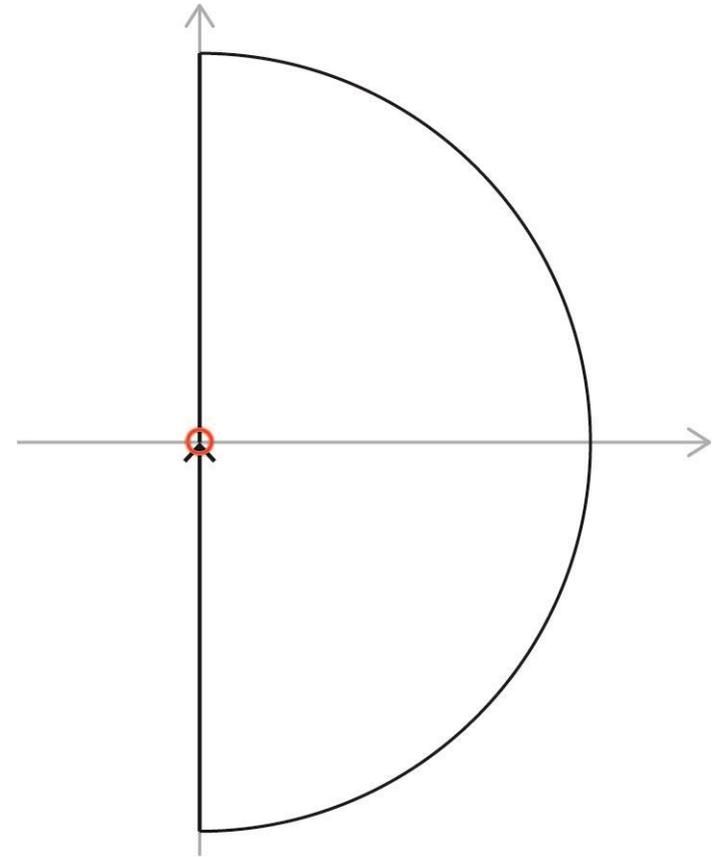
- Una vez que tenemos el Diagrama de Bode, procedemos a trazar el Diagrama de Nyquist
  - Para esto, debemos determinar la curva  $\Gamma$ , analítica en  $H_{OL}(s)$
  - Podemos usar la misma curva  $\Gamma$  que hemos usado en otros ejercicios?



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

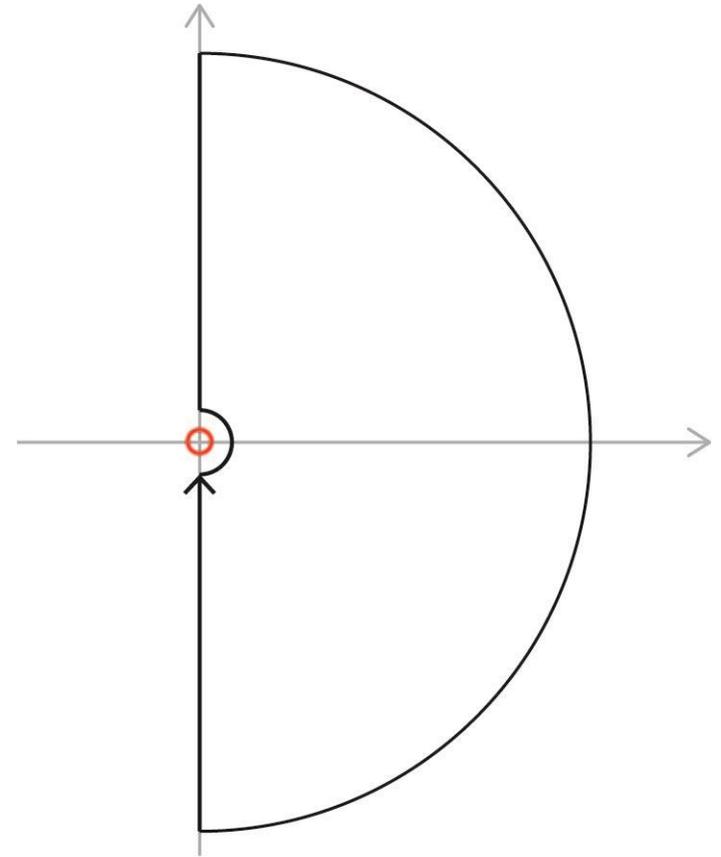
- Una vez que tenemos el Diagrama de Bode, procedemos a trazar el Diagrama de Nyquist
  - Para esto, debemos determinar la curva  $\Gamma$ , analítica en  $H_{OL}(s)$
  - Podemos usar la misma curva  $\Gamma$  que hemos usado en otros ejercicios?
    - $H_{OL}(s)$  tiene un polo doble sobre  $\Gamma$



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

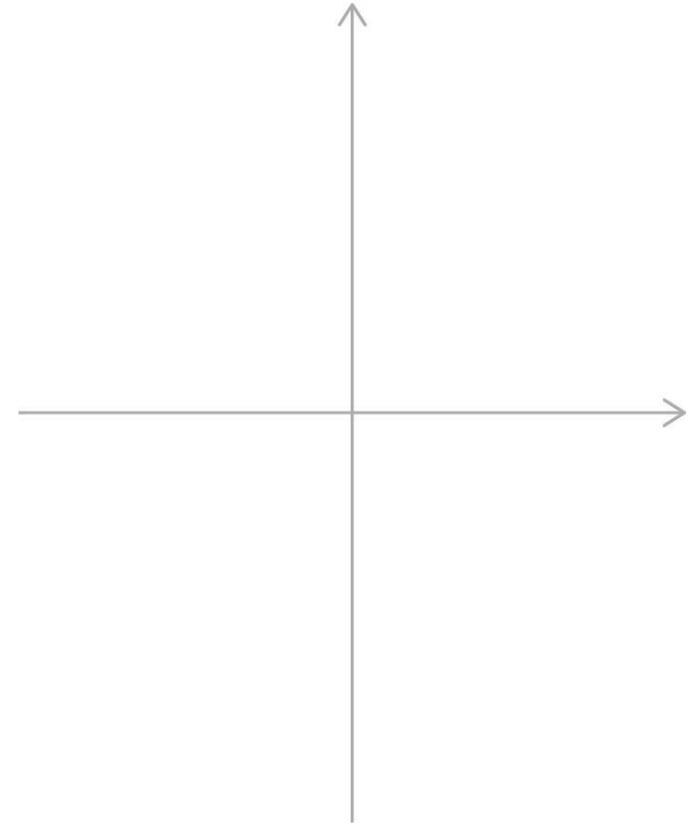
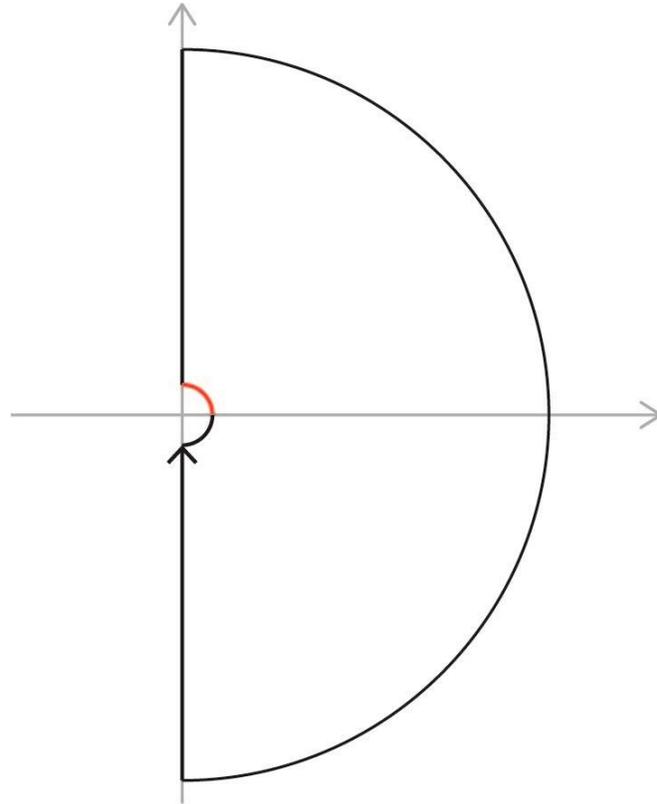
- Una vez que tenemos el Diagrama de Bode, procedemos a trazar el Diagrama de Nyquist
  - Para esto, debemos determinar la curva  $\Gamma$ , analítica en  $H_{OL}(s)$
  - Podemos usar la misma curva  $\Gamma$  que hemos usado en otros ejercicios?
    - $H_{OL}(s)$  tiene un polo doble sobre  $\Gamma$
    - Usaremos una curva  $\Gamma$  alternativa, que rodea la singularidad con un radio  $\varepsilon$



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

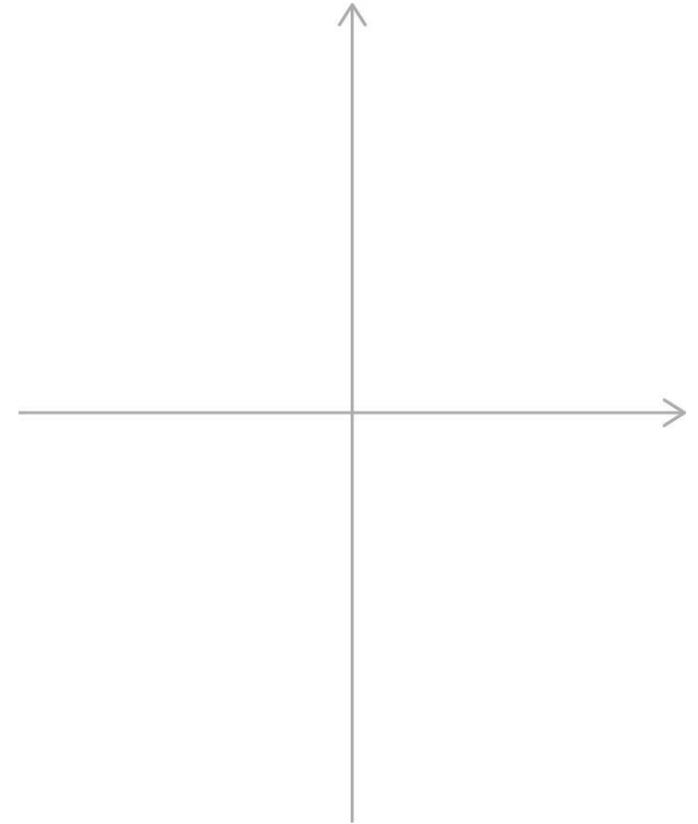
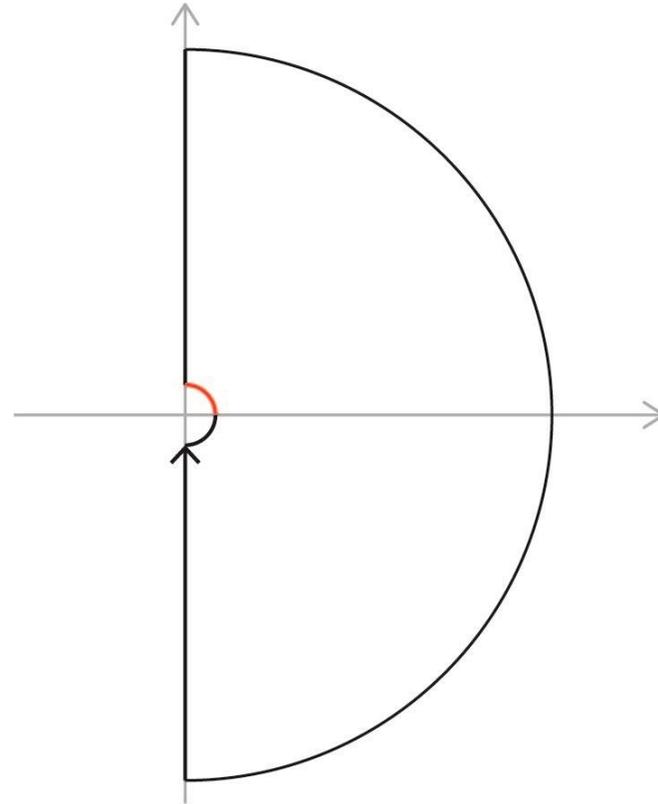
- $H_{OL}(s) = \frac{4,2}{R_1 s^2}$
- $\Gamma(s) = \varepsilon \cdot e^{j\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



# Hoja 8. Ejercicio 5

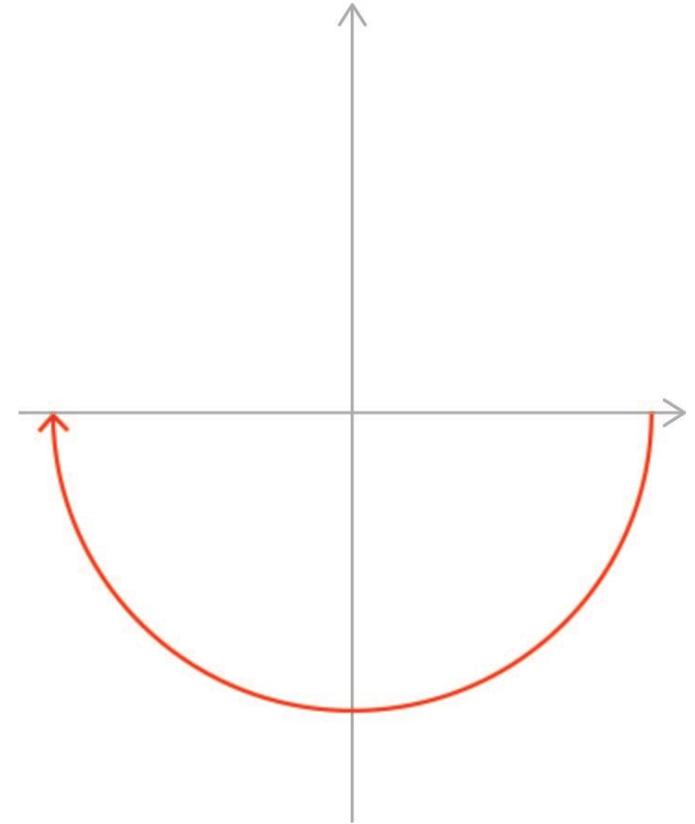
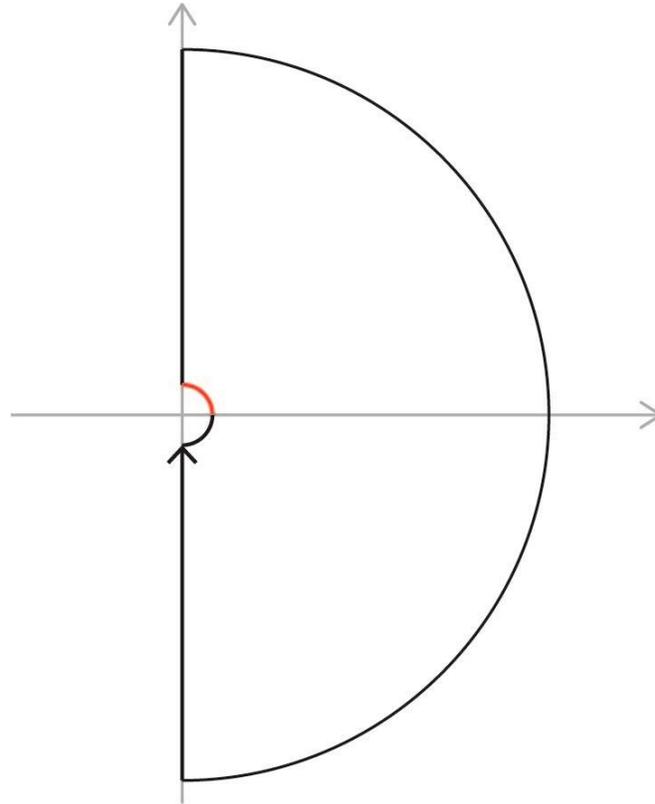
---

- $H_{OL}(s) = \frac{4,2}{R_1 s^2}$
- $\Gamma(s) = \varepsilon \cdot e^{j\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $H_{OL}(\Gamma) = \frac{4,2}{R_1 \varepsilon^2} \cdot e^{-2j\theta}$



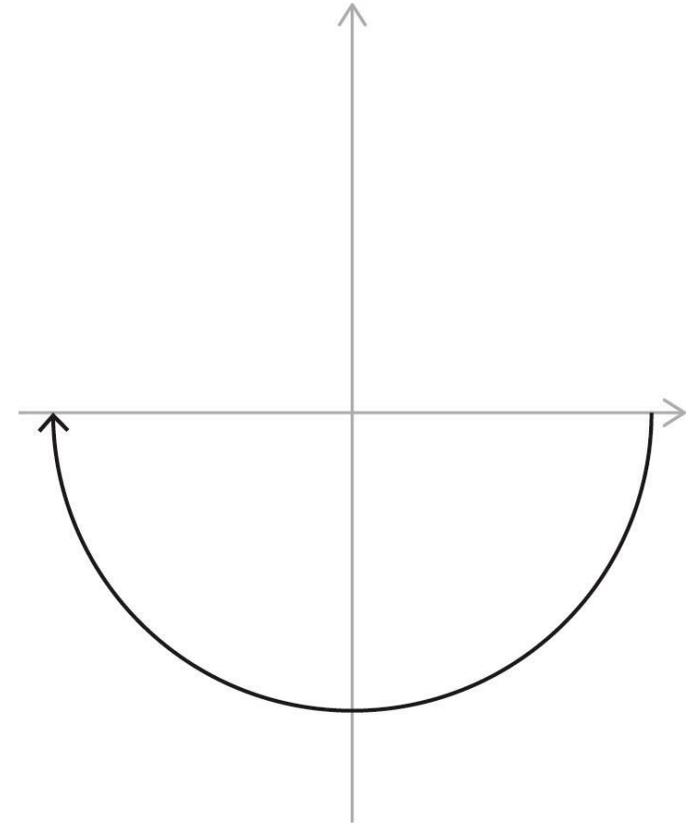
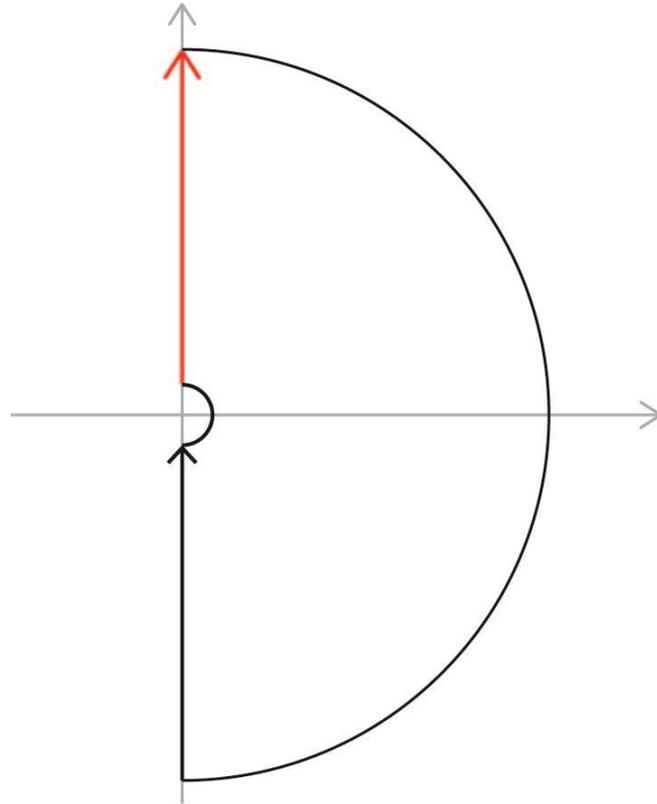
# Hoja 8. Ejercicio 5

- $H_{OL}(s) = \frac{4,2}{R_1 s^2}$
- $\Gamma(s) = \varepsilon \cdot e^{j\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $H_{OL}(\Gamma) = \frac{4,2}{R_1 \varepsilon^2} \cdot e^{-2j\theta}$

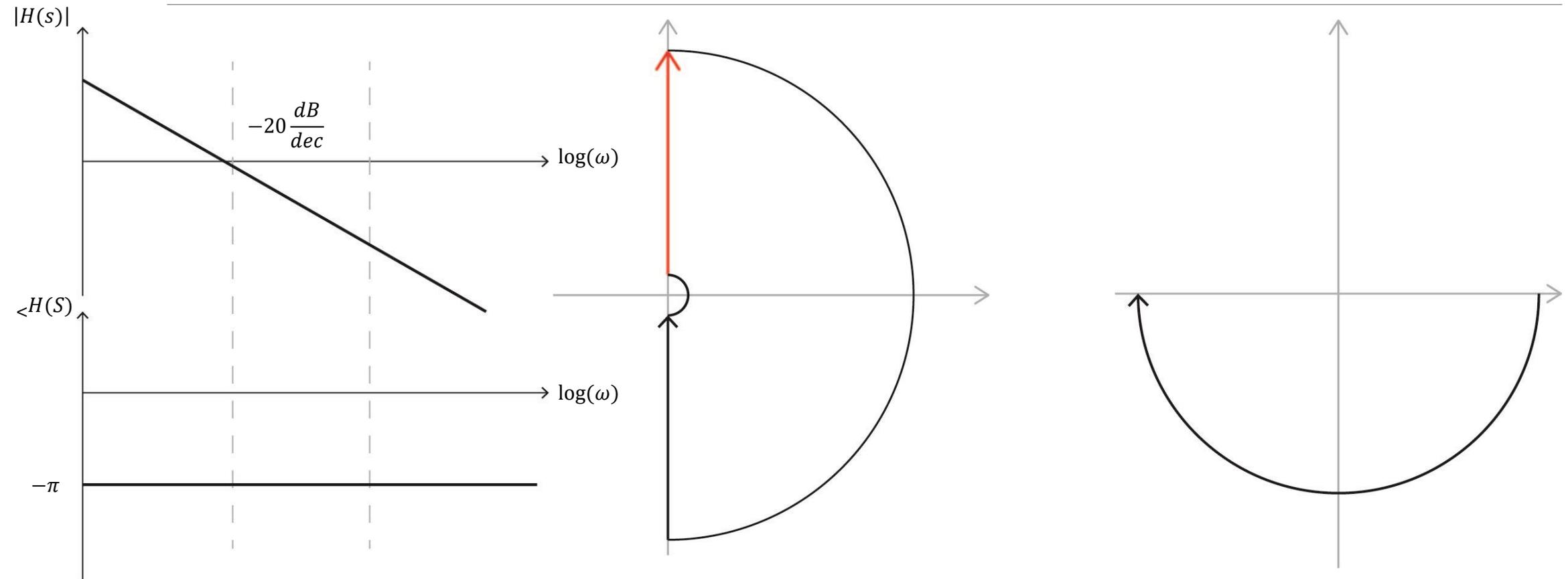


# Hoja 8. Ejercicio 5

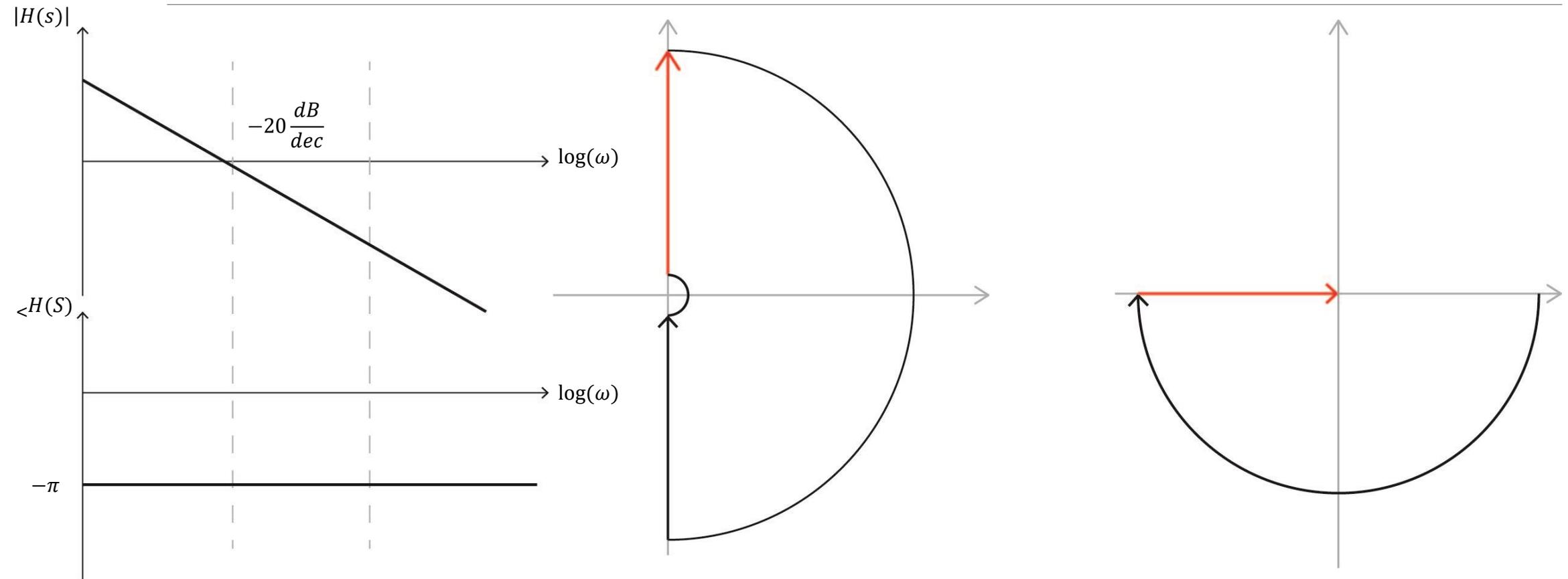
- $H_{OL}(s) = \frac{4,2}{R_1 s^2}$
- $\Gamma(s) = j\omega, \omega \in (0, \infty]$



# Hoja 8. Ejercicio 5



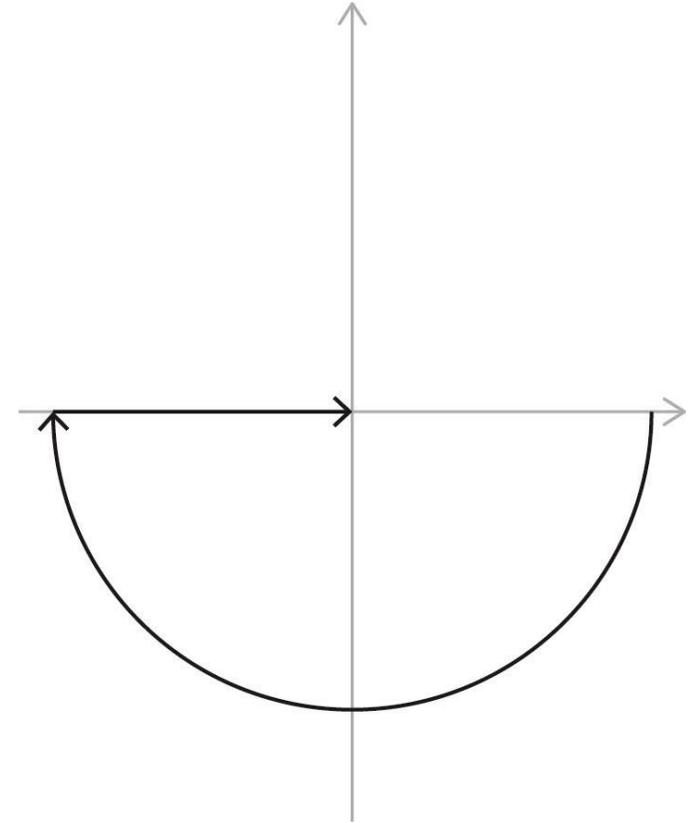
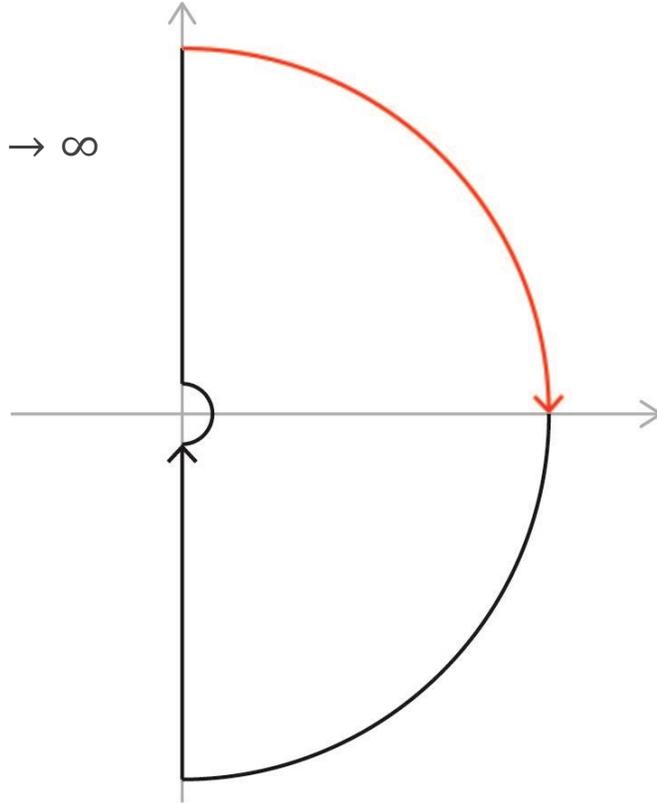
# Hoja 8. Ejercicio 5



# Hoja 8. Ejercicio 5

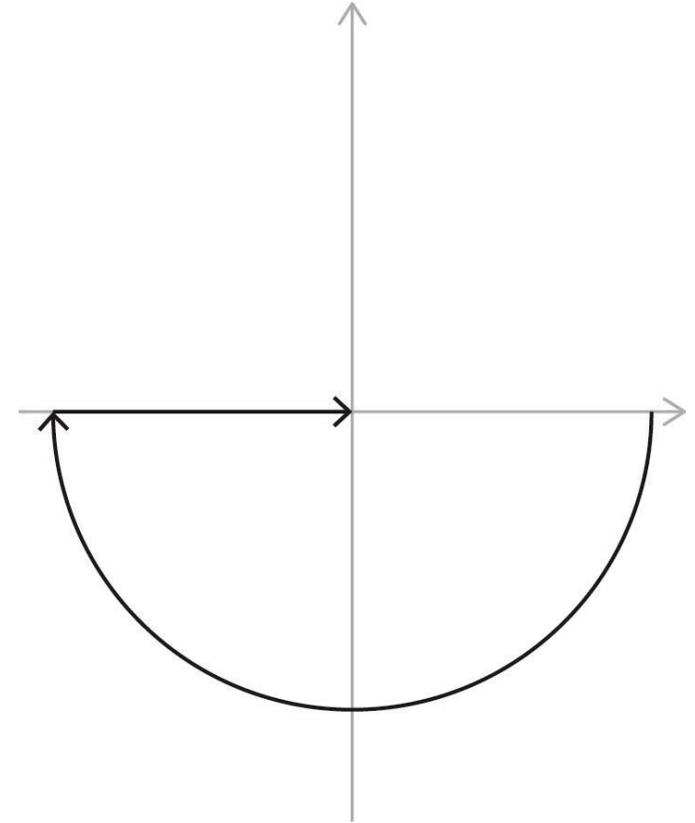
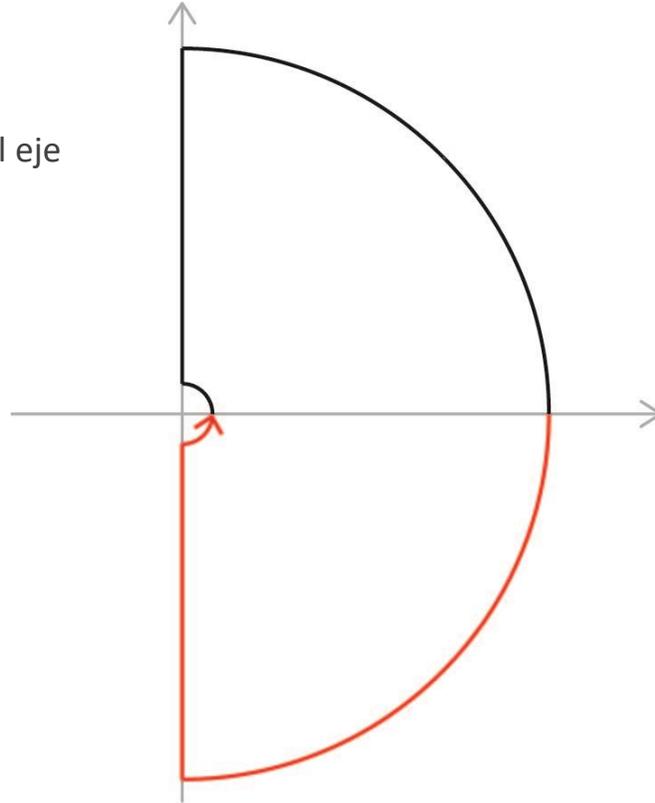
---

- $H_{OL}(s) = \frac{4,2}{R_1 s^2}$
- $\Gamma(s) = r \cdot e^{j\theta}, \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right], r \rightarrow \infty$



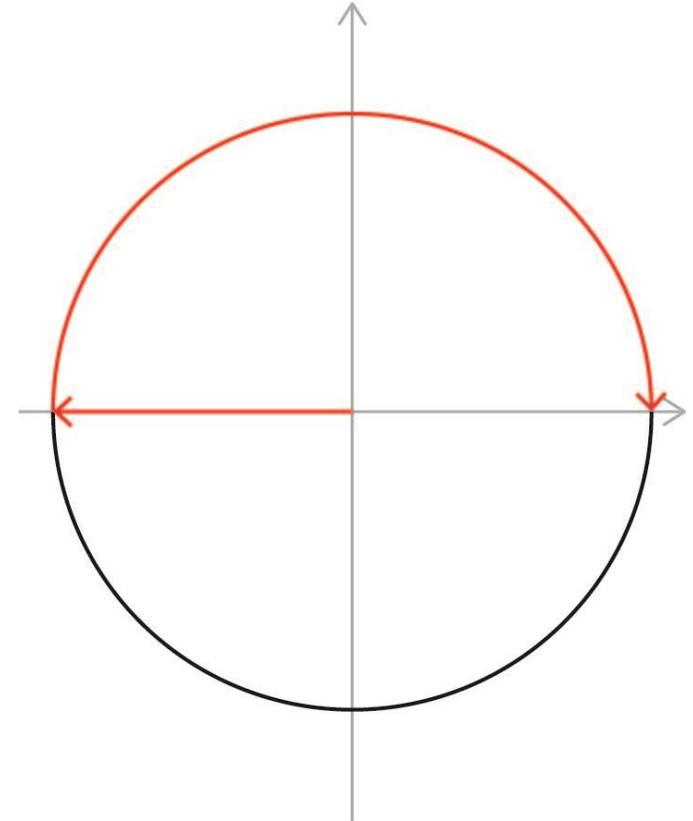
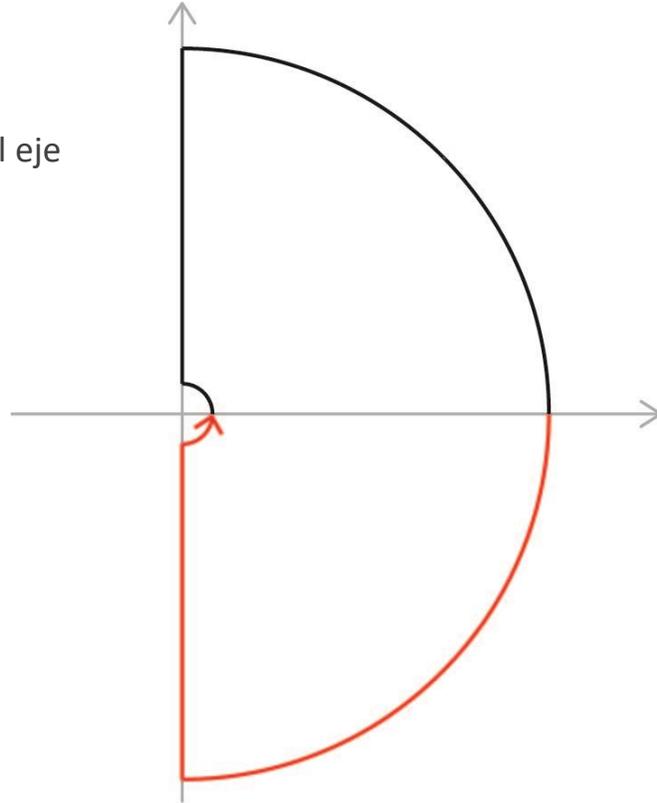
# Hoja 8. Ejercicio 5

- $H_{OL}(s)$  es una función de coeficientes reales
- $H_{OL}(\Gamma)$  es simétrica respecto al eje real



# Hoja 8. Ejercicio 5

- $H_{OL}(s)$  es una función de coeficientes reales
- $H_{OL}(\Gamma)$  es simétrica respecto al eje real

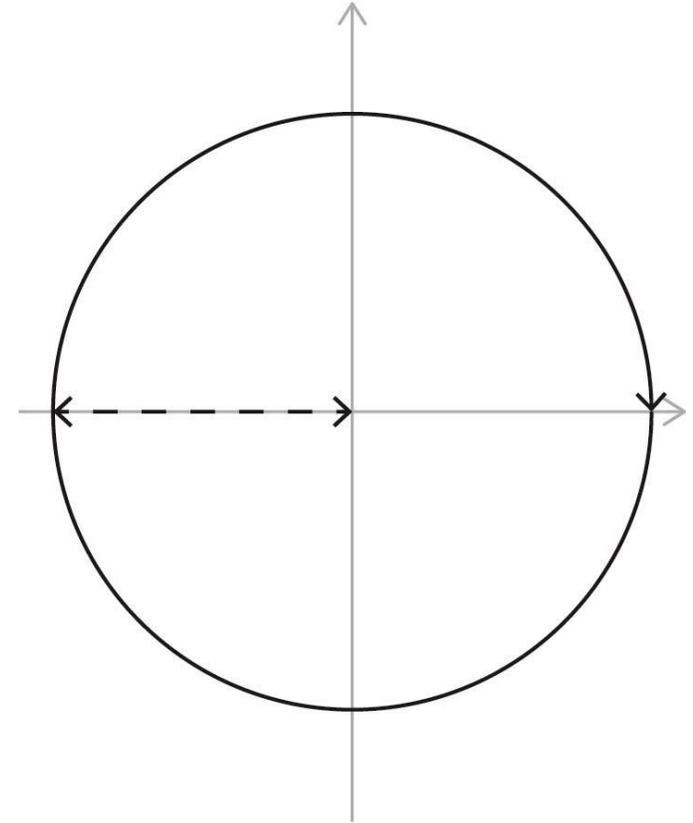


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

## Criterio de Nyquist

- $Z = N + P$ 
  - $Z$  = Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
  - $P$  = Número de polos de  $H_{OL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
  - $N$  = Número de rodeos de  $H_{OL}(\Gamma)$  alrededor de  $-1$

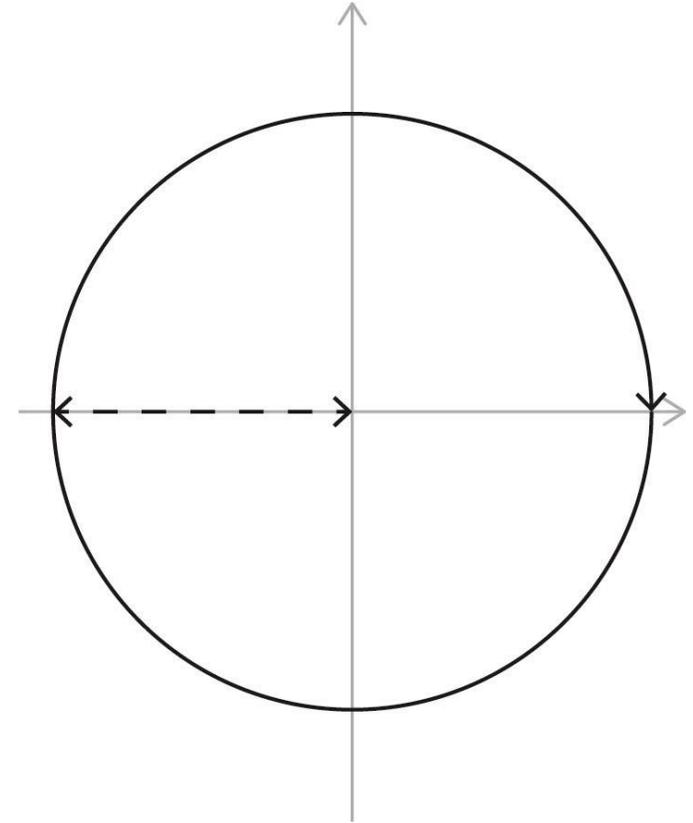


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

Criterio de Nyquist

- $Z = N + P$ 
  - $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
  - $P = 0$
  - $N = 1$

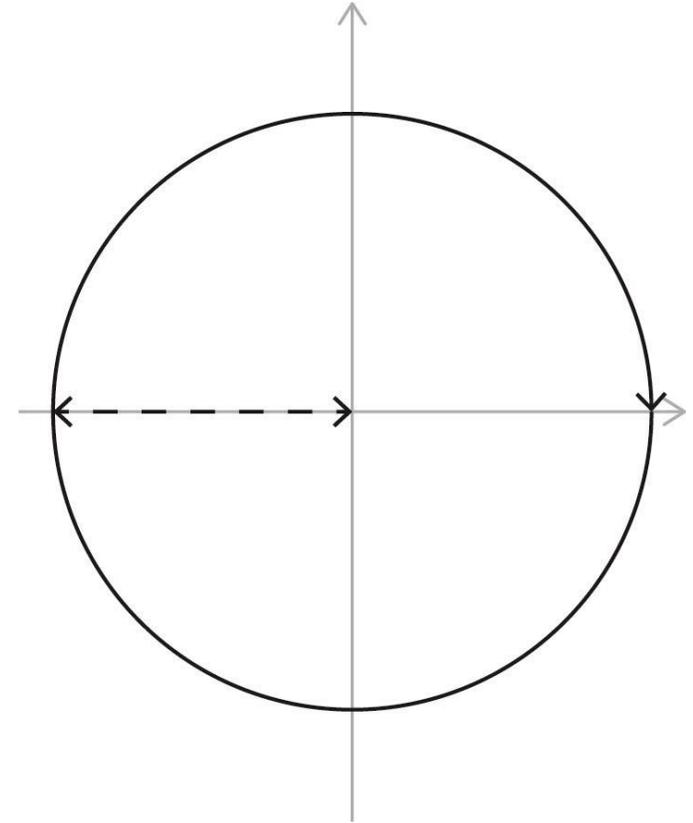


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

## Criterio de Nyquist

- $Z = N + P = 1 \rightarrow$  Sistema inestable
- $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
- $P = 0$
- $N = 1$ 
  - Si una de las curvas de la descomposición en curvas de Jordan de  $H_{OL}(\Gamma)$  pasa por encima de  $-1, -1$  no es un punto interior, sino un punto de la frontera de dicha curva

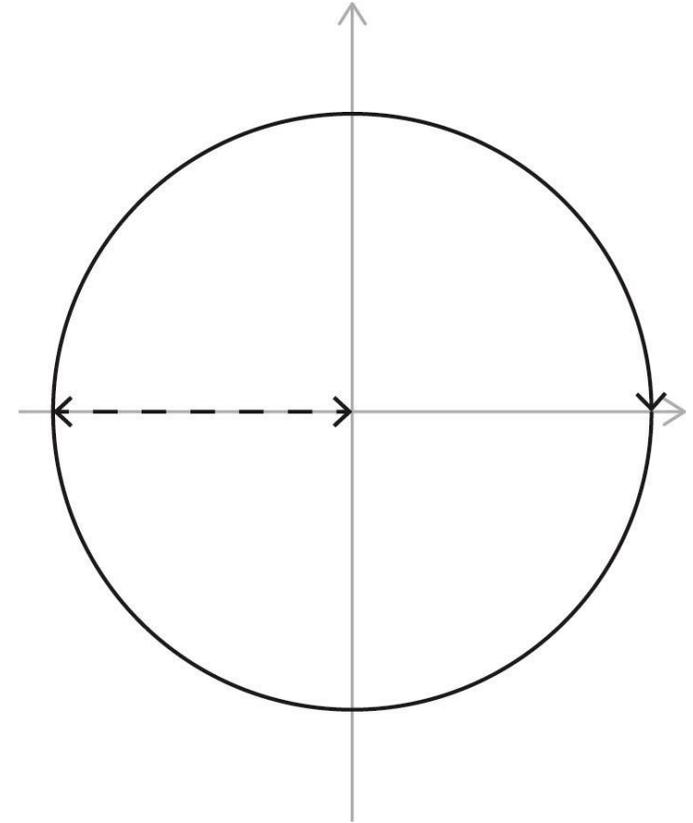


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

## Criterio de Nyquist

- $Z = N + P = 1 \rightarrow$  Sistema inestable
- $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
- $P = 0$
- $N = 1$ 
  - Si una de las curvas de la descomposición en curvas de Jordan de  $H_{OL}(\Gamma)$  pasa por encima de  $-1$ ,  $-1$  no es un punto interior, sino un punto de la frontera de dicha curva
  - Además:
    - Que significa que  $-1$  sea parte de la curva mapeada?

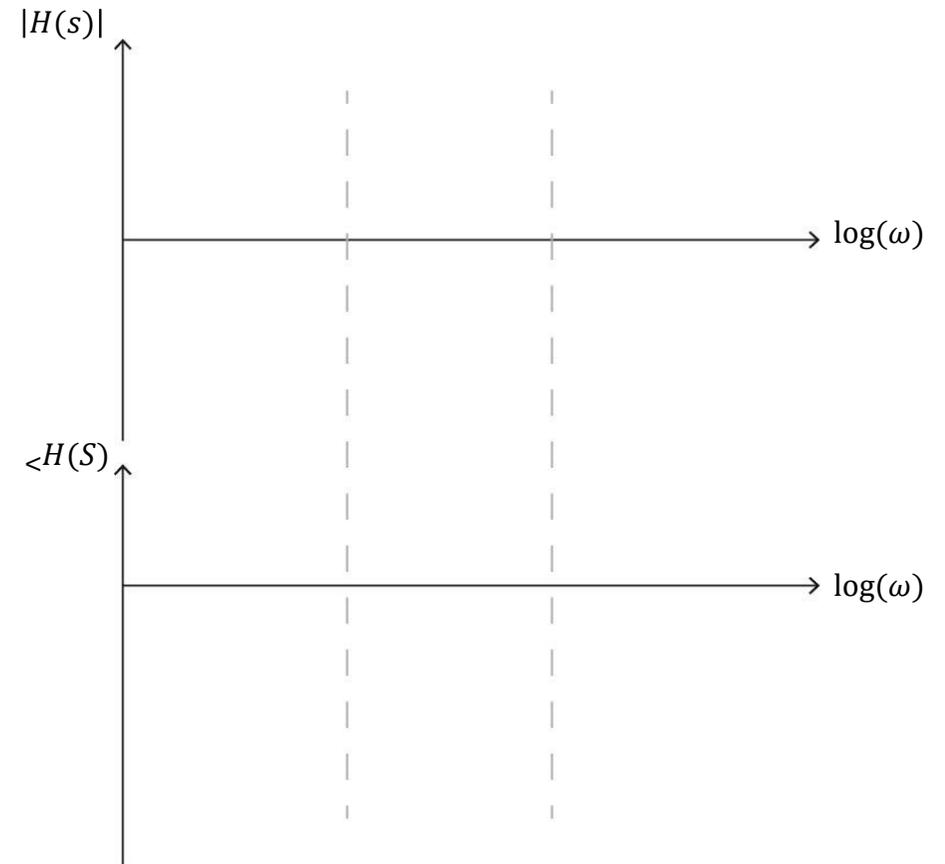


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

■ Caso 2:  $R_2 > 40k\Omega$

■  $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$



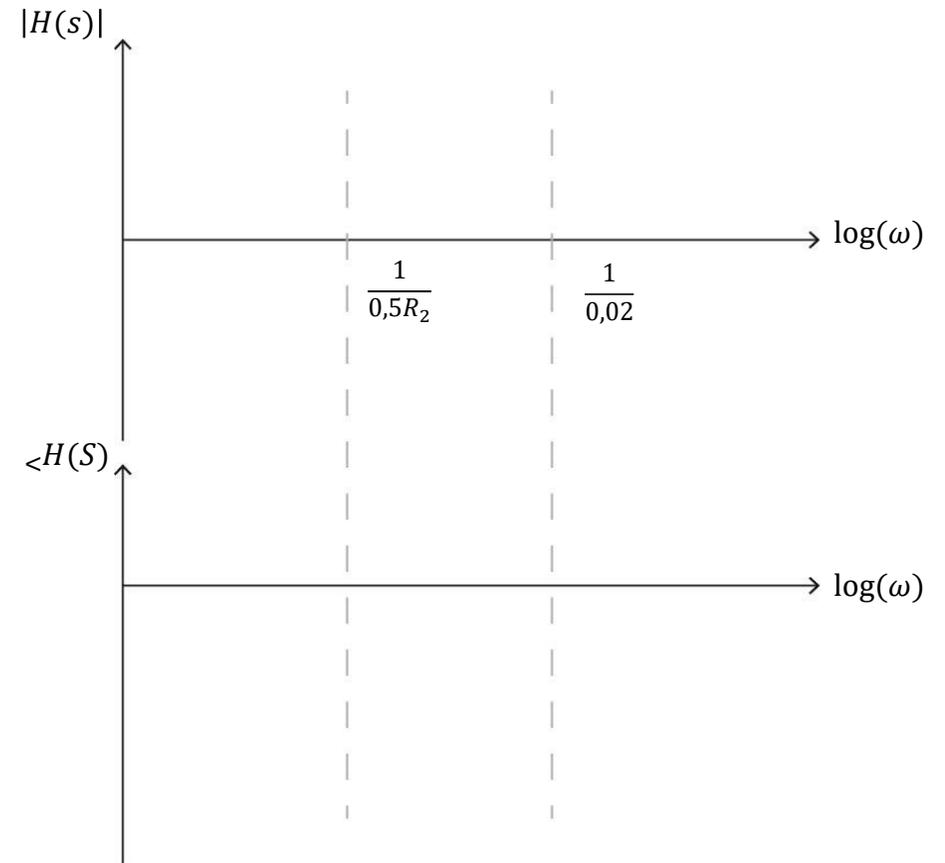
# Hoja 8. Ejercicio 5

■ Caso 2:  $R_2 > 40k\Omega$

■  $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$

■ Polos:  $\left\{0,0, -\frac{1}{0,02}\right\}$

■ Ceros:  $\left\{\frac{-1}{0,5R_2}\right\}$



# Hoja 8. Ejercicio 5

## ■ Caso 2: $R_2 > 40k\Omega$

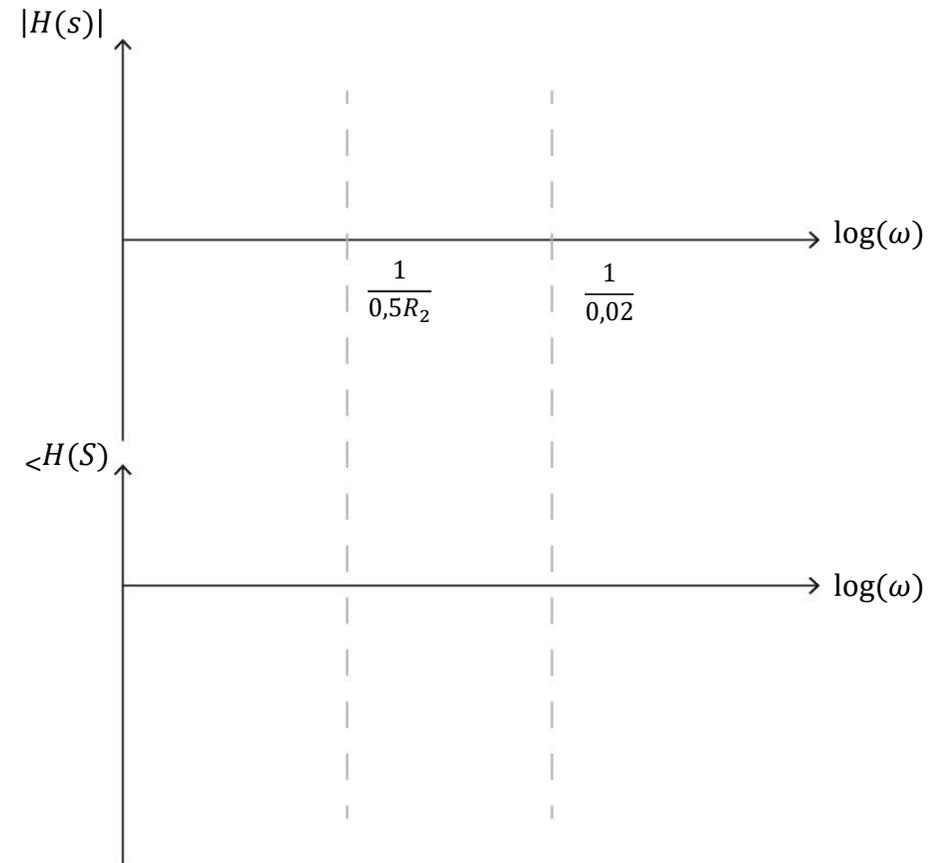
- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$

- Polos:  $\left\{0,0, -\frac{1}{0,02}\right\}$

- Ceros:  $\left\{\frac{-1}{0,5R_2}\right\}$

- Si  $0 \ll \omega \ll \frac{1}{0,5R_2}$

- $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{4,2}{R_1s^2}$



# Hoja 8. Ejercicio 5

## ■ Caso 2: $R_2 > 40k\Omega$

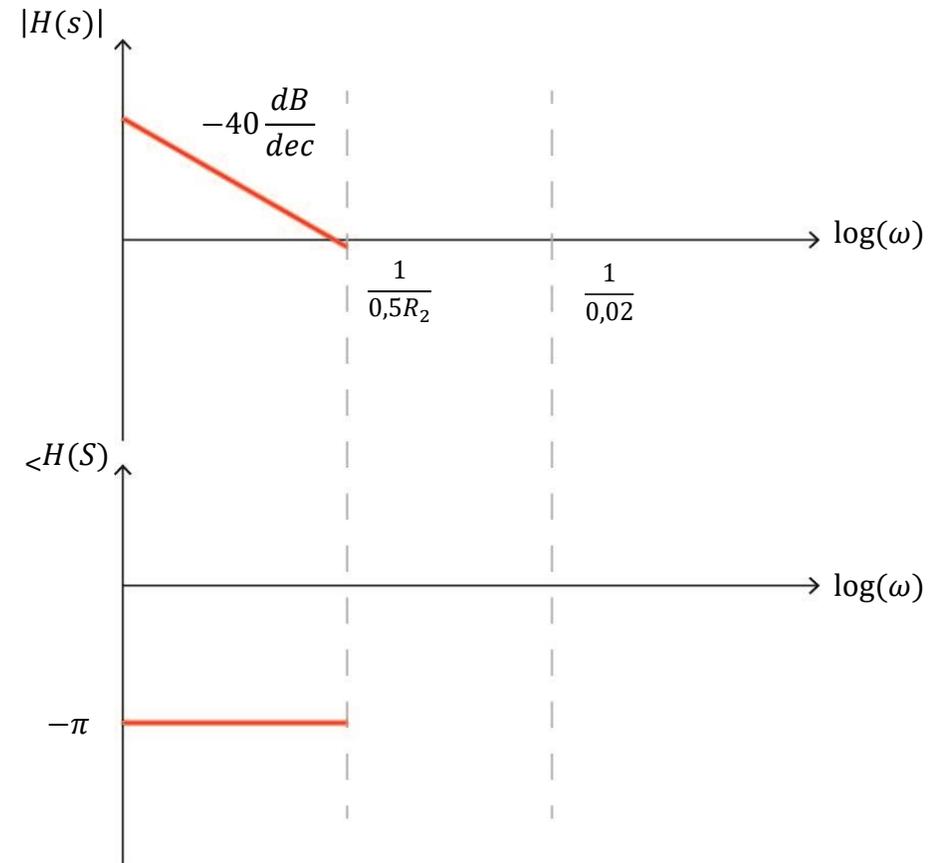
- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$

- Polos:  $\left\{0,0, -\frac{1}{0,02}\right\}$

- Ceros:  $\left\{\frac{-1}{0,5R_2}\right\}$

- Si  $0 \ll \omega \ll \frac{1}{0,5R_2}$

- $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{-4,2}{R_1\omega^2}$

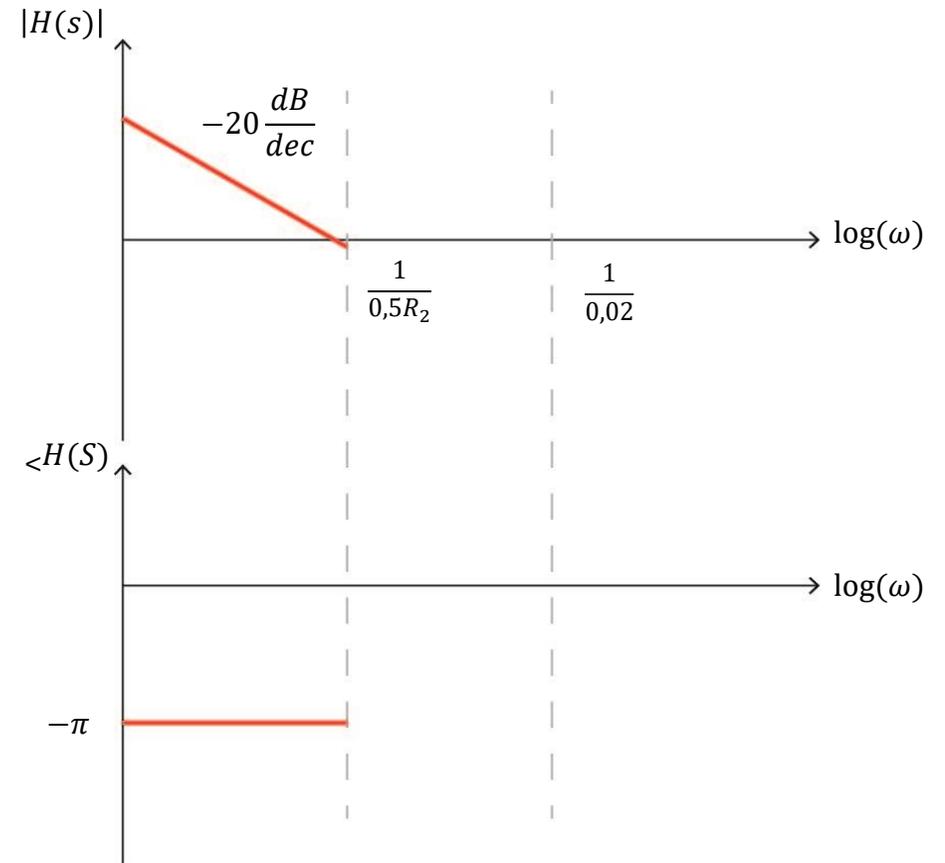


# Hoja 8. Ejercicio 5

- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$

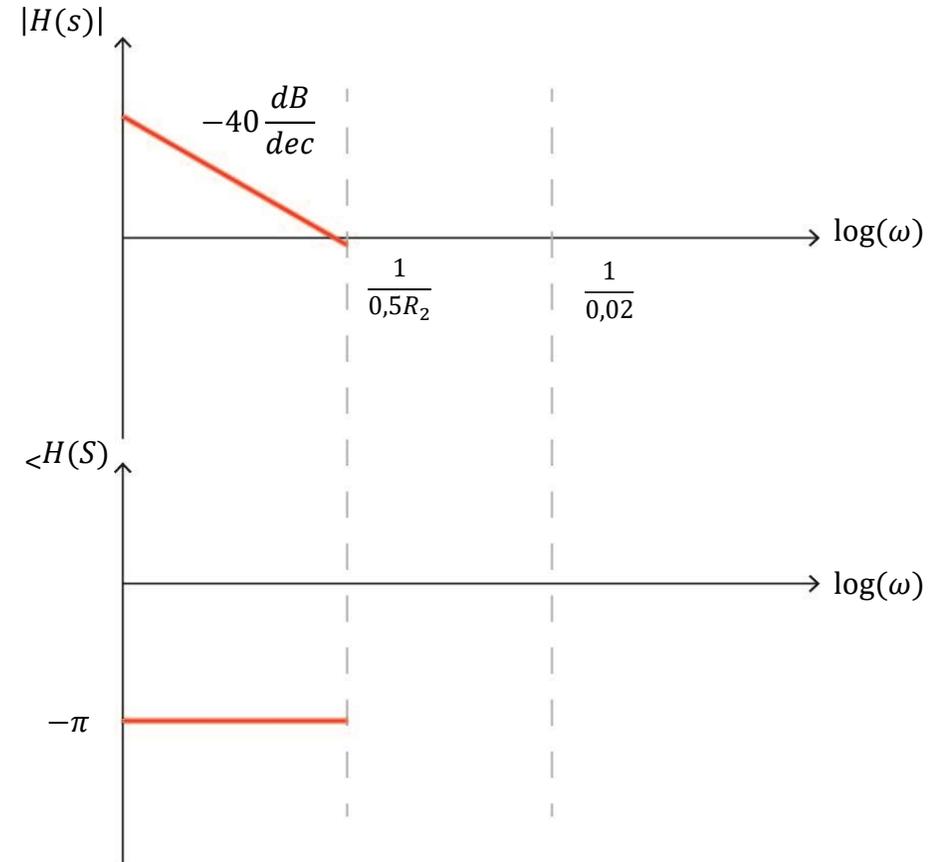
- Si  $\frac{1}{0,5R_2} \ll \omega \ll \frac{1}{0,02}$

- $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{-4,2(0,5R_2j\omega)}{R_1\omega^2}$



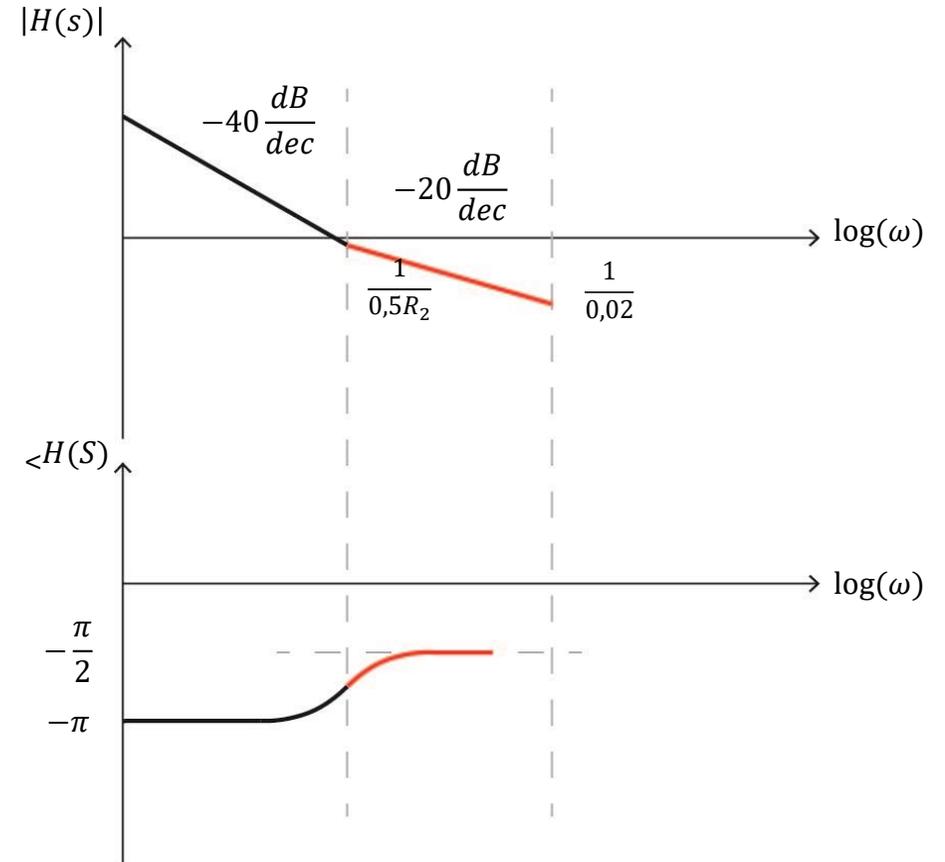
# Hoja 8. Ejercicio 5

- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$
- Si  $\frac{1}{0,5R_2} \ll \omega \ll \frac{1}{0,02}$ 
  - $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{-4,2(0,5R_2j\omega)}{R_1\omega^2} = -j\frac{K}{\omega}$



# Hoja 8. Ejercicio 5

- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$
- Si  $\frac{1}{0,5R_2} \ll \omega \ll \frac{1}{0,02}$ 
  - $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{-4,2(0,5R_2j\omega)}{R_1\omega^2} = -j\frac{K}{\omega}$

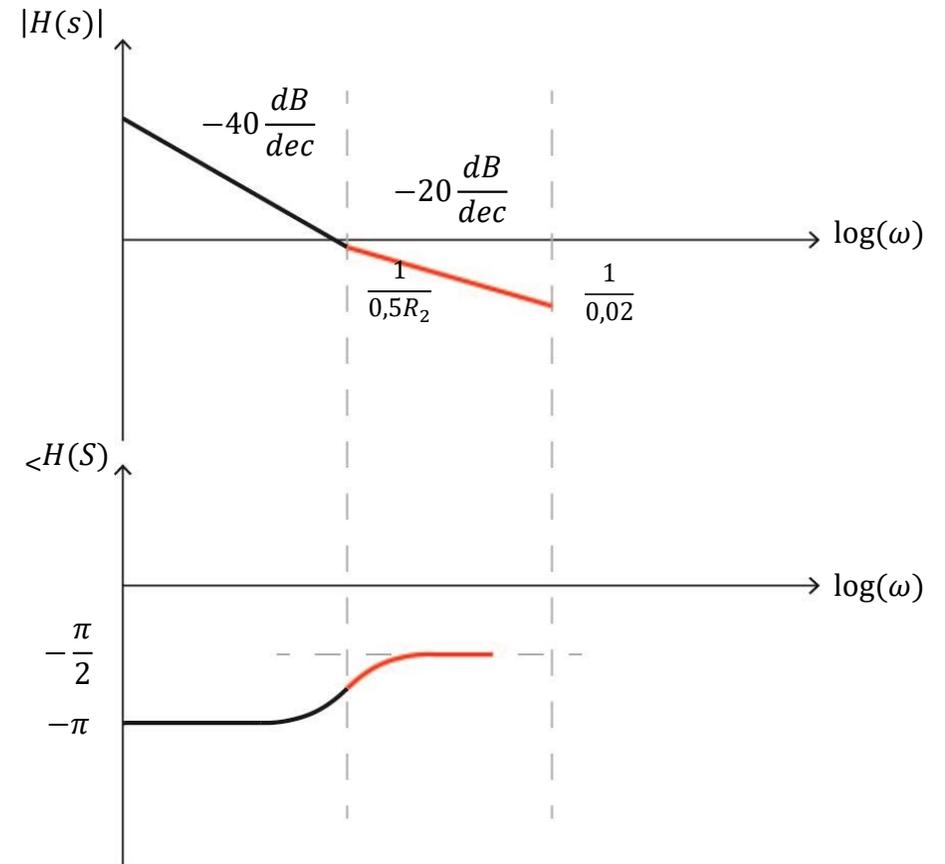


# Hoja 8. Ejercicio 5

- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$

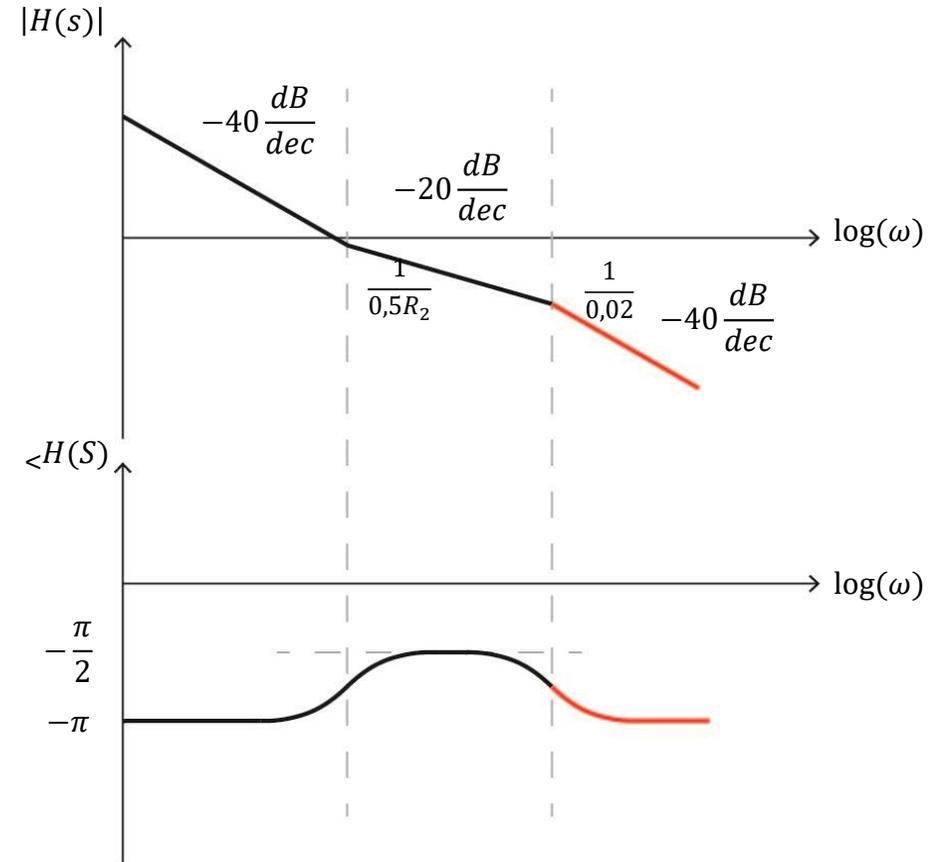
- Si  $\frac{1}{0,02} \ll \omega$

- $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{-4,2(0,5R_2j\omega)}{R_1\omega^2(0,02j\omega)}$



# Hoja 8. Ejercicio 5

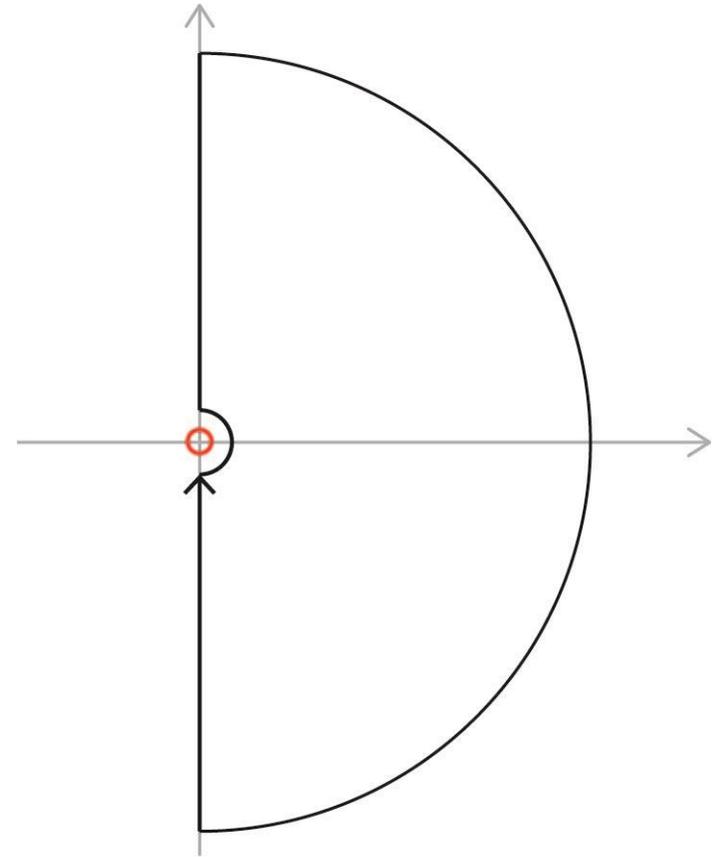
- $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \Big|_{OL} = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$
- Si  $\frac{1}{0,02} \ll \omega$ 
  - $H_{OL}(j\omega) \cong \frac{-4,2(0,5R_2j\omega)}{R_1\omega^2(0,02j\omega)} = -\frac{K}{\omega^2}$



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

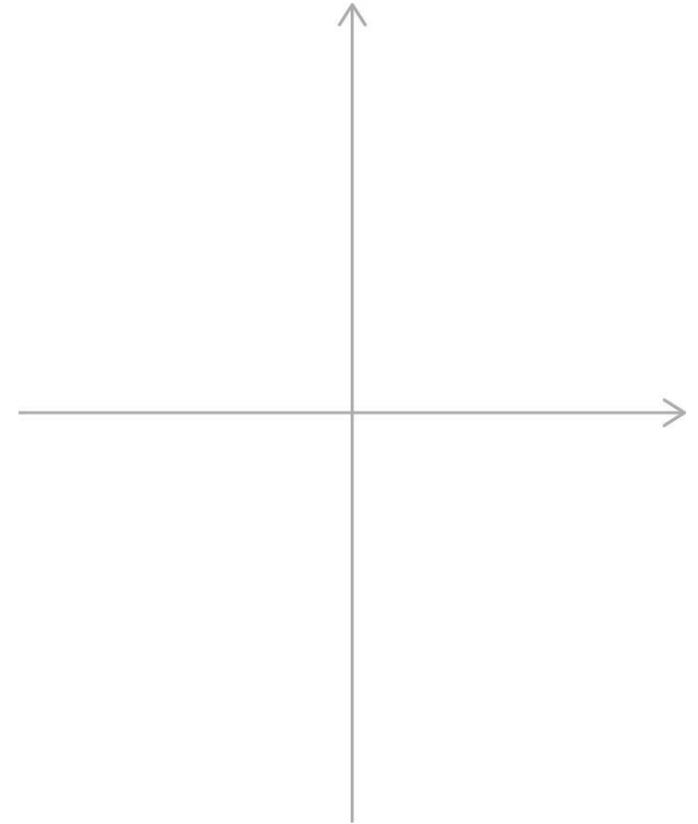
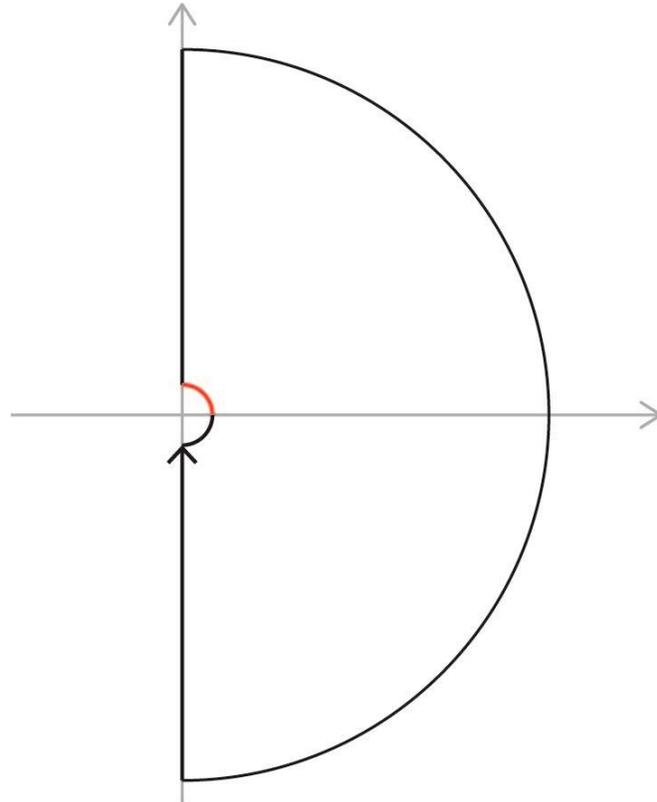
- De la misma manera que para el caso anterior, mapeamos la curva  $\Gamma$  según  $H_{OL}(s)$



# Hoja 8. Ejercicio 5

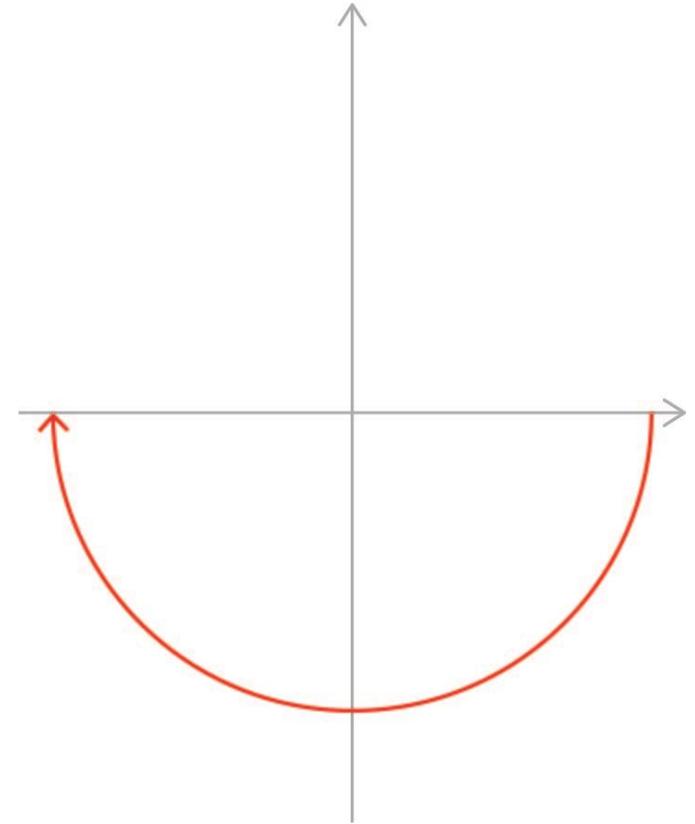
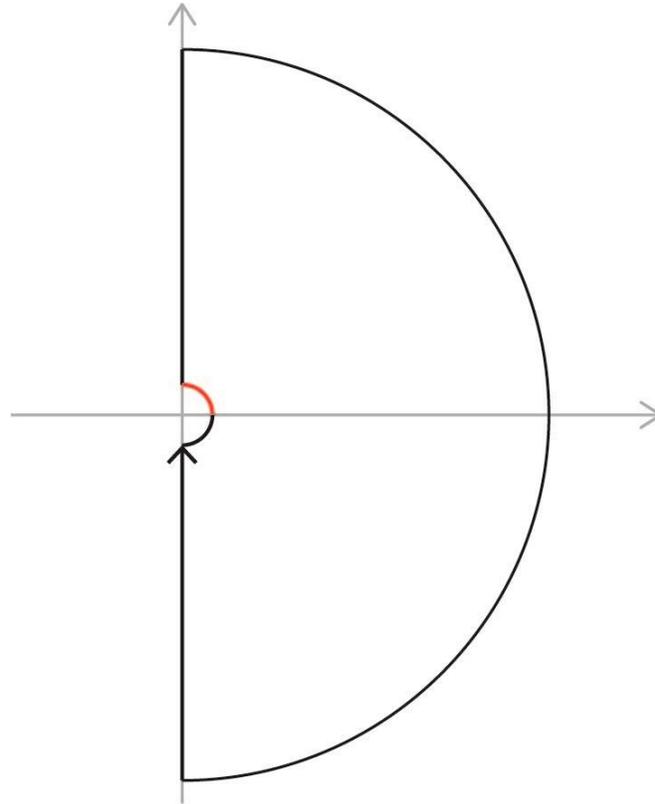
---

- $H_{OL}(s) = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$
- $\Gamma(s) = \varepsilon \cdot e^{j\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $H_{OL}(\Gamma) = \frac{4,2}{R_1\varepsilon^2} \cdot e^{-2j\theta}$



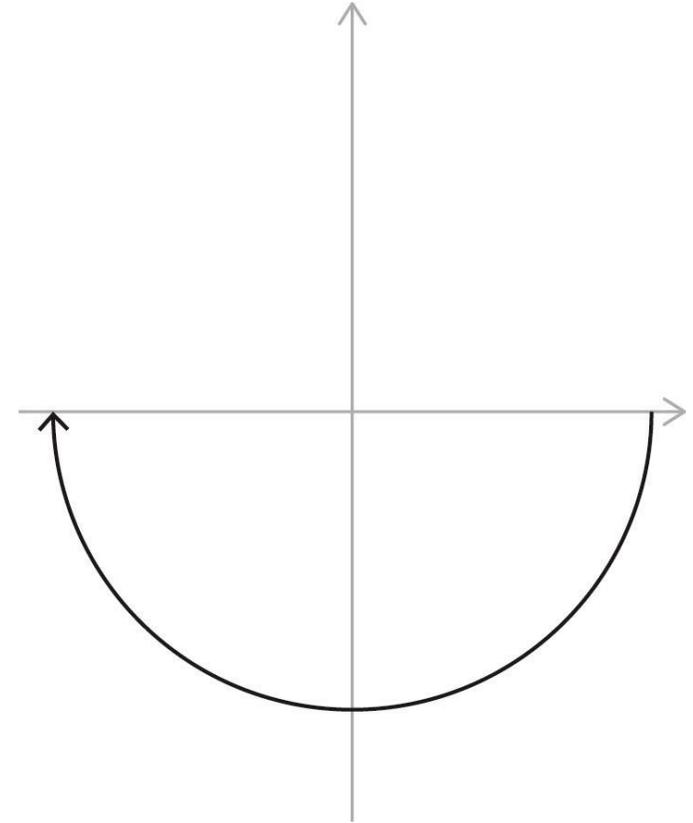
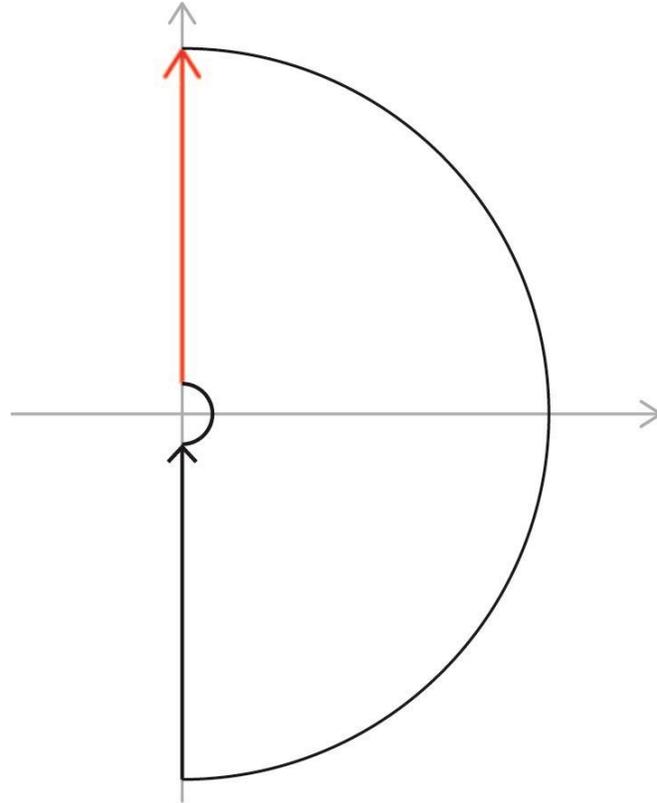
# Hoja 8. Ejercicio 5

- $H_{OL}(s) = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$
- $\Gamma(s) = \varepsilon \cdot e^{j\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $H_{OL}(\Gamma) = \frac{4,2}{R_1\varepsilon^2} \cdot e^{-2j\theta}$

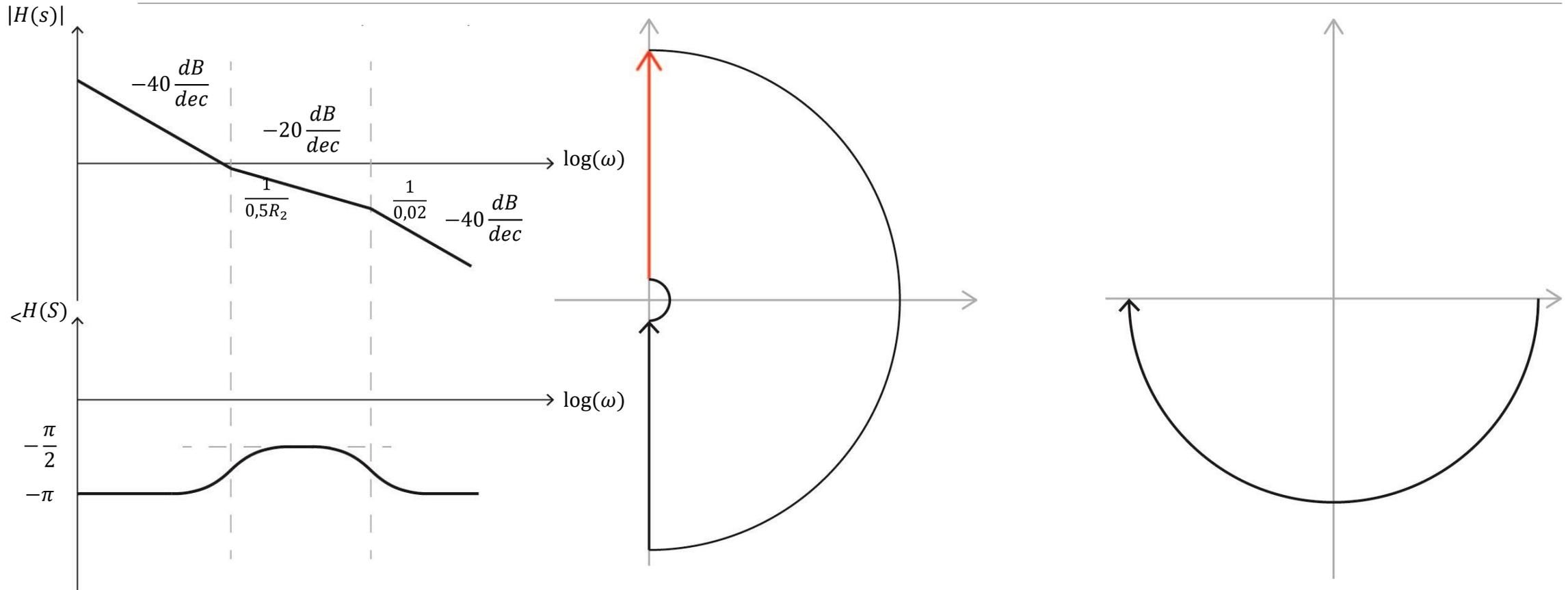


# Hoja 8. Ejercicio 5

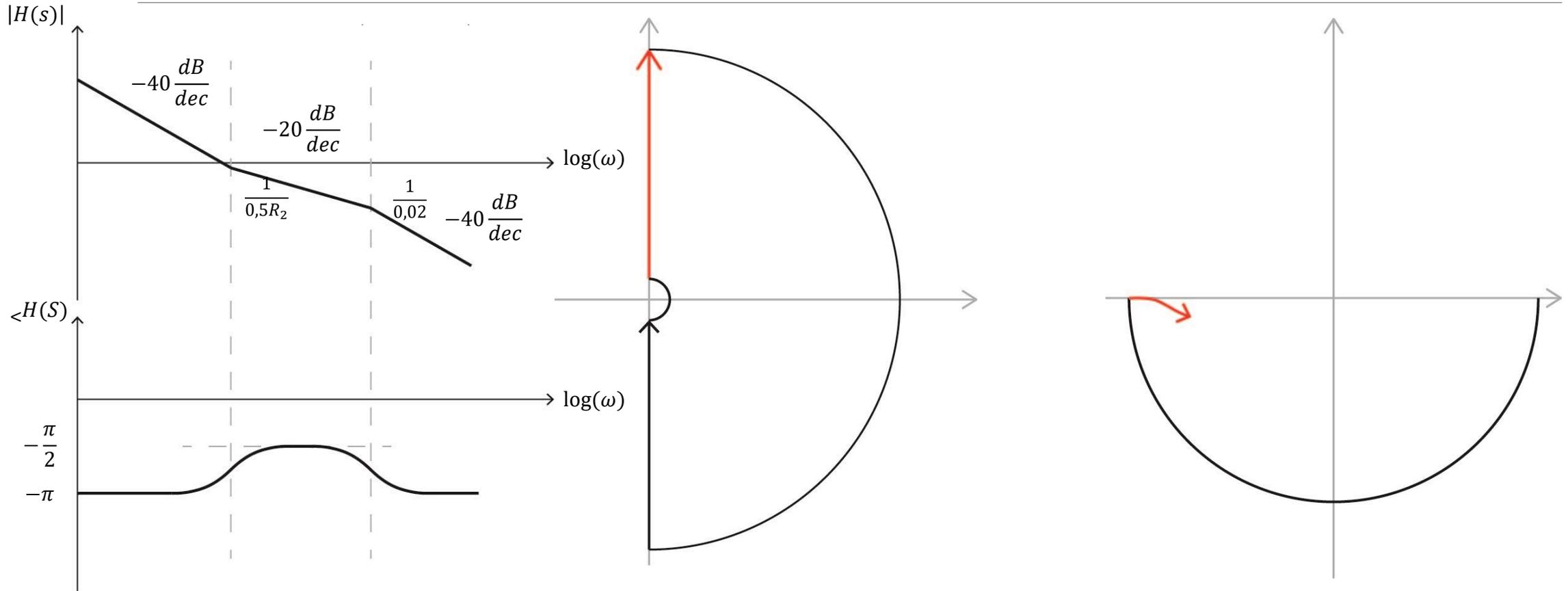
- $H_{OL}(s) = \frac{4,2(1+0,5R_2s)}{R_1s^2(1+0,02s)}$
- $\Gamma(s) = j\omega, \omega \in (0, \infty]$



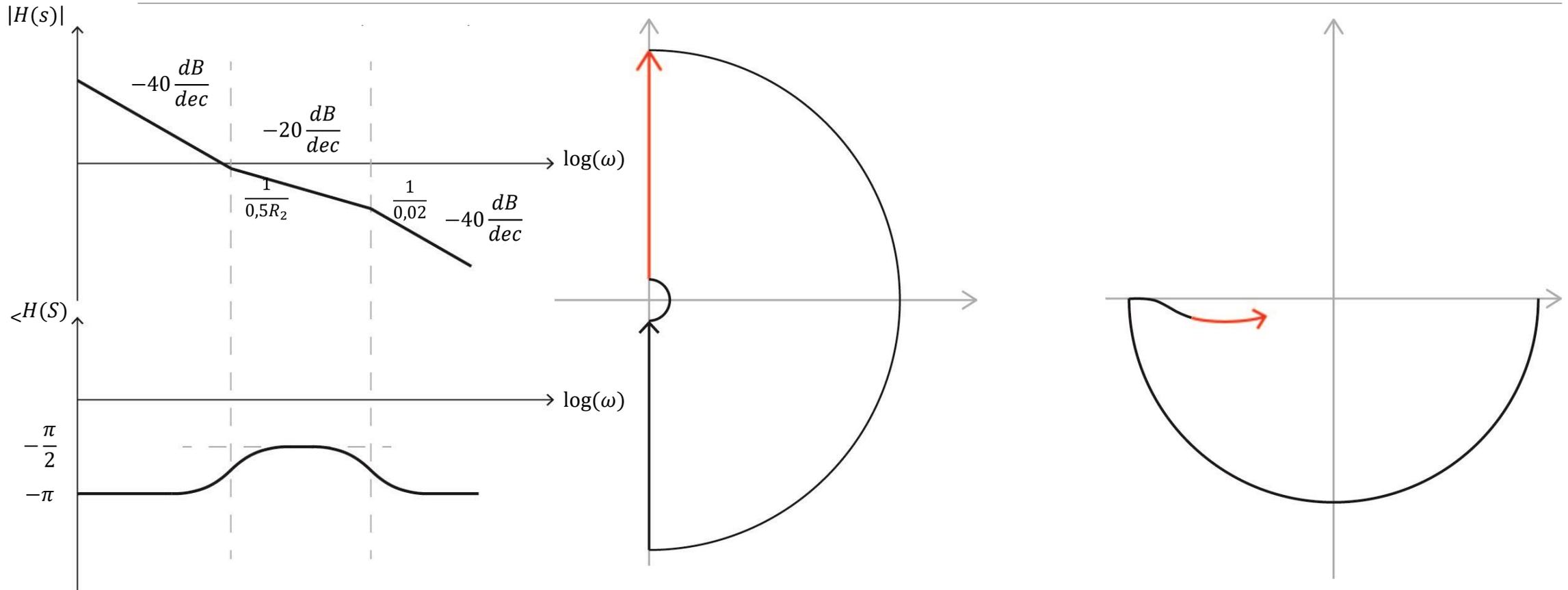
# Hoja 8. Ejercicio 5



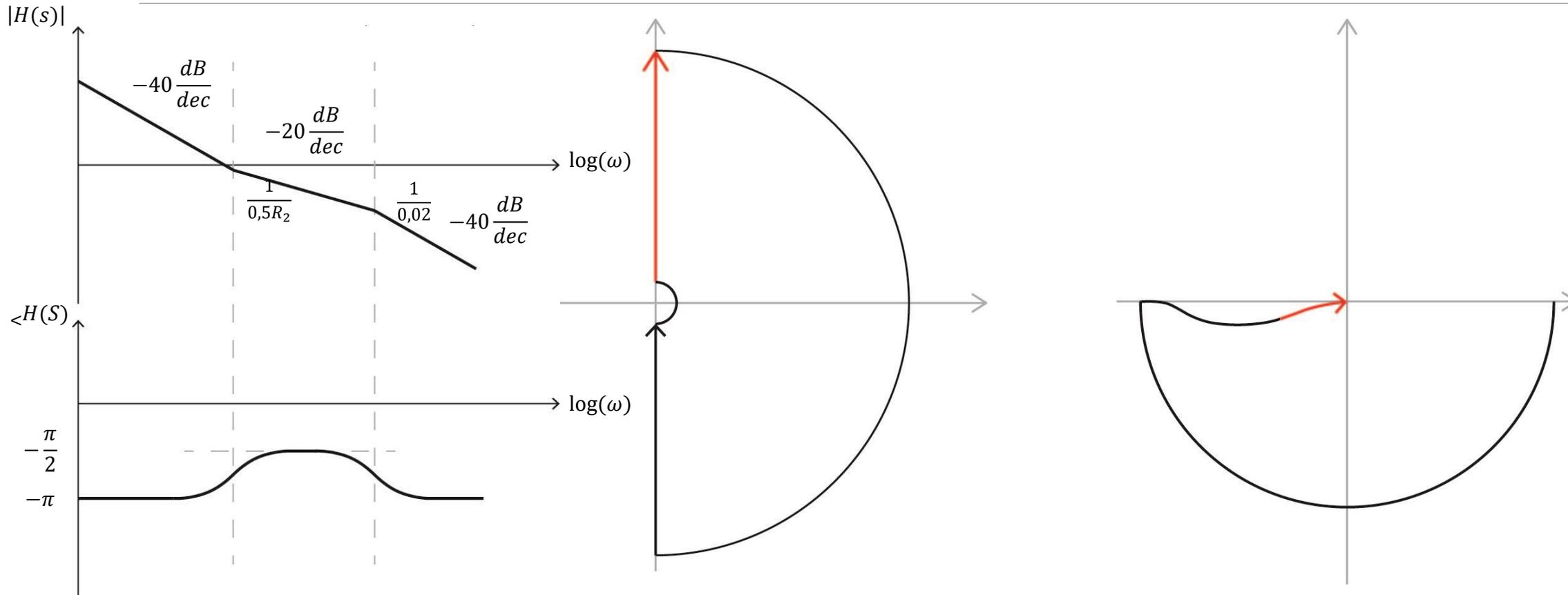
# Hoja 8. Ejercicio 5



# Hoja 8. Ejercicio 5



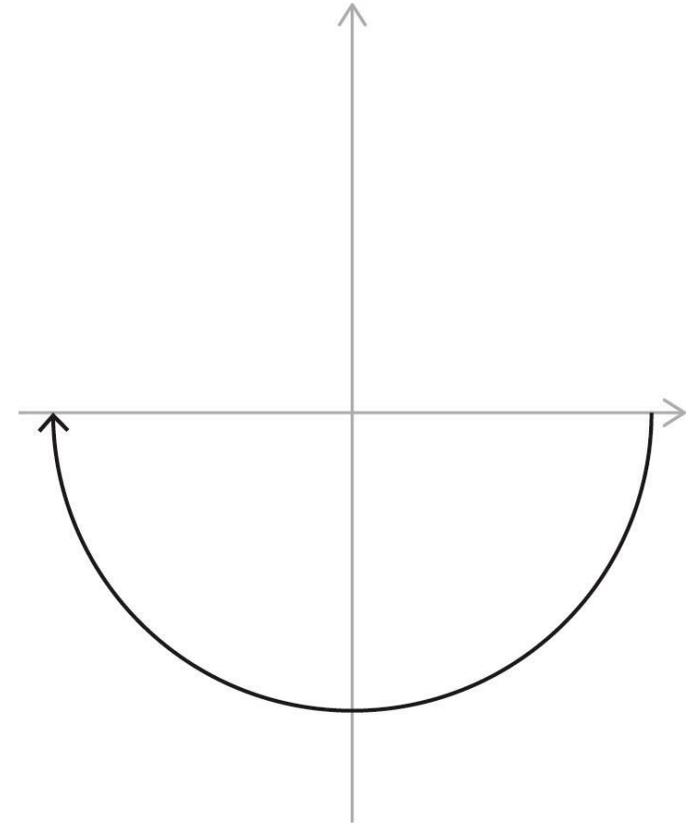
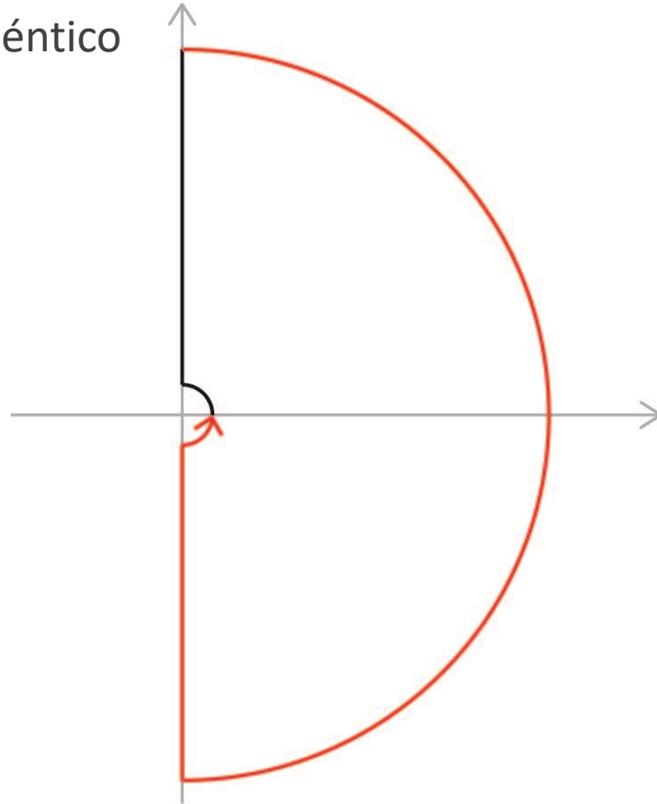
# Hoja 8. Ejercicio 5



# Hoja 8. Ejercicio 5

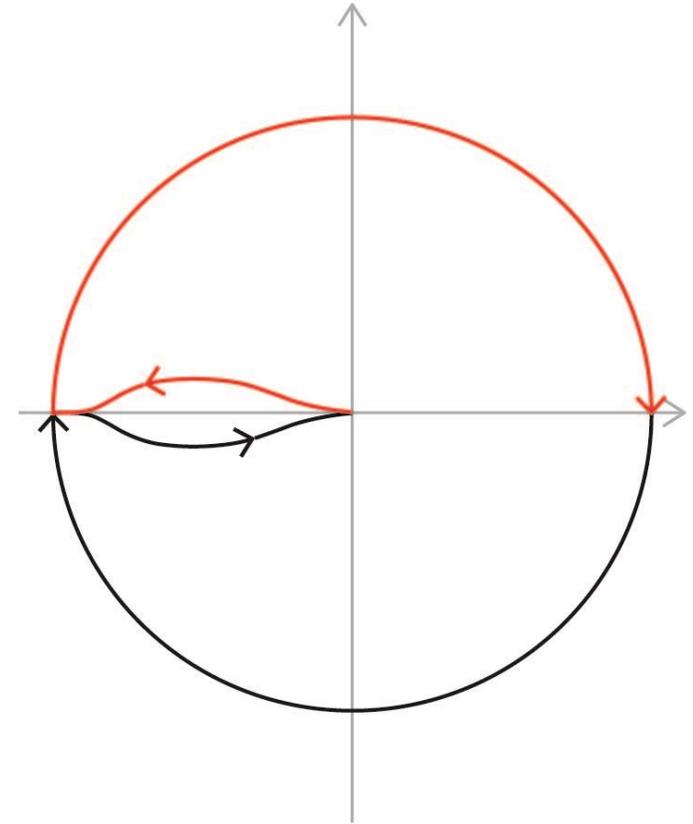
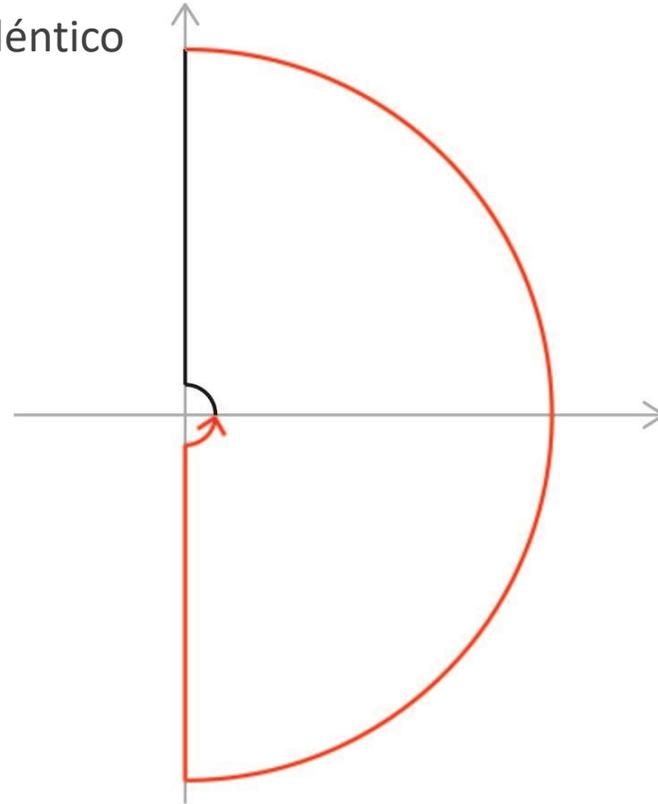
---

- El resto del diagrama es idéntico al caso anterior



# Hoja 8. Ejercicio 5

- El resto del diagrama es idéntico al caso anterior

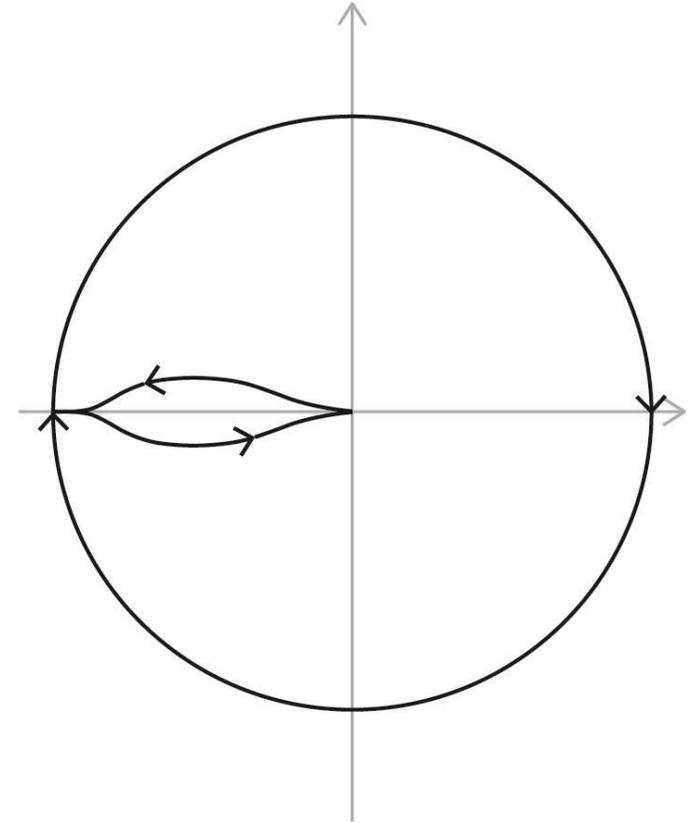


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- Criterio de Nyquist

- $Z = N + P$ 
  - $Z$  = Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
  - $P$  = Número de polos de  $H_{OL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
  - $N$  = Número de rodeos de  $H_{OL}(\Gamma)$  alrededor de -1



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

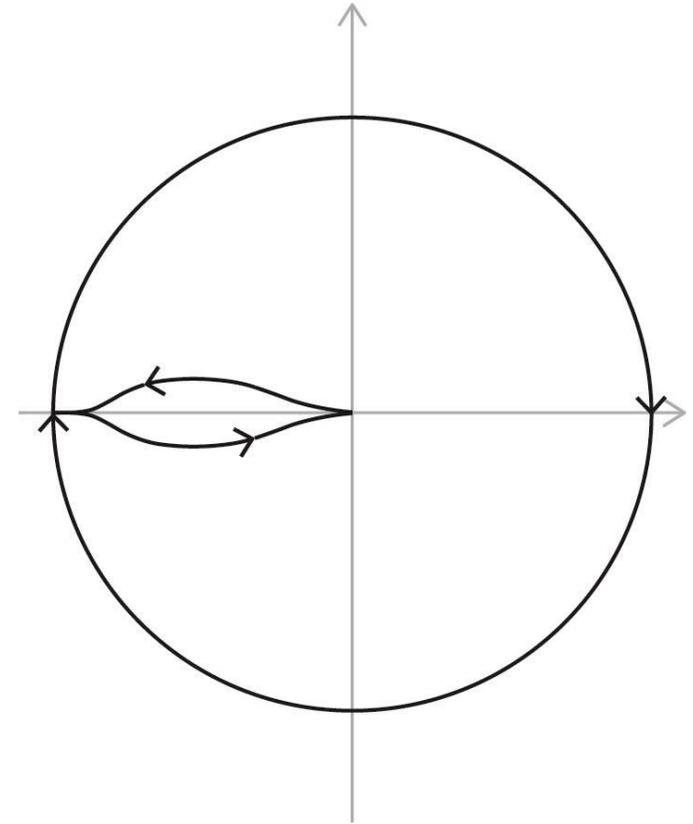
- Criterio de Nyquist

- $Z = N + P$

- $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$

- $P = 0$

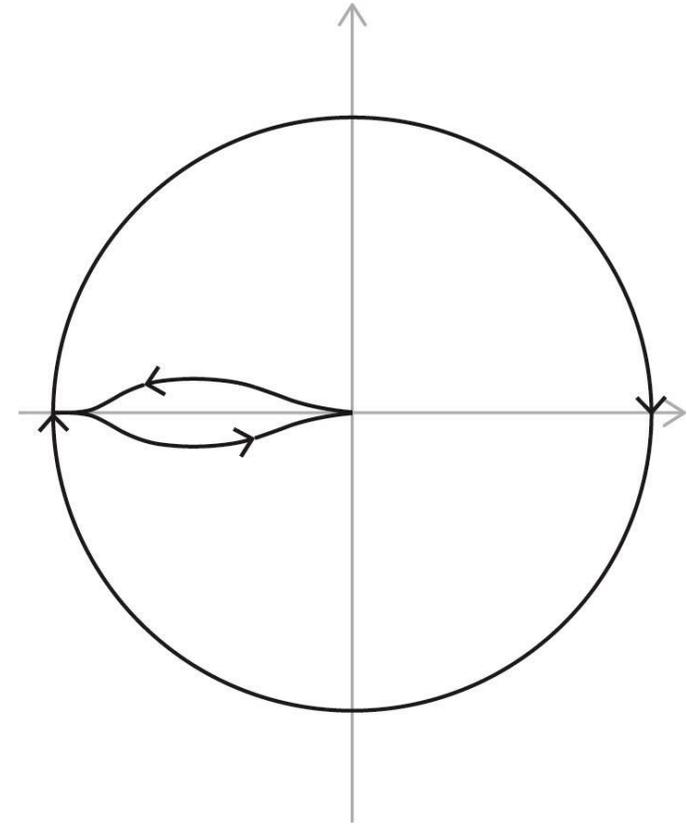
- $N = 0$



# Hoja 8. Ejercicio 5

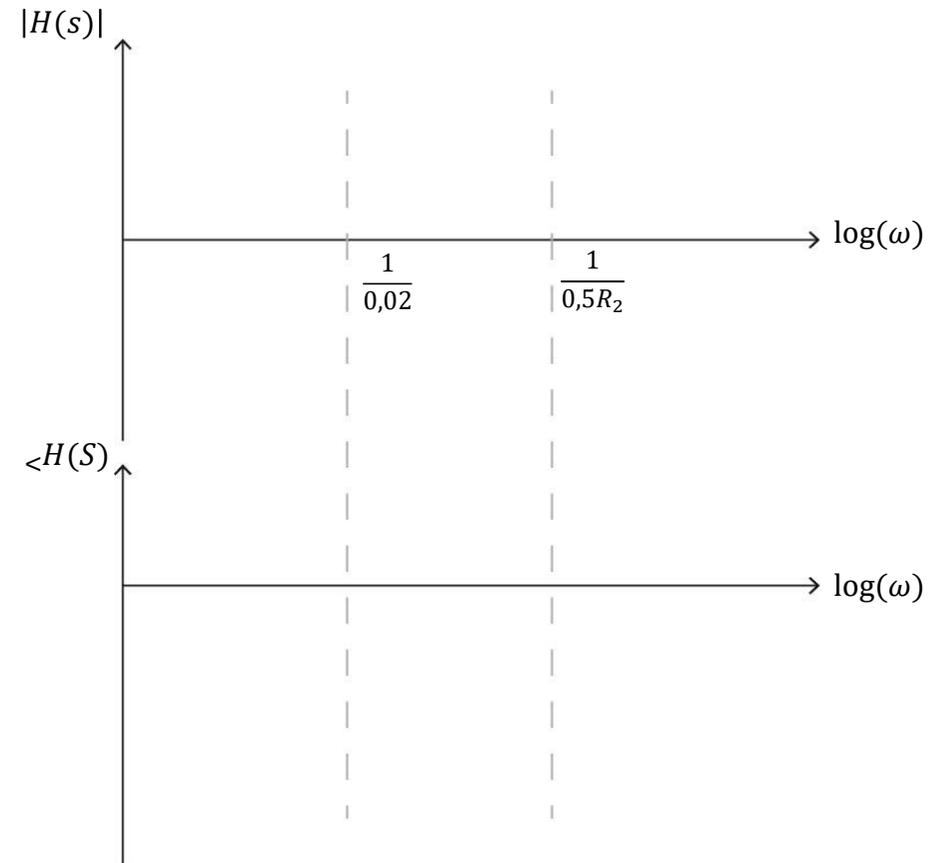
---

- Criterio de Nyquist
  - $Z = N + P = 0 \rightarrow$  El sistema es estable
    - $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
    - $P = 0$
    - $N = 0$



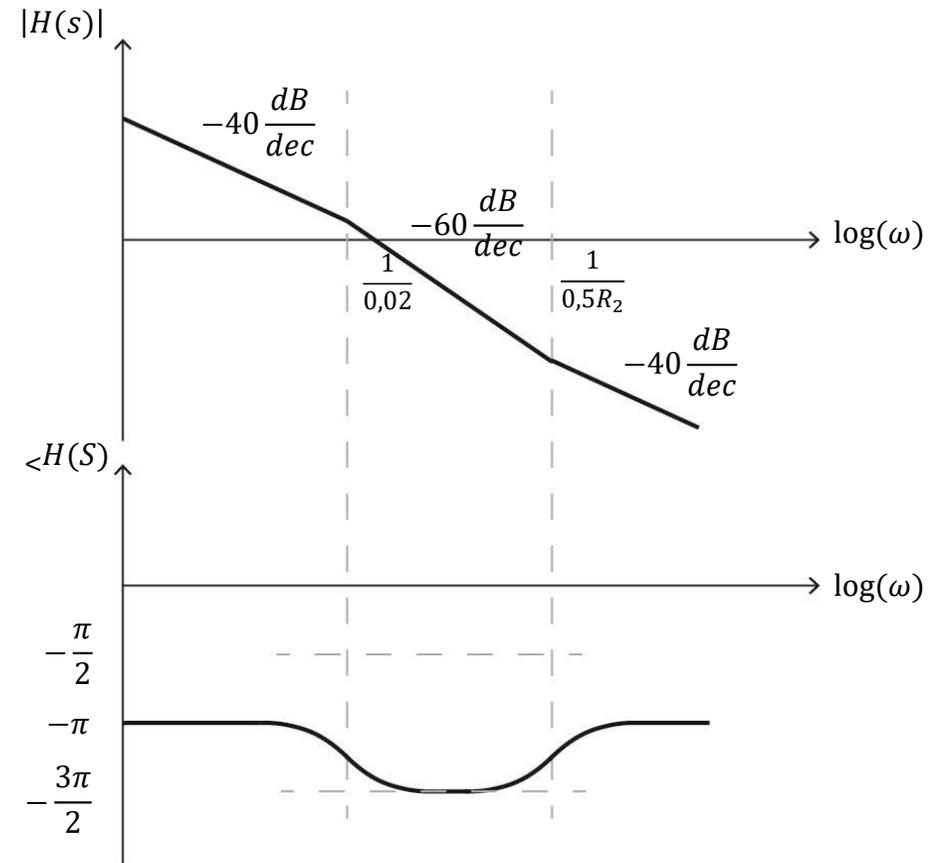
# Hoja 8. Ejercicio 5

- Caso 3:  $R_2 < 40k\Omega$ 
  - El razonamiento puede realizarse de forma totalmente análoga al caso anterior

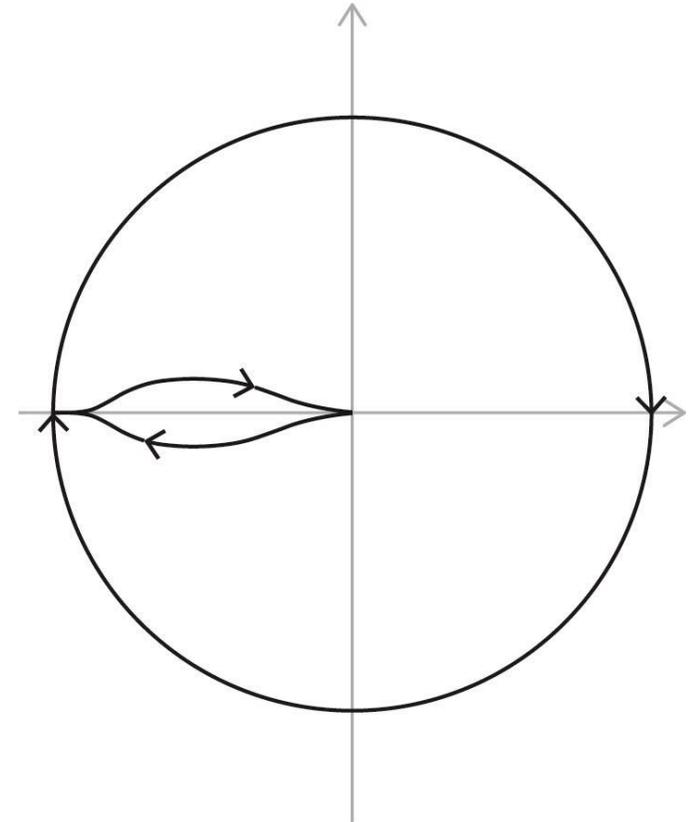
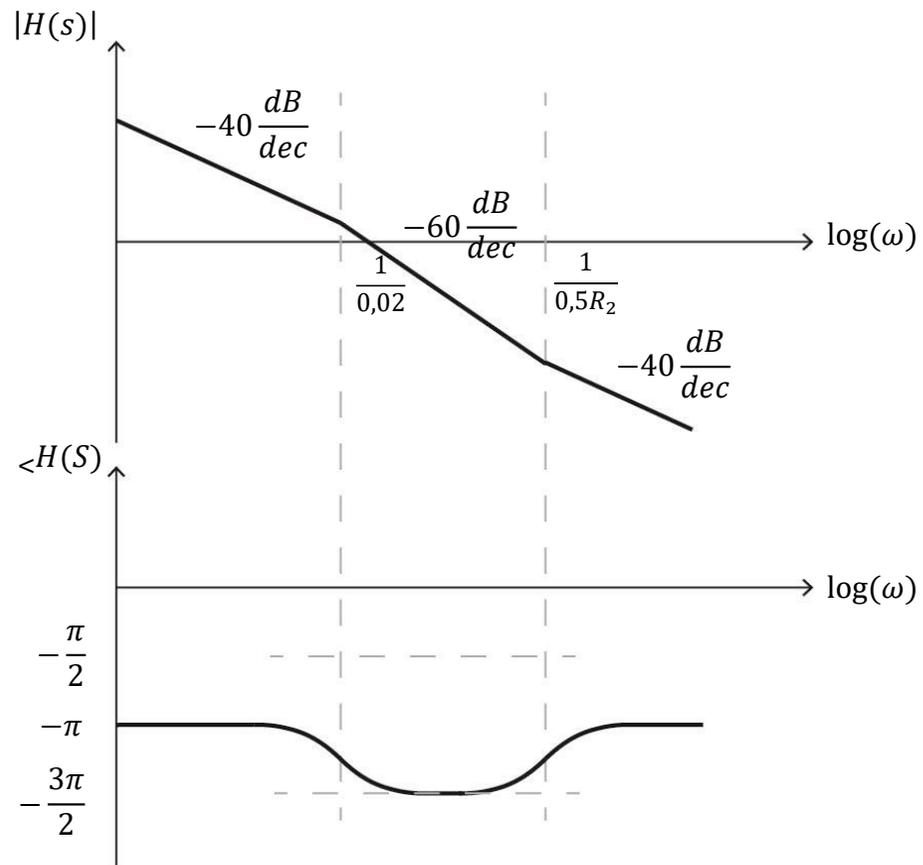


# Hoja 8. Ejercicio 5

- Caso 3:  $R_2 < 40k\Omega$ 
  - El razonamiento puede realizarse de forma totalmente análoga al caso anterior



# Hoja 8. Ejercicio 5



# Hoja 8. Ejercicio 5

---

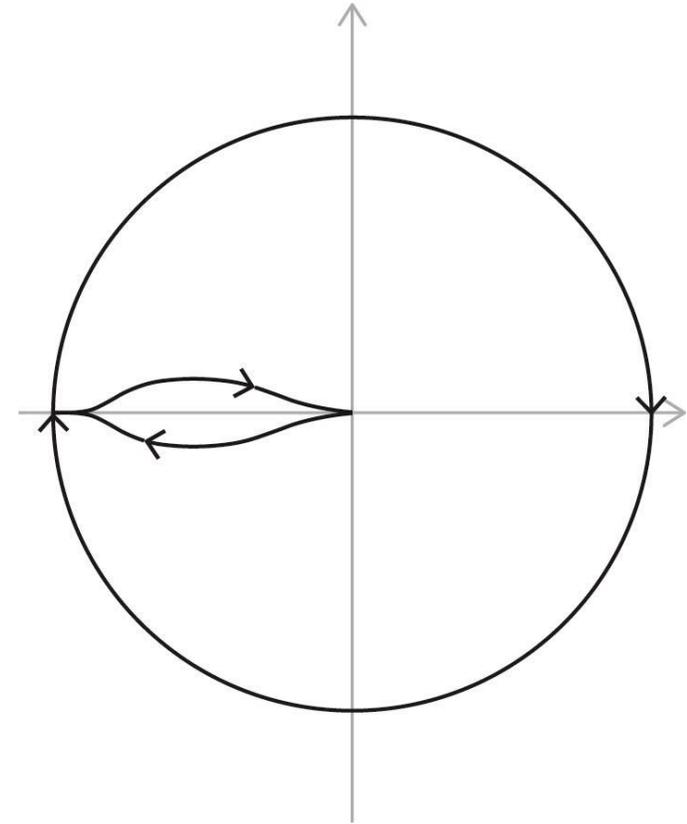
- Criterio de Nyquist

- $Z = N + P$

- $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$

- $P = 0$

- $N = 2$

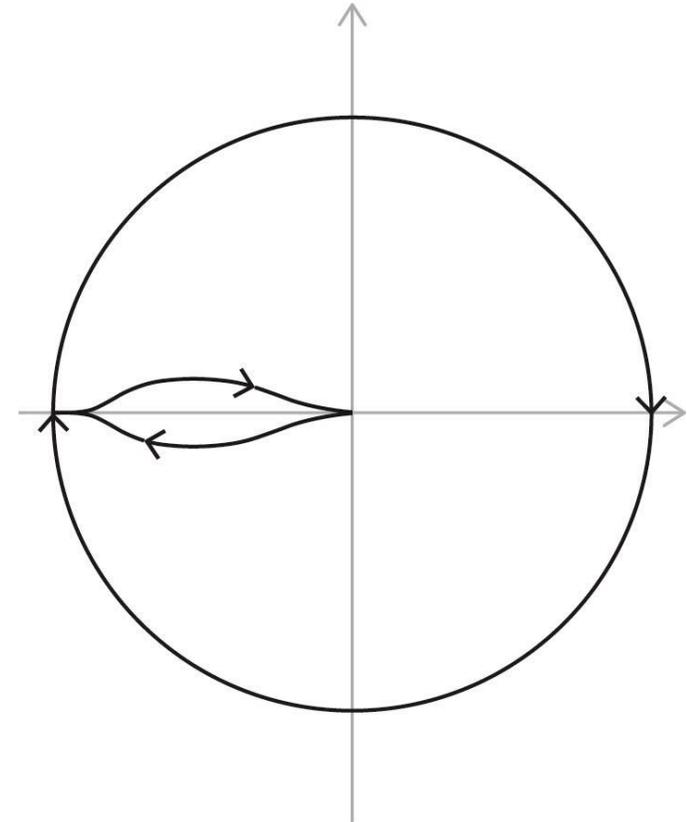


# Hoja 8. Ejercicio 5

---

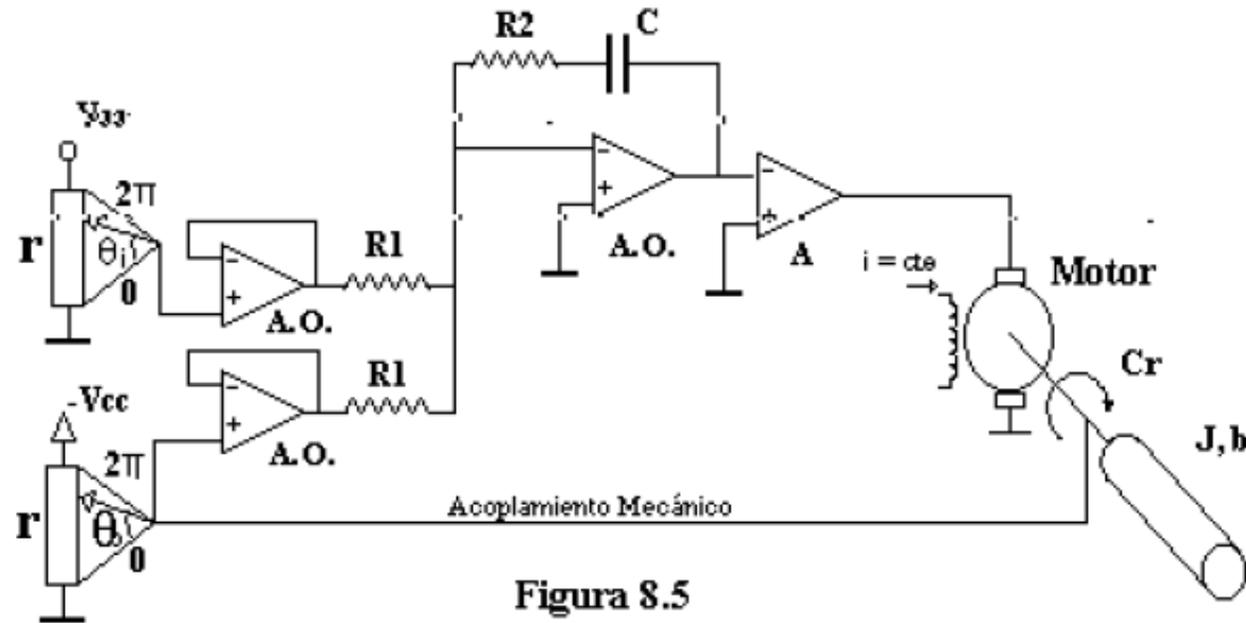
- Criterio de Nyquist

- $Z = N + P = 2 \rightarrow$  El sistema es inestable
  - $Z =$  Número de polos de  $H_{CL}(s)$  con  $Re(p_j) > 0$
  - $P = 0$
  - $N = 2$



# Hoja 8. Ejercicio 5

c) Si se toma  $R_2$  igual a 6,5 veces el mínimo valor admitido para que el sistema sea estable, calcular  $R_1$  para que el sistema tenga el mayor margen de fase posible.



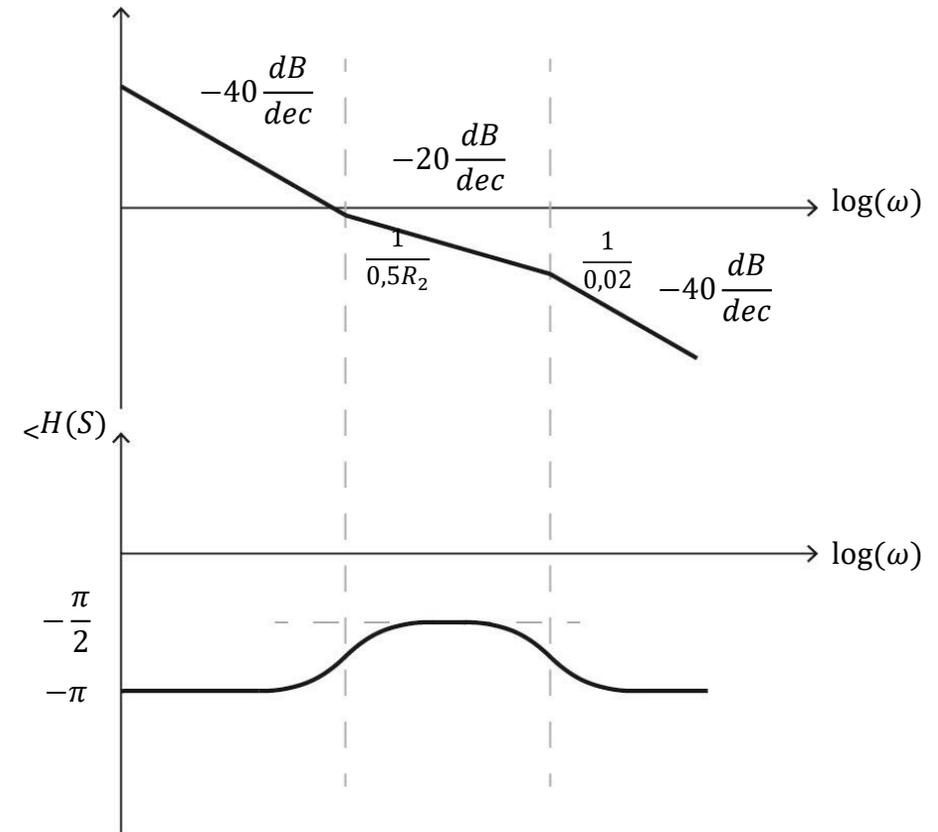
# Hoja 8. Ejercicio 5

---

- $R_2 = 6,5.40k\Omega = 260k\Omega$
- Margen de fase
  - Fase en la que puede incrementarse la transferencia de lazo abierto sin que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable
  - $MF = 180^\circ + \angle H_{OL}(\omega_C'),$  con  $|H_{OL}(\omega_C')| = 1$

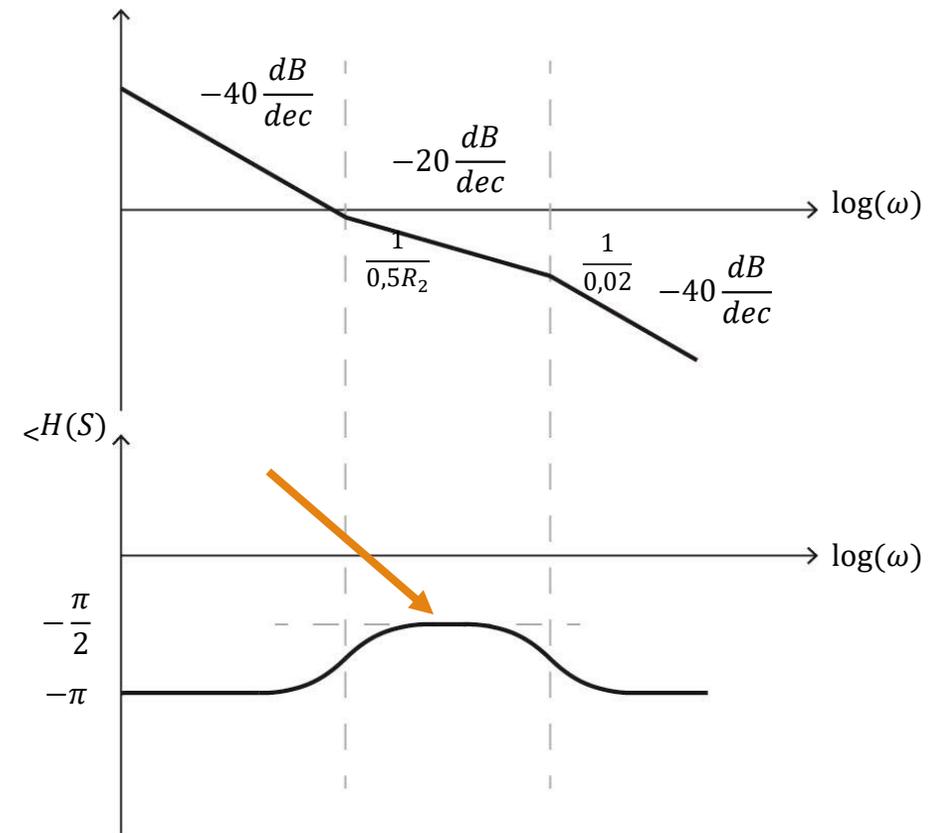
# Hoja 8. Ejercicio 5

- Observemos el Diagrama de Bode del sistema
  - En que punto se maximiza el margen de fase?



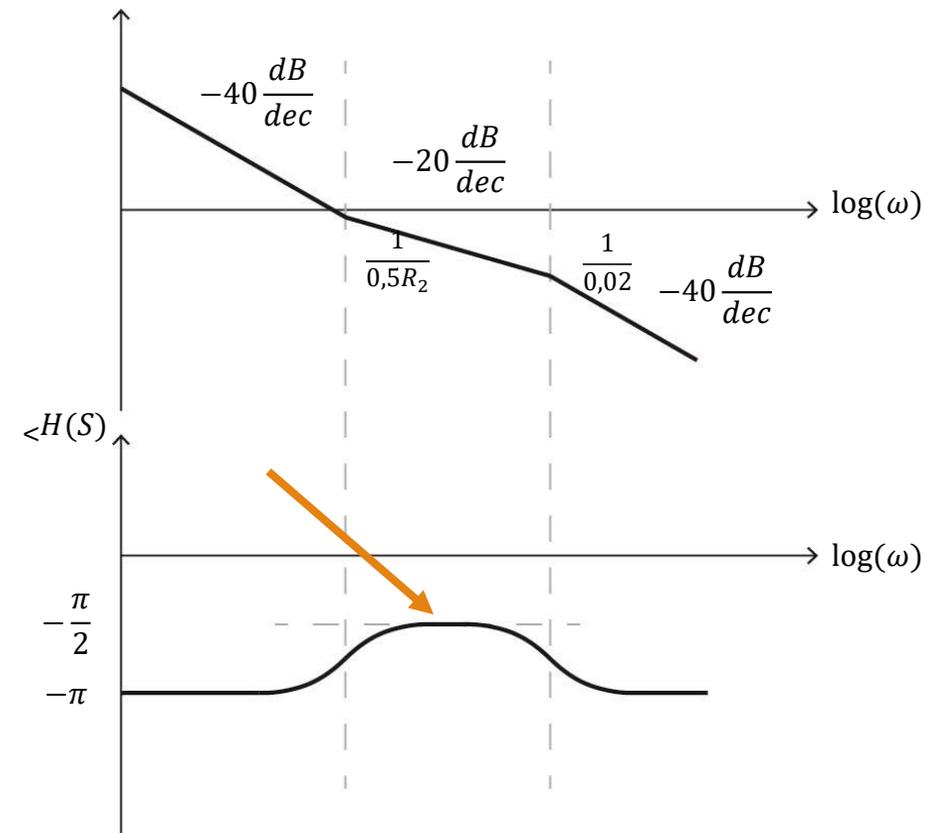
# Hoja 8. Ejercicio 5

- Observemos el Diagrama de Bode del sistema
  - En que punto se maximiza el margen de fase?
  - El margen de fase se maximiza en el punto de media geométrica entre el polo y el cero



# Hoja 8. Ejercicio 5

- Observemos el Diagrama de Bode del sistema
  - En que punto se maximiza el margen de fase?
  - El margen de fase se maximiza en el punto de media geométrica entre el polo y el cero
    - Hallamos  $\omega_c$  la media geométrica del polo y el cero
    - Imponemos  $|H_{OL}(\omega_c)| = 1$



# Hoja 8. Ejercicio 5

- Observemos el Diagrama de Bode del sistema
  - En que punto se maximiza el margen de fase?
  - El margen de fase se maximiza en el punto de media geométrica entre el polo y el cero
    - Hallamos  $\omega_c$  la media geométrica del polo y el cero
    - Imponemos  $|H_{OL}(\omega_c)| = 1$

$$\log(\omega_c) = \frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{0,5R_2}\right) + \log(50) \right) = \log\left(\sqrt{\frac{50}{0,5 \cdot R_2}}\right)$$
$$\frac{4,2(\sqrt{1 + (0,5\omega_c R_2)^2})}{R_1 \omega_c^2 (\sqrt{1 + (0,02\omega_c)^2})} = 1$$

