Señales aleatorias y modulación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

26 de septiembre de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

Sea $Y(t)$ la salida de un filtro LTI estable, de respuesta al impulso $h(t)$ con entrada $X(t)$, siendo $X(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio (WSS), de media m_X y autocorrelación $R_X(\tau)$.

(a) Demostrar que $Y(t)$ es estacionario en sentido amplio (WSS).

(b) Dar la expresión de la densidad espectral de potencia de $Y(t)$ en función de la de $X(t)$ y de la respuesta del filtro.

Problema 1

Considerar que se toman N medidas con un instrumento de medida y el error en cada medición se modela como

$$e[n] = e_a[n] + e_s[n] \qquad n = 0 \dots N-1$$

donde e_a es un error aleatorio intrudducido en cada medida, modelado como ruido blanco de media nula y potencia σ_a^2 y e_s es un error sistemático que introduce el instrumento (por ejemplo, el error sistemático luego de la calibración del instrumento), independiente de e_a, el cual toma un valor constante para el conjunto de N medidas.

$$e_s[n] = s(\omega), \qquad \text{con} \qquad s \sim N(0, \sigma_s^2)$$

donde ω modela la realización del conjunto de N medidas (el instrumento se calibra nuevamante en cada experimento ω). Se pide:

(a) Calcular la media, la autocorrelación y la potencia del proceso $e[n]$.

(b) ¿Es $e[n]$ estacionario en sentido amplio (WSS)? Justificar.

(c) ¿Es $e[n]$ ergódico en media? Justificar.

Se considera ahora que el error sistemático es un proceso de media nula con autocorrelación $R_s[m] = \sigma_s^2 e^{-|m|}$.

(d) Calcular la media, la autocorrelación y la potencia del proceso $e[n]$.

(e) ¿Es $e[n]$ estacionario en sentido amplio (WSS)? Justificar.

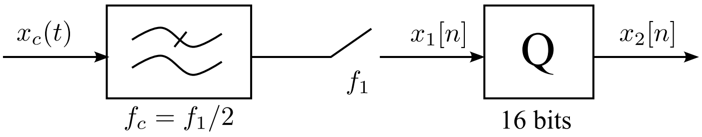
(f) ¿Es $e[n]$ ergódico en media? Justificar. Comparar cualitativamente con la parte (d).

Problema 2

Se considera un proceso estacionario en sentido amplio $x_c(t)$ con densidad espectral de potencia:

$$S_{xc}(f) = 0,1\,[1 + cos(2\pi f/f_1)]\,\Pi\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

Se decide muestrear el proceso x_c con una frecuencia de muestreo $f_s = f_1$ obteniendo $x_1[n]$ según se muestra en la figura.



(a) Hallar la densidad espectral de potencia del proceso $x_1[n]$ que resulta del muestreo.

(b) Hallar la autocorrelación del proceso $x_1[n]$.

(c) Hallar la potencia del proceso $x_1[n]$.

La señal se asume que varía un rango de valores entre -1 y 1 es cuantizada con un cuantizador de 16 bits.

(d) Indicar el modelo de error de cuantización. Hallar su autocorrelación y su densidad espectral de potencia.

(e) Hallar la SNR luego de la cuantización.

Se desea mejorar la SNR, por lo que se sobremuestrea al doble de la frecuencia utilizada $(2f_1)$.

(f) Dar un diagrama de bloques del sistema que realice esta mejora.

(g) Calcular la nueva SNR.

Problema 3

Se debe enviar una secuencia binaria X_k iid, donde los símbolos 0 y 1 ocurren con probabilidades $1-p$ y p. La secuencia se envía mediante una PAM, donde las amplitudes que se utilizan son $-A$ y A respectivamente.
El canal por el que se enviará la PAM tiene una respuesta en frecuencia $C(f)$ como se muestra en la figura 1.

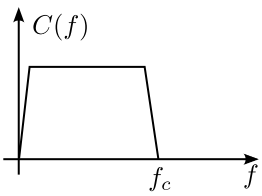


Figura 1

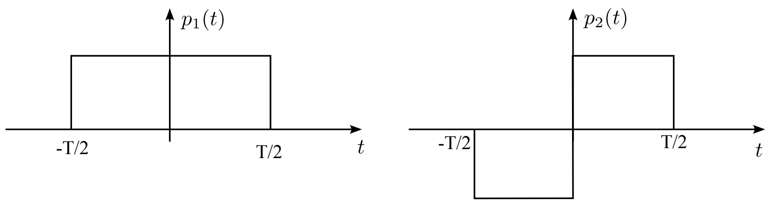


Figura 2

En cuanto a los pulsos conformadores, se considera dos pulsos $p_1(t)$ y $p_2(t)$ como se muestra en la figura 2.

(a) Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de X_k.

(b) Hallar una expresión de la densidad espectral de potencia correspondiente al uso de cada pulso p_1 y p_2. Bosquejar la densidad para cada caso.

(c) Indicar, dadas las características del canal, cuál de los pulsos eligiría si $p = 1/2$. Justificar.

(d) Indicar, dadas las características del canal, cuál de los pulsos eligiría si $p = 1/4$. Justificar.

Solución

Problema 1

(a) Para la media tenemos,

$$\mu_e = \mathsf{E}\big[e[n]\big] = \mathsf{E}\big[e_a[n] + e_s[n]\big] = \mathsf{E}\big[e_a[n]\big] + \mathsf{E}\big[e_s[n]\big] = 0$$

,
y para la autocorrelación,

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_e\big[m,n\big] &= \mathsf{E}\big[(e_a[n] + e_s[n])(e_a[m] + e_s[m])\big] \\
&= \mathsf{E}\big[e_a[n]e_a[m]\big] + \mathsf{E}\big[e_s[n]e_s[m]\big] \\
&= \mathsf{R}_{e_a}\big[m,n\big] + \mathsf{E}\big[s(\omega)^2\big] \\
&= \sigma_a^2\delta[m-n] + \sigma_s^2
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la linealidad de la esperanza y la independencia de e_a y e_s.
Para obtener la potencia evaluamos la autocorrelación en cero.

$$P_e = \mathsf{R}_e\big[0\big] = \sigma_a^2 + \sigma_s^2$$

(b) Como el proceso es de potencia finita, de media nula (constante) y la autocorrelacíón depende de m-n, el proceso es WSS.

(c) Planteando la estimación temporal de la media tenemos

$$\bar{\mu_e} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(e_a[n + e_s[m]]) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e_a[n] + s(\omega)$$

tomando el límite para $N \to \infty$ tenemos

$$\bar{\mu_e} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e_a[n] + s(\omega) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} s(\omega) \neq \mu_e = 0$$

por lo que **no es ergódico en media**.

(d) En forma análoga a la parte (a), para la media tenemos,

$$\mu_e = \mathsf{E}\big[e[n]\big] = \mathsf{E}\big[e_a[n] + e_s[n]\big] = \mathsf{E}\big[e_a[n]\big] + \mathsf{E}\big[e_s[n]\big] = 0$$

,
y para la autocorrelación,

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_e\big[m,n\big] &= \mathsf{E}\big[(e_a[n] + e_s[n])(e_a[m] + e_s[m])\big] \\
&= \mathsf{E}\big[e_a[n]e_a[m]\big] + \mathsf{E}\big[e_s[n]e_s[m]\big] \\
&= \mathsf{R}_{e_a}\big[m,n\big] + \mathsf{R}_{e_s}\big[m,n\big] \\
&= \sigma_a^2\delta[m-n] + \sigma_s^2 e^{-|m|}
\end{aligned}$$

$$P_e = \mathsf{R}_e\big[0\big] = \sigma_a^2 + \sigma_s^2$$

(e) El proceso es de potencia finita, de media nula (constante) y la autocorrelacíón depende de m-n, por lo que es WSS.

(f) El proceso es ergódico si (ver teórico)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathsf{Cov}_e\left[k\right] = 0$$

como $\mathsf{Cov}_e\left[k\right] = \mathsf{R}_e\left[k\right] = \sigma_a^2\delta[m-n] + \sigma_s^2 e^{-|m|}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathsf{Cov}_e\left[k\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N}(\sigma_a^2 + \sigma_s^2 \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k}) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N}(\sigma_a^2 + \sigma_s^2 \frac{1-e^{-(N-2)}}{1-e^{-1}}) = 0$$

por lo **que es ergódico**.

En el primer caso la fuerte dependencia temporal hace que en la realización temporal no aparezcan valores de e_s que representen su estádistica. Esto se puede observar en que la autocorrelación $\mathsf{R}_e\left[m\right]$ tomo un valor constantes para todo m. En el segundo caso esta correlación se extingue para m grandes y la estadística de e_s se expresa en el conjunto de medidas o realización del proceso.

Problema 2

(a) El filtro pasabajos a la entrada no tiene efecto sobre la el proceso ya que es de banda limitada $f_1/2$. Al tomar el proceso muestreado, se obtiene que la autocorrelación es el muestreo de la autocorrelación del proceso en tiempo discreto y en el domino de frecuencia, la densidad espectral de potencia corresponde al escalado y periodización de la densidad espectral de potencia en tiempo continuo.
Se tiene entonces que:

$$S_{x1}(e^{j2\pi f/f_1}) = 0,1f_1(1 + cos(2\pi f/f_1))$$

(b) La autocorrelación se obtiene antitransformando la densidad espectral de potencia.

$$R_{x1}[k] = 0,1f_1 \times (\delta[k] + 0,5\delta[k-1] + 0,5\delta[k+1])$$

(c) Hay varias formas de calcular la potencia, la más sencilla en este caso es evaluar la autocorrelación en $k = 0$.

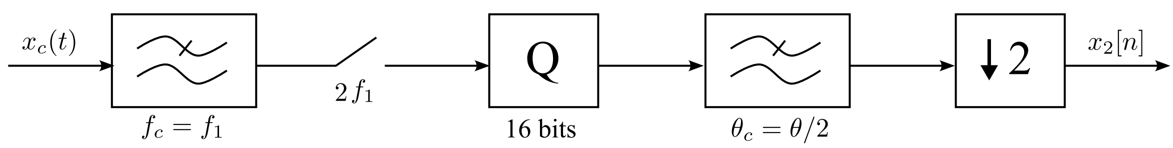
$$R_{x1}[0] = 0,1f_1$$

(d) El modelo corresponde a considerar la cuantización como ruido blanco aditivo no correlacionado con la señal.
Considerando que el paso de cuantización es $\Delta = \frac{2}{2^{16}}$, la autocorrelación es entonces:

$$R_q[k] = \delta[k]\Delta^2/12$$

(e) Tenemos entonces que la SNR es:

$$SNR_1 = 0,1f_1/(\Delta^2/12)$$



(f)

(g) En este caso es sencillo ver que la mitad de la potencia del ruido de cuantización es eliminada por lo que la nueva SNR es el doble de SNR_1.

Problema 3

(a) El proceso es estacionario por lo que la autocorrelación dependerá de la diferencia n. En el caso que n es cero se tiene

$$Rx[n] = A^2(1-(2p-1)^2)\delta[n] + A^2(2p-1)^2$$

Por lo tanto al densidad espectral de potencia es:

$$S_x(e^{j2\pi fT}) = \sum_k \delta(f-k/T)A^2(2p-1)^2 + A^2(1-(2p-1)^2)$$

(b) La señal PAM se puede escribir como

$$Y_t = \sum_{k-\infty}^{\infty} X_k \; p(t-kT-t_d)$$

De acuerdo a lo visto en el teórico la densidad espectral de potencia de esta PAM es:

$$S_Y f = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_{k-\infty}^{\infty} R_x[k]e^{j2\pi kT}$$

$$S_Y f = \frac{A^2(1-(2p-1)^2)}{T}|P(f)|^2 + \frac{A^2(2p-1)^2}{T^2} \sum_{k-\infty}^{\infty} \left|P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

En el caso $p(t) = p_1(t)$, $|P_1(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT)$.
En el caso $p(t) = p_2(t)$, $|P_2(f)|^2 = \frac{T}{2}^2 \left(sinc^2(fT/2)e^{-jfT/4} - sinc^2(fT/2)e^{jfT/4}\right)$.
Notar que el ancho de banda de $p_2(t)$ es aproximadamente el doble que el ancho de banda de p_1. También notar que $P_1(0) = T^2$ y $P_1(0) = 0$.

(c) En el caso que $p = 1/2$, la densidad espectral de potencia de la PAM no tiene una componente de continua, por lo que ambas opciones p_1 o p_2 podrían ser utilizadas. En este caso el ancho de banda utilizado por p_2 es aproximadamente el doble que el obtenido por p_1 por lo que lo más razonable sería utilizar p_1 ya que peremitiría una tasa de símbolos mayor a igual ancho de banda.

(d) En este caso la PAM correspondiente a p_1 tiene una componente en continua, pero el canal tiene ganancia cero en continua por lo que se recibirá algo muy diferente a lo transmitido.
En el caso de p_2 cada pulso tiene media nula por lo que sin importar la probabilidad de cada símbolo el proceso tendrá media nula (se ve en la PAM que la transformadada de fourier del pulso conformador elimina la componente que podría aparecer en frecuencia cero). Por esto, en este caso la única opción aceptable es p_2.