

# CINCO: IMPLEMENTACIONES ESPECIALES SIMPLEX Y CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

En este capítulo se describirán algunos métodos especiales para usar el procedimiento simplex, o algunas ligeras modificaciones de éste. En capítulos posteriores se verá que los formatos aquí considerados tienen ciertas ventajas. En la sección 5.1 se describe el método simplex revisado, que sigue los mismos pasos que el método simplex, pero conserva toda la información pertinente en un arreglo más pequeño. También se analizan formas numéricamente estables de este método. En la sección 5.2 se describe una ligera modificación del método simplex para trabajar implícitamente con cotas inferiores y superiores sobre las variables, sin incrementar el tamaño de la base. El resto del capítulo se dedica a algunos aspectos geométricos del método simplex. En particular, se estudiarán el lema de Farkas y las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker.

## 5.1 EL MÉTODO SIMPLEX REVISADO

El método *simplex revisado* es un procedimiento sistemático para implementar los pasos del método simplex en un arreglo más pequeño, ahorrando así espacio de almacenamiento. Se comenzará revisando los pasos del método simplex.

### Pasos del método simplex (Problema de minimización)

Suponga que se tiene una solución básica factible con base  $\mathbf{B}$  (y base inversa  $\mathbf{B}^{-1}$ ). Entonces:

1. La solución básica factible está dada por  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$  y  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ . El objetivo es  $z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$ .
2. Se calculan los multiplicadores simplex  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ . Para cada variable no básica, se calcula  $z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$ . Sea  $z_k - c_k =$  Máximo  $z_j - c_j$ . Si  $z_k - c_k \leq 0$ , entonces el proceso termina; la solución actual es óptima. En caso contrario, se continúa con el paso 3.
3. Se calcula  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ . Si  $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$ , el proceso termina; la solución óptima es no acotada. En caso contrario, se determina el índice de la variable  $x_{B_r}$  que sale de la base como sigue:

$$\bar{b}_r = \text{Mínimo}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Se actualiza **B** reemplazando  $\mathbf{a}_{B_r}$  con  $\mathbf{a}_k$  y se regresa al paso 1.

Analizando los pasos anteriores, se ve claramente que es posible ejecutar el método simplex usando un arreglo más pequeño. Suponga que se tiene una solución básica factible con  $\mathbf{B}^{-1}$  conocida. Se construye el siguiente arreglo, en donde  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$  y  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ .

BASE INVERSA	LD
<b>w</b>	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Observe que el tableau anterior, denominado *tableau simplex revisado*, también está presente en el tableau simplex usual, en el supuesto de que se empiece de modo que en la sección de la BASE INVERSA haya un vector cero en el renglón objetivo y una matriz identidad en los otros renglones. (Lo anterior puede corresponder a las variables de holgura en caso de disponer de ellas como base inicial, o puede simplemente ser una sección de este tipo mantenida para fines de registro.) El LD es el lado derecho usual del tableau. Luego, suponga que se está efectuando el algoritmo simplex sobre todo el tableau, aunque se está manteniendo oculto todo salvo este arreglo y cualquiera otra información necesaria. Por tanto, solamente la información "expuesta" se calcula explícitamente. La primera parte de la información que es necesario considerar la constituyen los valores  $z_j - c_j$ . Debido a que **w** es conocido, los valores mencionados pueden calcularse explícitamente como se muestra en el paso 2 a fin de comprobar optimalidad. Suponga que  $z_k - c_k > 0$ . Así, se desea analizar la columna actualizada de  $x_k$ . Usando  $\mathbf{B}^{-1}$  es posible calcular  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k$ . Si  $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$ , entonces el proceso se detiene con la indicación de que la solución óptima es no acotada. En caso contrario, la columna actualizada de  $x_k$  puede anexarse al tableau simplex revisado como se muestra, mientras el resto de este tableau sigue manteniéndose "oculto".

BASES INVERSAS	LD	
<b>w</b>	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$	$x_k$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{b}_1$	$z_k - c_k$
	$\bar{b}_2$	$y_{1k}$
	$\vdots$	$y_{2k}$
	$\bar{b}_r$	$\vdots$
	$\vdots$	$y_{rk}$
	$\bar{b}_m$	$\vdots$
		$y_{mk}$

El índice  $r$  del paso 3 puede calcularse ahora aplicando la prueba de la razón mínima usual. Lo que es más importante, el pivoteo en  $y_{rk}$  da los nuevos valores de  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  y  $\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$ , y el proceso se repite. Se deja como ejercicio para el lector verificar de manera rigurosa que el pivoteo efectivamente actualiza el tableau simplex revisado de  $(m+1) \times (m+1)$ .

El método simplex revisado converge en un número finito de pasos, siempre y cuando se adopte una regla de no ciclado. Lo anterior es evidente, pues el método simplex revisado efectúa los mismos pasos que el método simplex, con la excepción de que sólo se presenta una parte del tableau y el resto de la información se genera sólo cuando es requerida. A continuación se presenta un resumen del método simplex revisado.

**Resumen del método simplex revisado en formato de tableau (Problema de minimización)**

PASO INICIAL

Se determina una solución básica factible inicial con base inversa  $\mathbf{B}^{-1}$ . Se calcula  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$  y se forma el siguiente arreglo (tableau simplex revisado).

BASE INVERSA	LD
<b>w</b>	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

PASO PRINCIPAL

Para cada variable no básica, se calcula  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ . Sea  $z_k - c_k = \text{Máximo } z_j - c_j$ . Si  $z_k - c_k \leq 0$ , entonces el proceso se detiene; la solución básica factible actual es óptima. De lo contrario, se calcula  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k$ . Si  $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$ , el proceso se detiene; la solución óptima es no acotada. Si  $\mathbf{y}_k \neq \mathbf{0}$ , entonces se inserta la columna

$\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}$  a la derecha del tableau, con lo que se obtiene el siguiente tableau.

BASE INVERSA	LD	$x_k$
<b>w</b>	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$	$z_k - c_k$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$	$\mathbf{y}_k$

El índice  $r$  se determina como sigue:

$$\bar{b}_r = \text{Mínimo}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Se efectúa un pivoteo en  $y_{rk}$ . Esto actualiza el tableau. Ahora la columna correspondiente a  $x_k$  se ha eliminado por completo y se repite el paso principal.

**Ejemplo 5.1**

Minimizar  $-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6$

Sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &\leq 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se introducen las variables de holgura  $x_7, x_8$  y  $x_9$ . La base inicial es  $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9] = \mathbf{I}_3$ . También,  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = (0, 0, 0)$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{b}$ .

Iteración 1

	BASE INVERSA			LD
$z$	0	0	0	0
$x_7$	1	0	0	6
$x_8$	0	1	0	4
$x_9$	0	0	1	4

Aquí  $\mathbf{w} = (0, 0, 0)$ . Observando que  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ , se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= 1, z_2 - c_2 = 2, z_3 - c_3 = -1 \\ z_4 - c_4 &= 1, z_5 - c_5 = 4, z_6 - c_6 = -2 \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $k = 5$  y  $x_5$  entra a la base:

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A la derecha del tableau se inserta el vector

$$\begin{bmatrix} z_5 - c_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y se efectúa un pivoteo en  $y_{35} = 2$ .

	BASE INVERSA			LD	$x_5$
$z$	0	0	0	0	4
$x_7$	1	0	0	6	1
$x_8$	0	1	0	4	0
$x_9$	0	0	1	4	2

	BASE INVERSA			LD
$z$	0	0	-2	-8
$x_7$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
$x_8$	0	1	0	4
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2

Iteración 2

Ahora,  $\mathbf{w} = (0, 0, -2)$ . Observando que  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ , se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= 1, z_2 - c_2 = 2, z_3 - c_3 = -3, \\ z_4 - c_4 &= -1, z_6 - c_6 = -4, \\ z_9 - c_9 &= -2 \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $k = 2$  y  $x_2$  entra a la base.

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Insertar el vector

$$\begin{bmatrix} z_2 - c_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A la derecha del tableau se inserta el vector y se efectúa un pivoteo en  $y_{12}$ .

	BASE INVERSA			LD	
z	0	0	-2	-8	
x <sub>7</sub>	1	0	-1/2	4	
x <sub>8</sub>	0	1	0	4	
x <sub>5</sub>	0	0	1/2	2	

	x <sub>5</sub>
	2
	①
	-1
	0

	BASE INVERSA			LD
z	-2	0	-1	-16
x <sub>2</sub>	1	0	-1/2	4
x <sub>8</sub>	1	1	-1/2	8
x <sub>5</sub>	0	0	1/2	2

Iteración 3

Ahora  $w = (-2, 0, -1)$ . Observando que  $z_j - c_j = wa_j - c_j$ , se obtiene

$$z_1 - c_1 = -1, z_3 - c_3 = -4, z_4 - c_4 = -2, z_6 - c_6 = -5, z_9 - c_9 = -1$$

Como  $z_j - c_j \leq 0$  para todas las variables no básicas (x<sub>7</sub> acaba de salir de la base, por lo que  $z_7 - c_7 < 0$ ), el proceso se detiene; la solución básica factible del tableau anterior es óptima.

**Comparación entre los métodos simplex y simplex revisado**

Es de utilidad efectuar una breve comparación entre los métodos simplex y simplex revisado. Para el método revisado se necesita un arreglo de  $(m + 1) \times (m + 1)$ , en oposición a un arreglo de  $(m + 1) \times (n + 1)$  para el método simplex. Si  $n$  es significativamente mayor que  $m$ , entonces se obtiene como resultado un ahorro sustancial en memoria de computadora. En la tabla 5.1 se proporcionan el número de multiplicaciones (la división se considera como una multiplicación) y de sumas (la resta se considera como una suma) por iteración para ambos procedimientos. En el ejercicio 5.3 se pide al lector que verifique la validez de los resultados mostrados en la tabla.

De la tabla 5.1 se observa que el número de operaciones requeridas durante una iteración del método simplex es ligeramente menor que el número de operaciones requeridas por el método simplex revisado. Sin embargo, observe que casi todos los problemas prácticos son *rales*; es decir, que la *densidad d* (el número de elementos distintos de cero dividido entre el número total de elementos) de los elementos distintos de cero, en la matriz de restricciones, suele ser pequeña (en muchos casos,  $d \leq 0.05$ ). El método simplex revisado puede aprovechar esta situación al calcular los  $z_j - c_j$ . Observe que  $z_j = wa_j$  y que es posible omitir los elementos cero de  $a_j$  al efectuar el cálculo de  $wa_j = \sum_{i=1}^m w_i a_{ij}$ . Por consiguiente, en el método simplex revisado el número de operaciones para calcular los  $z_j - c_j$  está dado por  $d$  veces los elementos de la tabla 5.1, lo cual reduce sustancialmente el número total de operaciones. Al pivotear, tanto para el método simplex como para el método simplex revisado no se omiten operaciones, ya que en general el tableau actual se llena rápidamente con elementos distintos de cero, aun si la matriz original de restricciones es rala. (Sin embargo, consulte la sección sobre observaciones a las implementaciones y la sección de notas y bibliografía acerca de preservar la ralidad en una implementación en forma factorizada del método simplex revisado.)

Empíricamente, a menudo se sugiere que en el promedio de los casos el método simplex requiere, aproximadamente, sobre el orden de  $m$  a  $3m$  iteraciones. (Sin embargo, también se ha sugerido que el número de iteraciones suele ser proporcional a  $n$  e inclusive a  $\log n$ .) Al analizar la tabla 5.1, dado que el número de operaciones por iteración es de orden  $O(m^2n)$  (es decir, está acotado por arriba por alguna constante multiplicada por  $m^2n$ ), la complejidad empírica media del método simplex es  $O(m^2n)$ . Sin embargo, casi siempre existe ralidad que se aprovecha en las implementaciones simplex. Lo anterior se lleva a cabo almacenando datos en forma empaquetada (en la cual sólo se almacenan valores diferentes de cero con indicadores idóneos, que son usados solamente en cálculos aritméticos), así como manteniendo la base en forma factorizada, como se verá en breve. Debido a lo anterior, una ecuación de regresión de la forma  $Km^\alpha n^\beta$ , en donde  $\alpha \cong 1.25 - 2.5$  y  $\beta \cong 0.33$ , suele proporcionar un mejor ajuste para el esfuerzo computacional global.

Tabla 5.1 Comparación entre los métodos simplex y simplex revisados.

MÉTODO	OPERACIÓN		
	PIVOTEO	$z_j - c_j$	TOTAL
Simplex	Multiplicaciones	$(m + 1)(n - m + 1)$	$m(n - m) + n + 1$
	Sumas	$m(n - m + 1)$	$m(n - m + 1)$
Revisado Simplex	Multiplicaciones	$(m + 1)^2$	$m(n - m) + (m + 1)^2$
	Sumas	$m(m + 1)$	$m(n - m) + m(m + 1)$

En resumen, si  $n$  es significativamente mayor que  $m$ , y si la densidad  $d$  es pequeña, entonces el esfuerzo computacional del método simplex revisado es significativamente menor que el del método simplex. Asimismo, en el método simplex revisado, el uso de los datos originales para calcular los  $z_j - c_j$  y la columna actualizada  $y_k$  tiende a reducir el error acumulativo de redondeo.

### Forma producto de la inversa

Ahora se analizará otra implementación del método simplex revisado en el que la inversa de la base se almacena como el producto de matrices elementales (una *matriz elemental* es una matriz cuadrada que difiere de la identidad sólo en un renglón o en una columna.) Para problemas ralos, lo anterior conduce a menor almacenamiento y fatigas computacionales, y proporciona mayor estabilidad numérica al reducir los errores de redondeo acumulados.

Considere una base  $\mathbf{B}$  compuesta de las columnas  $\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, \dots, \mathbf{a}_{B_m}$ , y suponga que se conoce  $\mathbf{B}^{-1}$ . Luego suponga que la columna no básica  $\mathbf{a}_k$  reemplaza a  $\mathbf{a}_{B_r}$ , lo cual da por resultado la nueva base  $\hat{\mathbf{B}}$ . Se desea encontrar  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$  en términos de  $\mathbf{B}^{-1}$ . Observando que  $\mathbf{a}_k = \mathbf{B}\mathbf{y}_k$  y  $\mathbf{a}_{B_i} = \mathbf{B}\mathbf{e}_i$ , en donde  $\mathbf{e}_i$  es un vector de ceros excepto por un 1 en la  $i$ -ésima posición, se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, \dots, \mathbf{a}_{B_{r-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{B_{r+1}}, \dots, \mathbf{a}_{B_m}) \\ &= (\mathbf{B}\mathbf{e}_1, \mathbf{B}\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_{r-1}, \mathbf{B}\mathbf{y}_k, \mathbf{B}\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_m) \\ &= \mathbf{B}\mathbf{T}\end{aligned}$$

en donde  $\mathbf{T}$  es la identidad con la  $r$ -ésima columna reemplazada por  $\mathbf{y}_k$ . La inversa de  $\mathbf{T}$ , que se denotará por  $\mathbf{E}$ , está dada como se muestra a continuación:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -y_{1k}/y_{rk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -y_{2k}/y_{rk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/y_{rk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -y_{mk}/y_{rk} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow r\text{-ésima} \\ \text{columna} \end{array}$$

Por consiguiente,  $\hat{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}$ , con la matriz elemental  $\mathbf{E}$  como se especificó. En resumen, la base inversa en una nueva iteración puede obtenerse premultiplicando la base inversa en la iteración anterior por una matriz elemental  $\mathbf{E}$ . Por supuesto, para especificar  $\mathbf{E}$  sólo se requiere almacenar la columna no unitaria  $\mathbf{g}$ , denominada *vector eta*, y su posición  $r$ .

Suponga que la base  $\mathbf{B}_1$  en la primera iteración es la identidad  $\mathbf{I}$ . Entonces la base inversa  $\mathbf{B}_2^{-1}$  en la iteración 2 es  $\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{I} = \mathbf{E}_1$ , en donde  $\mathbf{E}_1$  es la matriz elemental correspondiente a la primera iteración. De manera semejante,  $\mathbf{B}_3^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ , y en general,

$$\mathbf{B}_r^{-1} = \mathbf{E}_{r-1}\mathbf{E}_{r-2} \dots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1), que especifica la base inversa como un producto de matrices elementales a través de sus vectores *eta*, se denomina *forma producto de la inversa*. Usando esta forma, todos los pasos del método simplex se pueden efectuar sin pivoteo. Primero, será conveniente explicar un poco más sobre el producto de un vector por una matriz elemental.

### POSTMULTIPLICACIÓN

Sea  $\mathbf{E}$  una matriz elemental cuya columna no unitaria  $\mathbf{g}$  se encuentra en la  $r$ -ésima posición. Sea  $\mathbf{c}$  un vector renglón. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\mathbf{E} &= (c_1, c_2, \dots, c_m) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & g_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & g_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= (c_1, c_2, \dots, c_{r-1}, \sum_{i=1}^m c_i g_i, c_{r+1}, \dots, c_m) \\ &= (c_1, c_2, \dots, c_{r-1}, \mathbf{c}\mathbf{g}, c_{r+1}, \dots, c_m) \end{aligned} \quad (5.2)$$

En otras palabras,  $\mathbf{c}\mathbf{E}$  es igual a  $\mathbf{c}$ , excepto que la  $r$ -ésima componente se reemplaza por  $\mathbf{c}\mathbf{g}$ .

### PREMULTIPLICACIÓN

Sea  $\mathbf{a}$  un  $m$ -vector. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\mathbf{a} &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & g_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & g_m & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + g_1 a_r \\ \vdots \\ g_r a_r \\ \vdots \\ a_m + g_m a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + a_r \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\mathbf{Ea} = \hat{\mathbf{a}} + a_r \mathbf{g} \quad (5.3)$$

en donde  $\hat{\mathbf{a}}$  es igual a  $\mathbf{a}$ , excepto que la  $r$ -ésima componente  $a_r$  se reemplaza por cero.

Con las fórmulas anteriores para postmultiplicar y premultiplicar un vector por una matriz elemental, el método simplex revisado se puede efectuar sin pivoteo. En el análisis siguiente se explican los cálculos simplex.

CÁLCULO DEL VECTOR MULTIPLICADOR SIMPLEX  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$

Se desea calcular el vector  $\mathbf{w}$  en la iteración  $t$ . Observe que

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}_t^{-1} = \mathbf{c}_B \mathbf{E}_{t-1} \mathbf{E}_{t-2} \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1$$

El cálculo de  $\mathbf{w}$  puede llevarse a cabo de manera iterativa como se muestra a continuación. Primero se calcula  $\mathbf{c}_B \mathbf{E}_{t-1}$  según la ecuación (5.2). Después se aplica (5.2) para calcular  $(\mathbf{c}_B \mathbf{E}_{t-1}) \mathbf{E}_{t-2}$ , y así sucesivamente. Este proceso de transformación hacia atrás se denomina proceso BTRAN. Después de haber calculado  $\mathbf{w}$  es posible calcular  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$  para las variables no básicas. Aquí se puede detener el procedimiento o bien, introducir una variable no básica  $x_k$ .

CÁLCULO DE LA COLUMNA ACTUALIZADA  $\mathbf{y}_k$  Y DEL LADO DERECHO  $\bar{\mathbf{b}}$

Si  $x_k$  va a entrar a la base en la iteración  $t$ , entonces  $\mathbf{y}_k$  se calcula como sigue:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}_t^{-1} \mathbf{a}_k = \mathbf{E}_{t-1} \mathbf{E}_{t-2} \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{a}_k$$

Este cálculo puede efectuarse aplicando sucesivamente la ecuación (5.3) en el orden  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{t-1}$ . Este proceso de transformación hacia adelante algunas veces se denomina proceso FTRAN. Si  $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$ , entonces el proceso se detiene con la conclusión de que la solución óptima es no acotada. En caso contrario, la prueba usual de la razón mínima determina al índice  $r$  de la variable  $x_{B_r}$  que sale de la base. Por tanto,  $x_k$  entra y  $x_{B_r}$  sale de la base, respectivamente. Se genera una nueva matriz elemental  $\mathbf{E}_t$ , en donde la columna no unitaria  $\mathbf{g}$  está dada por

$$\begin{bmatrix} -y_{ik} \\ y_{rk} \\ \vdots \\ 1 \\ y_{rk} \\ \vdots \\ -y_{mk} \\ y_{rk} \end{bmatrix}$$

y aparece en la posición  $r$ . El nuevo lado derecho está dado por

$$\mathbf{B}_{t+1}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{E}_t \mathbf{B}_t^{-1} \mathbf{b}$$

Como  $\mathbf{B}_t^{-1} \mathbf{b}$  se conoce de la última iteración, entonces una simple aplicación de la ecuación (5.3) actualiza el vector del lado derecho  $\mathbf{b}$ .

ACTUALIZACIÓN DE LA BASE INVERSA

La base inversa se actualiza generando  $\mathbf{E}_t$  como se explicó antes. Es importante observar que el número requerido de matrices elementales para representar la base inversa aumenta en una unidad en cada iteración. Si este número se hace grande, será necesario reinvertir la base y representarla como el producto de  $m$  matrices elementales (ver el ejercicio 5.8). Es necesario recalcar que cada matriz elemental está descrita completamente por su columna no unitaria y la posición de ésta. Por

tanto, una matriz elemental  $\mathbf{E}$  puede almacenarse como  $\begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ r \end{bmatrix}$  en donde  $\mathbf{g}$  es la columna no unitaria y  $r$  es su posición.

### Ejemplo 5.2

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{Sujeta a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Se introducen las variables de holgura  $x_4, x_5$  y  $x_6$ . La base original consta de  $x_4, x_5$  y  $x_6$ .

Iteración 1

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} z = 0 \\ \mathbf{w} = \mathbf{c}_B = (0, 0, 0) \end{array}$$

Observe que  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ . Por consiguiente,

$$z_1 - c_1 = 1, z_2 - c_2 = 2, z_3 - c_3 = -1$$

Así,  $k = 2$  y  $x_2$  entra a la base.

$$y_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La variable  $x_B$ , sale de la base, en donde  $r$  está determinada por

$$\text{Mínimo} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{12}}, \frac{\bar{b}_2}{y_{22}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{32}} \right\} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{1} \right\} = 3$$

Por consiguiente,  $r = 2$ ; es decir,  $x_{B_2} = x_5$  sale de la base y  $x_2$  entra a ésta. La columna no unitaria de  $E_1$  está dada por

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{12}}{y_{22}} \\ y_{22} \\ \frac{1}{y_{22}} \\ -\frac{y_{32}}{y_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

también,  $E_1$  se representa por  $\begin{bmatrix} g \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Iteración 2

Se actualiza  $\bar{b}$ . De la ecuación (5.3) se tiene

$$\bar{b} = E_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = 0 - \bar{b}_2(z_2 - c_2) = -6$$

$$w = c_B E_1 = (0, -2, 0) E_1$$

Observando la ecuación (5.2), entonces  $w = (0, -1, 0)$ . Observe que  $z_j - c_j = w a_j - c_j$ . Por consiguiente,

$$z_1 - c_1 = 2, z_3 - c_3 = 1$$

Por tanto,  $k = 1$  y  $x_1$  entra a la base. Observando la ecuación (5.3),

$$y_1 = E_1 a_1 = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Luego,  $x_B$ , sale de la base, en donde  $r$  está determinada por

$$\text{Mínimo} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{11}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{31}} \right\} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{2}{\frac{5}{2}} \right\} = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente,  $r = 1$ ; es decir,  $x_{B_1} = x_4$  sale de la base y  $x_1$  entra a la base. La columna no unitaria de  $E_2$  está dada por

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} \\ y_{11} \\ -\frac{y_{21}}{y_{11}} \\ -\frac{y_{31}}{y_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

También,  $E_2$  está representada por  $\begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Iteración 3

Se actualiza  $\bar{b}$ . De la ecuación (5.3), se tiene

$$\bar{b} = E_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = -6 - \bar{b}_1(z_1 - c_1) = -\frac{22}{3}$$

$$w = c_B E_2 E_1 = (-1, -2, 0) E_2 E_1$$

Al aplicar dos veces al ecuación (5.2) se obtiene

$$\mathbf{c}_B \mathbf{E}_2 = \left(-\frac{4}{3}, -2, 0\right)$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{c}_B \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_1 = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

Observe que  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ . Por tanto,

$$z_3 - c_3 = -\frac{5}{3}, z_5 - c_5 = -\frac{1}{3}$$

Como  $z_j - c_j \leq 0$  para todas las variables no básicas, se cuenta ya con la solución óptima. El valor objetivo es  $-\frac{22}{3}$  y

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

### Descomposición LU o factorización de la base

La forma producto de la inversa esencialmente registra la historia de los pivoteos efectuados a través de una colección de vectores etc. Aunque este método es conceptualmente importante y útil, de alguna manera es obsoleto desde el punto de vista computacional porque está basado en una técnica de eliminación de Gauss-Jordan completa para resolver sistemas de ecuaciones. Una técnica más popular utilizada en casi todos los paquetes de cómputo modernos es el *método de factorización LU*, que se basa en la estrategia más eficiente de triangularización gaussiana. Su denominación proviene del hecho de que usa factores triangulares inferiores y superiores (Lower y Upper, respectivamente, en inglés) de la base  $\mathbf{B}$ . Este método es de mayor utilidad cuando el problema es de gran escala y ralo; y también es exacto y numéricamente estable (los errores de redondeo están controlados y no tienden a acumularse).

Al implementar el algoritmo simplex, los sistemas de ecuaciones que es necesario resolver son  $\mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{w} \mathbf{B} = \mathbf{c}_B$  y  $\mathbf{B} \mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$ , una vez que se ha determinado una variable de entrada  $x_k$ . La primera de estas ecuaciones proporciona los valores de las variables básicas. Como los valores de las variables simplemente se actualizan en cada iteración, basta resolverla inicialmente o cada vez que  $\mathbf{B}$  se refactoriza a fin de preservar exactitud numérica. El segundo sistema calcula el vector multiplicador simplex  $\mathbf{w}$  que se usa para apreciar las variables no básicas a través de la relación  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ . Una vez que para entrar a la base se ha elegido una variable  $x_k$  con  $z_k - c_k > 0$ , es necesario calcular su columna  $\mathbf{y}_k$  actualizada. Lo anterior se efectúa mediante el tercer sistema de ecuaciones. El vector  $\mathbf{y}_k$  proporciona la información sobre cómo cambian las variables básicas cuando  $x_k$  se incrementa, y determina la variable de salida por medio de la prueba de la razón mínima. Por tanto, se obtiene una nueva base junto con los valores de las variables básicas (posiblemente) revisados. Este proceso se repite a continuación.

Ahora, si parece que  $\mathbf{B}$  es una matriz triangular superior, por ejemplo, entonces los sistemas de ecuaciones anteriores pueden resolverse fácil y exactamente. Los sistemas  $\mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{B} \mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$  pueden resolverse por medio de un proceso de sustitución hacia atrás en el que la última componente del vector solución está dada directamente por la última ecuación. Ésta se sustituye en la penúltima ecuación a fin de obtener la penúltima componente del vector solución, etc. El sistema  $\mathbf{w} \mathbf{B} = \mathbf{c}_B$  puede resolverse de manera semejante por medio de un proceso de sustitución hacia adelante en el que las componentes de  $\mathbf{w}$  se obtienen secuencialmente en el orden  $w_1, w_2, \dots, w_m$ .

Por otra parte, si  $\mathbf{B}$  no es triangular (superior), entonces es posible hacerla así a través de una serie de operaciones de renglones. Algebraicamente, este proceso puede representarse como una premultiplicación de  $\mathbf{B}$  por una matriz  $\mathbf{R}$  no singular de transformación obtenida por operaciones de renglones tal que  $\mathbf{R} \mathbf{B} = \mathbf{U}$ , una matriz triangular superior. Si se efectúa lo anterior, entonces para resolver el sistema  $\mathbf{B} \mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$  es posible premultiplicar ambos miembros por  $\mathbf{R}$  a fin de obtener  $\mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{y}_k = \mathbf{R} \mathbf{a}_k$ ; es decir,  $\mathbf{U} \mathbf{y}_k = \mathbf{a}'_k$ , en donde  $\mathbf{a}'_k \equiv \mathbf{R} \mathbf{a}_k$ . Por consiguiente, el sistema triangular superior  $\mathbf{U} \mathbf{y}_k = \mathbf{a}'_k$  puede resolverse ahora aplicando un proceso de sustitución hacia atrás. Para resolver el sistema  $\mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$  es posible aplicar una estrategia idéntica. Para resolver el sistema  $\mathbf{w} \mathbf{B} = \mathbf{c}_B$ , considere la transformación afín  $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \mathbf{R}$ . Entonces el sistema anterior se transforma en  $\mathbf{w}' \mathbf{R} \mathbf{B} = \mathbf{c}_B$  o bien,  $\mathbf{w}' \mathbf{U} = \mathbf{c}_B$ , a partir del cual ahora es posible obtener  $\mathbf{w}'$  mediante un proceso de sustitución hacia adelante. Conociendo  $\mathbf{w}'$ , ahora es posible calcular  $\mathbf{w}$  como  $\mathbf{w}' \mathbf{R}$ . Entonces, si las operaciones de renglones implicadas no son demasiado intensas desde el punto de vista computacional y están bien acondicionadas (que no impliquen divisiones entre números pequeños, por ejemplo), entonces el sistema de ecuaciones puede resolverse de nuevo conveniente y exactamente.

Observe que si las operaciones de renglones necesarias para triangularizar superiormente a  $\mathbf{B}$  implican un simple proceso de reducción gaussiana renglón por renglón, entonces  $\mathbf{R}$  debe ser una matriz triangular inferior. En otras palabras, el primer renglón de  $\mathbf{B}$  debe dejarse como está, al segundo renglón debe sumarse un múltiplo del primer renglón a fin de hacer cero al elemento (2, 1) de  $\mathbf{B}$ , al tercer renglón de  $\mathbf{B}$  deben sumarse un múltiplo del primer renglón y un múltiplo del segundo renglón a fin de hacer cero los elementos (3, 1) y (3, 2), etc. En este caso, debe obtenerse  $\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \equiv \mathbf{L} \mathbf{U}$ , el producto de una matriz triangular inferior  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{R}^{-1}$  y una matriz triangular superior  $\mathbf{U}$ . Por tanto, tal factorización se denomina *LU*, inclusive en casos en los que  $\mathbf{R}$  no es triangular inferior.

### Obtención de la factorización LU de B

Típicamente, además de los pivoteos o reducciones gaussianas también es necesario efectuar permutaciones de renglones en la factorización, a fin de obtener elementos pivote idóneos. Por ejemplo, para empezar, podría quererse hacer que tal renglón fuese el primer renglón con el coeficiente de mayor valor absoluto en la primera columna, de modo que los pivotes gaussianos asociados con cero en la







*Hessenberg*. Observe que los elementos en la región sombreada en la ecuación (5.7) solían estar a lo largo de la diagonal de  $\mathbf{U}$ , por lo que son diferentes de cero debido a que  $\mathbf{U}$  es no singular. A continuación, para triangularizar  $\mathbf{RB}_{\text{nueva}}$  se efectúan como antes las permutaciones adicionales y los pivoteos gaussianos comprendidos en las ecuaciones (5.4) y (5.6). Los factores adicionales del tipo  $(\mathbf{G}_i\mathbf{P}_i)$  usados se anexan a  $\mathbf{R}$  a fin de obtener el nuevo factor  $\mathbf{R}$ .

#### Ejemplo 5.4

Considere el ejemplo 5.3. Suponga que se aprecian las variables no básicas y que se elige alguna variable  $x_4$  como la variable de entrada. Sean  $\mathbf{a}_4 = (1, -1, 0)^t$  y  $c_4 = -2$ . Por tanto,  $z_4 - c_4 = \mathbf{w}\mathbf{a}_4 - c_4 = (-1, 0, 2)(1, -1, 0)^t - (-2) = 1 > 0$ . Además, el sistema  $\mathbf{B}\mathbf{y}_4 = \mathbf{a}_4$  proporciona  $\mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{y}_4 = \mathbf{R}\mathbf{a}_4$ , en donde  $\mathbf{R}\mathbf{B} = \mathbf{U}$ , y

$$\mathbf{R}\mathbf{a}_4 = \mathbf{G}_2\mathbf{P}_2\mathbf{G}_1\mathbf{P}_1\mathbf{a}_4 = \mathbf{G}_2\mathbf{P}_2\mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2\mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Así,  $\mathbf{U}\mathbf{y}_4 = \mathbf{R}\mathbf{a}_4$  proporciona  $\mathbf{y}_4 = (-\frac{6}{5}, 1 - \frac{2}{5})^t$ . En consecuencia, al aplicar la prueba de la razón mínima, la variable básica correspondiente a la segunda columna de  $\mathbf{B}$  sale de la base. Al eliminar esta segunda columna de  $\mathbf{B}$  y anexando  $\mathbf{a}_4$  como la última columna de  $\mathbf{B}$  se obtiene la nueva base  $\mathbf{B}_{\text{nueva}}$ . Por  $\mathbf{U}$  y de la ecuación (5.8) se obtiene (como en la ecuación (5.7))

$$\mathbf{R}\mathbf{B}_{\text{nueva}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Además, al pivotar, el lado derecho se actualiza a  $(\frac{17}{5}, 2, \frac{9}{5})^t$ . Debido al reordenamiento de las columnas de  $\mathbf{B}_{\text{nueva}}$ , se obtiene que el nuevo lado derecho es  $(\frac{17}{5}, \frac{9}{5}, 2)^t$ . Para triangularizar la segunda columna de  $\mathbf{R}\mathbf{B}_{\text{nueva}}$ , se usa  $\mathbf{P}_3 = \mathbf{I}$  y, por la ecuación (5.6), se usa

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

con lo que se obtiene

$$(\mathbf{G}_3\mathbf{P}_3)(\mathbf{G}_2\mathbf{P}_2)(\mathbf{G}_1\mathbf{P}_1)\mathbf{B}_{\text{nueva}} \equiv (\mathbf{G}_3\mathbf{P}_3)\mathbf{R}\mathbf{B}_{\text{nueva}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{\text{nueva}}$$

Los nuevos factores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{U}$  son, respectivamente,  $\mathbf{R}_{\text{nueva}} \equiv \mathbf{G}_3\mathbf{P}_3\mathbf{G}_2\mathbf{P}_2\mathbf{G}_1\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{U}_{\text{nueva}}$  es como ya se proporcionó. A continuación se calcula el nuevo vector multiplicador simplex  $\mathbf{w}$ , apreciando las variables no básicas, y luego se continúa el proceso.

#### Algunas observaciones a las implementaciones

Con base en el análisis anterior, debe ser evidente que la técnica de factorización  $\mathbf{LU}$  se ajusta particularmente bien a problemas ralos, y que puede beneficiarse grandemente si los factores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{U}$  mismos son ralos. A fin de lograr lo anterior, es posible inicialmente tratar de permutar los renglones y las columnas de la matriz (rala)  $\mathbf{B}$  a fin de hacerla tan "triangular superior" como sea posible, a la vez que se intenta reducir cualesquiera "saltos" y "picos" que sobresalgan por debajo de la diagonal. Casi siempre se intenta preservar la rareza de los factores de esta manera, de modo que aun cuando  $\mathbf{B}^{-1}$  puede tender a llenarse (volverse densa con respecto a  $\mathbf{B}$ ), el número de elementos diferentes de cero en las matrices pivote gaussianas y en  $\mathbf{U}$  tiendan a ser del mismo orden que el número de elementos diferentes de cero en  $\mathbf{B}$  misma. Por su puesto, a fin de preservar exactitud, requerimientos de almacenamiento ralos y para reducir el esfuerzo computacional, es necesario refactorizar la nueva base periódicamente.

Casi todos los problemas también se benefician por *escalación*, en donde los renglones y las columnas se escalan secuencialmente dividiendo entre, por ejemplo, la magnitud promedio de los elementos diferentes de cero a fin de hacer que las magnitudes de los coeficientes en los renglones y las columnas sean compatibles entre sí. Lo anterior mejora la exactitud numérica del algoritmo y también puede reducir grandemente el esfuerzo de resolución, en virtud de la ruta simplex generada.

Los mismos conceptos motivan la estrategia de selección de la variable de entrada con la *arista más pronunciada*. Aquí, para entrar a la base en vez de seleccionar la variable que simplemente tiene el valor más positivo de  $z_j - c_j$  (regla de Dantzig), la selección puede llevarse a cabo eligiendo el valor más positivo de  $(z_j - c_j)/\gamma_j$ , en donde  $\sqrt{1 + \sum_r y_{rj}^2}$ . Observe que  $\gamma_j$  es la norma euclídeana del vector de dirección a lo largo de la arista asociada con el incremento en una unidad de la variable no básica  $x_j$ . Por tanto,  $(z_j - c_j)/\gamma_j$  es la razón de cambio negativa en el valor de la función objetivo por unidad de distancia a lo largo de esta dirección. Por supuesto, a fin de conservar el esfuerzo computacional por iteración, las cantidades  $\gamma_j$  deben actualizarse en vez de volver a calcularse de una iteración a otra (ver la sección de notas y bibliografía). Esta regla mejora de manera significativa el rendimiento del algoritmo simplex en comparación con la regla de Dantzig, especialmente en problemas sin escalar.

Otra estrategia relacionada es la *apreciación parcial* o *suboptimización*. Hasta el momento, se ha sugerido efectuar una apreciación total de todas las variables no básicas en cada iteración. Lo anterior es conveniente y ventajoso para problemas que no tienen más de aproximadamente 1000 variables. Sin embargo, para problemas de mayor tamaño, tal operación de apreciación total puede ser costosa desde el punto de vista computacional. Por lo general se efectúa una apreciación parcial o

## SIETE: EL PRINCIPIO DE LA DESCOMPOSICIÓN

En este capítulo se analizará la técnica de descomposición de Dantzig-Wolfe y sus relaciones con las técnicas de particiones de Benders y de relajación Lagrangiana para tratar problemas de programación lineal a gran escala y/o con una estructura especial. En un modelo corporativo de administración o en un modelo logístico, no es extraño producir un programa lineal con muchos miles de renglones y un número aparentemente ilimitado de columnas. En tales problemas es necesario aplicar algún método para convertir los grandes problemas en uno o más problemas más pequeños de tamaño manejable coordinados idóneamente. Las técnicas de relajación de Dantzig-Wolfe, de Benders o de Lagrange, que son todas equivalentes para problemas de programación lineal, y a las que simplemente se hará referencia como aplicación del *principio de descomposición*, realizan exactamente lo anterior.

Aun cuando un programa lineal sea de tamaño manejable, algunas de sus restricciones pueden tener una estructura especial que permita un manejo eficiente. En tales casos, sería deseable separar el programa lineal en un programa compuesto por dos partes, una parte con una estructura general y otra parte con una estructura especial, al que sea posible aplicar un método de descomposición más eficiente. De nuevo, el principio de descomposición puede aplicarse a tal programa lineal a fin de obtener el efecto deseado.

El principio de descomposición es un procedimiento sistemático para resolver programas lineales de gran escala o programas lineales que contienen restricciones de estructura especial. Las restricciones se dividen en dos conjuntos: restricciones generales (o restricciones *complicantes*) y restricciones con estructura especial. Después será evidente que no es necesario que ningún conjunto tenga estructura especial; sin embargo, cuando se dispone de una estructura especial, se mejora la eficiencia del principio de descomposición.

La estrategia del principio de descomposición consiste en operar sobre dos programas lineales separados: uno sobre el conjunto de las restricciones generales y el otro sobre el conjunto de las restricciones especiales. La información se pasa entre uno y otro de los programas lineales hasta llegar a un punto en el que se alcanza la solución del problema original. El programa lineal sobre las restricciones generales se denomina *programa maestro*, y el programa lineal sobre las

restricciones especiales se denomina *subproblema*. El programa maestro le pasa un nuevo conjunto de coeficientes de costo al subproblema y recibe una nueva columna basada en tales coeficientes. Ésta es la razón por la que tal procedimiento también se denomina técnica de *generación de columnas*.

Para comenzar, se supondrá que el conjunto de restricciones especiales es acotado. Una vez que el principio de descomposición se haya desarrollado para este caso y se haya analizado cómo se inicia el procedimiento, se relajará la hipótesis de acotamiento y también se extenderá el procedimiento a subproblemas múltiples, y se mostrará su relación con otros procedimientos.

**7.1 EL ALGORITMO DE DESCOMPOSICIÓN**

Considere el siguiente programa lineal, en donde  $X$  representa un conjunto poliédrico de estructura especial,  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $b$  es un  $m$ -vector.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \mathbf{c}\mathbf{x} \\ &\text{Sujeta a } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Para simplificar la exposición, se supondrá que  $X$  es acotado (esta hipótesis se relajará en la sección 7.4). Como  $X$  es un conjunto poliédrico acotado, entonces cualquier punto  $\mathbf{x} \in X$  se puede representar como una combinación convexa del número finito de puntos extremos de  $X$ . Denotando estos puntos por  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t$ , toda  $\mathbf{x} \in X$  se puede representar como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{j=1}^t \lambda_j \mathbf{x}_j \\ \sum_{j=1}^t \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\mathbf{x}$ , el problema de optimización anterior se puede transformar en el siguiente *problema maestro* en las variables  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ .

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \sum_{j=1}^t (\mathbf{c}\mathbf{x}_j)\lambda_j \\ &\text{Sujeta a } \sum_{j=1}^t (\mathbf{A}\mathbf{x}_j)\lambda_j = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1 \tag{7.2}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t \tag{7.3}$$

Puesto que  $t$ , el número de puntos extremos del conjunto  $X$  suele ser muy grande, tratar de enumerar explícitamente todos los puntos extremos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t$  y resolver explícitamente este problema sería una tarea muy difícil. En consecuencia, se intentará encontrar una solución óptima del problema (y por tanto del problema original) sin enumerar explícitamente todos los puntos extremos.

**Aplicación del método simplex revisado**

Considere que el problema anterior se resuelve aplicando el método simplex revisado. Suponga que se tiene una solución básica factible  $\lambda = (\lambda_B, \lambda_N)$ . Suponga además que se conoce la base inversa  $\mathbf{B}^{-1}$  asociada, de  $(m + 1) \times (m + 1)$ , (en la sección 7.3 se analizará en detalle el proceso de inicialización). Denotando por  $\mathbf{w}$  y  $\alpha$  las variables duales correspondientes a las ecuaciones (7.1) (7.2), se obtiene  $(\mathbf{w}, \alpha) = \hat{\mathbf{c}}_B \mathbf{B}^{-1}$ , en donde  $\hat{\mathbf{c}}_B$  es el costo de las variables básicas, con  $\hat{c}_j = \mathbf{c}\mathbf{x}_j$  para cada variable básica  $\lambda_j$ . A continuación se muestran la base inversa, las variables duales, los valores de las variables básicas y la función objetivo, en donde

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$$

BASES INVERSAS	LD
$(\mathbf{w}, \alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	

El método simplex revisado procede concluyendo que la solución actual es óptima o bien, decidiendo incrementar una variable no básica. Lo anterior se efectúa calculando primero

$$\begin{aligned} z_k - \hat{c}_k &= \text{Máximo}_{1 \leq j \leq t} z_j - \hat{c}_j = \text{Máximo}_{1 \leq j \leq t} (\mathbf{w}, \alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{c}\mathbf{x}_j \\ &= \text{Máximo}_{1 \leq j \leq t} \mathbf{w}\mathbf{A}\mathbf{x}_j + \alpha - \mathbf{c}\mathbf{x}_j \end{aligned} \tag{7.4}$$

Puesto que  $z_j - \hat{c}_j = 0$  para las variables básicas, entonces el máximo anterior es  $\geq 0$ . Por tanto, si  $z_k - \hat{c}_k = 0$ , entonces  $z_j - \hat{c}_j \leq 0$  para todas las variables no básicas y se tiene a la mano la solución óptima. Por otra parte, si  $z_k - \hat{c}_k > 0$ , entonces es posible incrementar la variable no básica  $\lambda_k$ .

La determinación del índice  $k$  aplicando directamente la ecuación (7.4) no es computacionalmente factible debido a que  $t$  es muy grande ya que los puntos extremos  $\mathbf{x}_j$  correspondientes a las variables no básicas  $\lambda_j$  no se conocen explícitamente. Por tanto, es necesario diseñar un esquema alternativo. Puesto que  $X$  es un conjunto poliédrico acotado, el máximo de cualquier objetivo lineal se puede alcanzar en uno de los puntos extremos. En consecuencia,

$$\text{Máximo}_{1 \leq j \leq t} (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c}) \mathbf{x}_j + \alpha = \text{Máximo}_{\mathbf{x} \in X} (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$$

En resumen, dada una solución básica factible  $(\lambda_B, \lambda_N)$  con variables duales  $(w, \alpha)$ , se resuelve el siguiente *subproblema* lineal, lo cual es "fácil" debido a la estructura especial de  $X$ .

$$\text{Maximizar } (wA - c)x + \alpha$$

$$\text{Sujeta a } x \in X$$

Observe que la función objetivo contiene una constante. Este hecho se puede manejar fácilmente tomando  $\alpha$  como el valor inicial del LD para  $z$ , en vez del valor normal 0. Sea  $x_k$  la solución óptima del subproblema anterior con valor objetivo  $z_k - \hat{c}_k$ . Si  $z_k - \hat{c}_k = 0$ , entonces la solución básica factible  $(\lambda_B, \lambda_N)$  es óptima. De lo contrario, si  $z_k - \hat{c}_k > 0$ , entonces la variable  $\lambda_k$  entra a la base. Así como en el

método simplex revisado, la columna correspondiente  $\begin{pmatrix} Ax_k \\ 1 \end{pmatrix}$  se actualiza premultipliándola por  $B^{-1}$  con lo que se obtiene  $y_k = B^{-1} \begin{pmatrix} Ax_k \\ 1 \end{pmatrix}$ . Observe que  $y_k \leq 0$  no puede ocurrir, porque se ha supuesto que  $X$  es acotado, con lo que se produce un

problema maestro acotado. La columna actualizada  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$  se adjunta al tableau simplex revisado. La variable  $\lambda_{B_r}$  que sale de la base se determina aplicando la prueba de la razón mínima de costumbre. La base inversa, las variables duales y el LD se actualizan pivoteando en  $y_{rk}$ . Después de actualizar, se repite el proceso.

Ahora ya se tienen todos los ingredientes del algoritmo de descomposición, del cual a continuación se presenta un resumen. Observe que el paso maestro proporciona una solución factible mejorada del problema completo, y que el subproblema comprueba si  $z_j - \hat{c}_j \leq 0$  para todo  $\lambda_j$ , o bien, determina el  $z_k - \hat{c}_k$  más positivo.

**Resumen del algoritmo de descomposición**

PASO INICIAL

Se encuentra una solución básica factible inicial del sistema definido por las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3) (en la sección 7.3 se analizará en detalle cómo obtener una solución básica factible inicial). La base se denota por  $B$  y se forma el siguiente *arreglo maestro* en donde  $(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1}$  (recuerde que  $\hat{c}_j = cx_j$ ), y

$$\bar{b} = B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$$

BASES INVERSAS	LD
$(w, \alpha)$	$\hat{c}_B \bar{b}$
$B^{-1}$	$\bar{b}$

PASO PRINCIPAL

1. Se resuelve el siguiente *subproblema*.

$$\text{Maximizar } (wA - c)x + \alpha$$

$$\text{Sujeto a } x \in X$$

Sea  $x_k$  una solución básica factible óptima con valor objetivo  $z_k - \hat{c}_k$ . Si  $z_k - \hat{c}_k = 0$ , entonces el proceso se detiene; la solución básica factible del último paso maestro es una solución óptima del problema completo. En caso contrario, se continúa con el paso 2.

2. Sea  $y_k = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_k \\ 1 \end{bmatrix}$  y adjúntese la columna actualizada  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$  al arreglo maestro. Se pivotea en  $y_{rk}$ , en donde el índice  $r$  se determina como sigue:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Con lo anterior se actualizan las variables duales, la base inversa y el lado derecho. Después de pivotear se elimina la columna de  $\lambda_k$  se repite el paso 1.

**Algunas observaciones sobre el algoritmo de descomposición**

1. Observe que el algoritmo anterior es una implementación directa del método simplex revisado, excepto que el cálculo de  $z_k - \hat{c}_k$  se efectúa resolviendo un subproblema. Por tanto, el algoritmo converge en un número finito de iteraciones en el supuesto de que cuando hay degeneración se aplica una regla de prevención de ciclado tanto en el paso maestro como en el subproblema.
2. En cada iteración, el paso maestro proporciona (en un paso de pivoteo no degenerado) una nueva solución básica factible mejorada del sistema dado por las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3) mediante la introducción de la variable no básica  $\lambda_k$ , que es generada por el subproblema. En cada iteración el subproblema proporciona un punto extremo  $x_k$ , que corresponde a una columna actualizada  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$  y, por tanto, como ya se mencionó, este procedimiento algunas veces se denomina *esquema de columnas*.
3. En cada iteración, se transfiere un vector dual diferente del paso maestro al subproblema. En vez de resolver de nuevo el subproblema en cada iteración, es posible utilizar la base óptima de la última iteración modificando el renglón de costo.

4. En cada iteración, el problema no requiere ser optimizado por completo. Basta que el punto extremo actual  $\mathbf{x}_k$  cumpla  $z_k - \hat{c}_k = (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}_k + \alpha > 0$ . En este caso,  $\lambda_k$  es un candidato para entrar a la base del problema maestro.
5. Si las restricciones maestras son del tipo de desigualdad, entonces además de resolver el subproblema es necesario comprobar los  $z_j - \hat{c}_j$  en cuanto a variables de holgura no básicas. Para una restricción maestra  $i$  del tipo  $\leq$ , con variables de holgura asociadas  $s_i$ , se tiene

$$z_{s_i} - c_{s_i} = (\mathbf{w}, \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = w_i$$

Por tanto, para un problema de minimización si  $w_i > 0$ , entonces una variable de holgura asociada con una restricción  $\leq$  es elegible para entrar a la base. (Observe que para restricciones del tipo  $\geq$ , el criterio de entrada es  $w_i < 0$ .)

Debe resultar evidente que si hay otras columnas de variables que se mantienen explícitamente en el problema maestro además de las columnas de la variable  $\lambda$  o de las columnas de holgura, entonces como el segundo caso, estas columnas también pueden apreciarse usando el vector multiplicador simplex  $(\mathbf{w}, \alpha)$  de la forma acostumbrada a fin de probar su elegibilidad para entrar a la base. (Vea el ejercicio 7.4).

6. Suponga que el programa lineal es factible y que  $\mathbf{A}$  es de  $m \times n$  con rango  $m$ , de modo que el problema maestro tiene soluciones básicas factibles con bases de tamaño  $(m+1) \times (m+1)$ . Debido a que en cada solución factible existen  $m$  restricciones linealmente independientes conectantes  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , se está buscando un óptimo sobre algún subconjunto de  $X$  de dimensión  $p = (n - m)$ . Por tanto, en una solución óptima (punto extremo)  $\mathbf{x}^*$  del programa lineal original, deben ser conectantes (por lo menos)  $p$  restricciones linealmente independientes definitorias de  $X$ . Por consiguiente,  $\mathbf{x}^*$  está en (cuando mucho) una cara de  $X$  de dimensión  $(n - p) = m$ . Con base en el análisis del capítulo 2 se concluye que como esta cara en sí es (cuando mucho) un politopo  $m$ -dimensional tal que sus vértices son un subconjunto de los vértices de  $X$ , entonces es posible arreglárselas para representar a  $\mathbf{x}^*$  usando cuando mucho  $(m+1)$  vértices de  $X$ . Por tanto, en condiciones de optimalidad se requieren cuando mucho  $(m+1)$  variables positivas  $\lambda$ . Por supuesto, lo anterior concuerda con el tamaño de la base del problema maestro.

Sobre esta cara de  $X$  de dimensión  $m$  (cuando mucho), puede haber varias formas de representar  $\mathbf{x}^*$  en términos de cuando mucho  $(m+1)$  puntos extremos de  $X$ . Computacionalmente, resulta entonces que por lo general es posible obtener una combinación convexa de un conjunto de puntos extremos de  $X$  que lleve con bastante rapidez la solución obtenida a un intervalo entre el 1 y el 5% de optimalidad. Sin embargo, en muchas clases de problemas se ha observado que la tasa de convergencia del extremo final para obtener una representación más exacta de una solución óptima puede

ser muy lenta. (El algoritmo no necesita producir una solución óptima de punto extremo para el problema original cuando existen óptimos alternativos). Por tanto, se está al corriente de terminar este procedimiento una vez que llega a un intervalo que varía del 1 al 5% de optimalidad. El siguiente análisis proporciona un constructo útil para implementar dicho criterio de terminación.

### Cálculo y uso de cotas inferiores

Recuerde que el algoritmo de descomposición se detiene cuando Máximo  $z_j - \hat{c}_j = 0$ . Debido al gran número de variables  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , continuar los cálculos hasta que se satisface esta condición puede consumir mucho tiempo en el caso de problemas grandes.

Se desarrollará una cota inferior para el objetivo de cualquier solución factible del problema completo y, en consecuencia, una cota inferior para el objetivo óptimo. Ya que por medio del problema maestro el algoritmo de descomposición genera puntos factibles con valores objetivos no empeorados, se tiene una sucesión de cotas superiores no crecientes. Por tanto, el procedimiento puede detenerse cuando la diferencia entre el valor objetivo en el punto factible actual y las cotas inferiores esté dentro de una tolerancia aceptable. Quizá con lo anterior no se obtenga el verdadero punto óptimo, pero se garantizan soluciones factibles aceptables dentro de cualquier rango de exactitud deseada con respecto al óptimo. Considere el siguiente subproblema.

$$\text{Maximizar } (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$$

$$\text{Sujeta a } \mathbf{x} \in X$$

en donde  $\mathbf{w}$  es el vector dual que pasó en el paso maestro. Sea  $z_k - \hat{c}_k$  el objetivo óptimo del subproblema anterior. Ahora, sea  $\mathbf{x}$  cualquier solución factible del problema completo; es decir,  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{x} \in X$ . Por definición de  $z_k - \hat{c}_k$  y como  $\mathbf{x} \in X$ , se tiene

$$(\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha \leq (z_k - \hat{c}_k)$$

Puesto que  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , entonces la desigualdad anterior implica que

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \geq \mathbf{w}\mathbf{A}\mathbf{x} - (z_k - \hat{c}_k) + \alpha = \mathbf{w}\mathbf{b} + \alpha - (z_k - \hat{c}_k) = \hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}} - (z_k - \hat{c}_k)$$

Como lo anterior es cierto para cualquier  $\mathbf{x} \in X$  con  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , entonces

$$\begin{array}{l} \text{Mínimo} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in X \end{array} \quad \mathbf{c}\mathbf{x} \geq \hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}} - (z_k - \hat{c}_k)$$

En otras palabras,  $\hat{c}_B \bar{\mathbf{b}} - (z_k - \hat{c}_k)$  es una cota inferior del valor objetivo óptimo del problema completo. Observe que  $\hat{c}_B \bar{\mathbf{b}}$  es la mejor cota superior actual. Sin embargo, las cotas inferiores generadas no requieren ser monótonas, por lo que puede ser necesario mantener la mejor (la mayor) cota inferior.

### 7.2 EJEMPLO NUMÉRICO

Considere el siguiente problema.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ &\text{Sujeta a} && \begin{aligned} &x_1 + x_3 &\leq 2 \\ &x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 3 \\ &x_1 &\leq 2 \\ &x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ &-x_3 + x_4 &\leq 2 \\ &2x_3 + x_4 &\leq 6 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Observe que las restricciones tercera y cuarta sólo contienen a  $x_1$  y  $x_2$ , mientras que las restricciones quinta y sexta sólo contiene a  $x_3$  y  $x_4$  (después se dirá algo más sobre esta estructura especial). Si  $X$  se considera como el conjunto de las cuatro últimas restricciones además de las restricciones de no negatividad, entonces minimizar una función lineal sobre  $X$  es un proceso simple, ya que el subproblema se puede descomponer en dos subproblemas. Por consiguiente, las dos primeras restricciones se manejarán como  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ , en donde  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  las restricciones restantes se manejarán como  $X$ . Observe que cualquier punto  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  en  $X$  debe tener sus dos primeras componentes y sus dos últimas componentes en los conjuntos respectivos  $X_1$  y  $X_2$  que se muestran en la figura 7.1.

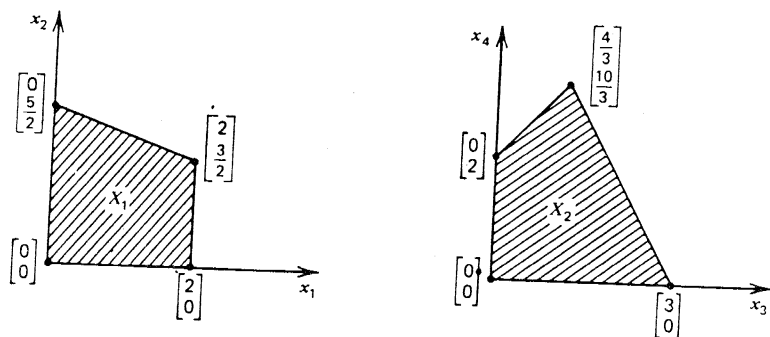


Figura 7.1. Representación de  $X$  por medio de dos conjuntos.

### Paso inicial

El problema se vuelve a plantear como sigue, en donde  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t$  son los puntos extremos de  $X$ ,  $\hat{c}_j = \mathbf{c}\mathbf{x}_j$  para  $j = 1, 2, \dots, t$ , y  $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$  es el vector de holgura.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{j=1}^t \hat{c}_j \lambda_j \\ &\text{Sujeta a} && \sum_{j=1}^t (\mathbf{A}\mathbf{x}_j) \lambda_j + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ &&& \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1 \\ &&& \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t \\ &&& \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Se requiere una base inicial con  $\mathbf{B}^{-1}$  conocida. Suponga que la base inicial consta de  $\mathbf{s}$  y  $\lambda_1$ , en donde  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0, 0)$  es un punto extremo de  $X$  con  $\mathbf{c}\mathbf{x}_1 = 0$ . Por consiguiente,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector  $(\mathbf{w}, \alpha) = \hat{c}_B \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}$ , y  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix}$ . Con lo anterior se obtiene el siguiente tableau. Observe que las tres primeras columnas proporcionan  $(w_1, w_2, \alpha)$  en el renglón 0 y  $\mathbf{B}^{-1}$  en los renglones restantes.

	BASES INVERSAS			LD
$z$	0	0	0	0
$s_1$	1	0	0	2
$s_2$	0	1	0	3
$\lambda_1$	0	0	1	1

### Iteración 1

SUBPROBLEMA

Resuelva el siguiente subproblema.

$$\text{Maximizar } (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$$

$$\text{Sujeta a } \mathbf{x} \in X$$



Aquí,  $(w_1, w_2) = (0, 0)$  con base en el arreglo anterior. Por consiguiente, el subproblema es como sigue:

$$\text{Maximizar } 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0$$

$$\text{Sujeta a } \mathbf{x} \in X$$

Este problema es separable en los vectores  $(x_1, x_2)$  y  $(x_3, x_4)$ , y es posible resolverlo geoméricamente. Usando la figura 7.1, es fácil comprobar que la solución óptima es  $\mathbf{x}_2 = (2, \frac{3}{2}, 3, 0)$  con objetivo  $z_2 - \hat{c}_2 = \frac{17}{2}$ . Como  $z_2 - \hat{c}_2 = \frac{17}{2} > 0$ , entonces se introduce  $\lambda_2$  correspondiente a  $\mathbf{x}_2$ . La cota inferior =  $\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}} - (z_2 - \hat{c}_2) = 0 - \frac{17}{2}$ . Recuerde que el mejor objetivo hasta el momento es 0.

PASO MAESTRO

$$z_2 - \hat{c}_2 = \frac{17}{2}$$

$$\mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Ax}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

se actualiza premultiplicándolo por  $\mathbf{B}^{-1}$ . Así,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La columna se inserta

$$\begin{bmatrix} z_2 - \hat{c}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

en el arreglo anterior y se pivotea. Con lo anterior se obtienen los dos tableaux siguientes (la columna  $\lambda_2$  se elimina después de pivotear.)

BASES INVERSAS LD

$z$	0	0	0	0
$s_1$	1	0	0	2
$s_2$	0	1	0	3
$\lambda_1$	0	0	1	1

$\lambda_2$

$\frac{17}{2}$
5
$\frac{7}{2}$
1

BASES INVERSAS LD

$z$	$-\frac{17}{10}$	0	0	$-\frac{17}{5}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
$s_2$	$-\frac{7}{10}$	1	0	$\frac{8}{5}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$

La mejor solución factible del problema completo está dada por

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

$$= \frac{3}{5}(0, 0, 0, 0) + \frac{2}{5}(2, \frac{3}{2}, 3, 0) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0)$$

El objetivo es  $-\frac{17}{5}$ . Asimismo,  $(w_1, w_2, \alpha) = (-\frac{17}{10}, 0, 0)$ .

### Iteración 2

Puesto que  $w_1 < 0$ ,  $s_1$  no es elegible para entrar a la base en este momento.

SUBPROBLEMA

Resuelva el siguiente subproblema.

$$\text{Maximizar } (\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$$

$$\text{Sujeta a } \mathbf{x} \in X$$

$$\mathbf{wA} - \mathbf{c} = (-\frac{17}{10}, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2, -1, -1, 1) (\frac{3}{10}, 1, -\frac{7}{10}, -1)$$

Por consiguiente, el subproblema es

$$\text{Maximizar } \frac{3}{10}x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 - x_4 + 0$$

$$\text{Sujeta a } \mathbf{x} \in X$$

El problema se descompone en dos problemas que comprenden a  $(x_1, x_2)$  y  $(x_3, x_4)$ . Usando la figura 7.1, la solución óptima es  $x_3 = (0, \frac{5}{2}, 0, 0)$  con objetivo  $z_3 - \hat{c}_3 = \frac{5}{2}$ . Como  $z_3 - \hat{c}_3 > 0$ , se introduce  $\lambda_3$ .

La cota inferior es  $\hat{c}_B \bar{b} - (z_3 - \hat{c}_3) = -\frac{17}{5} - \frac{5}{2} = -5.9$ . (Recuerde que el mejor objetivo conocido hasta ahora es  $-3.4$ ).

PASO MAESTRO

$$z_3 - \hat{c}_3 = \frac{5}{2}$$

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$y_3 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se inserta la columna  $\begin{bmatrix} z_3 - \hat{c}_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$  en el arreglo anterior y se pivotea. Con lo anterior se llega a los tableaux siguientes (la columna  $\lambda_3$  se elimina después de pivotar).

	BASES INVERSAS			LD	$\lambda_3$
$z$	$-\frac{17}{10}$	0	0	$-\frac{17}{5}$	$\frac{5}{2}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	0
$s_2$	$-\frac{7}{10}$	1	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{2}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	①

	BASES INVERSAS			LD
$z$	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{49}{10}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
$s_2$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\lambda_3$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$

La mejor solución factible conocida del problema completo está dada por

$$x = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \frac{2}{5} (2, \frac{3}{2}, 3, 0) + \frac{3}{5} (0, \frac{5}{2}, 0, 0) = (\frac{4}{5}, \frac{21}{10}, \frac{6}{5}, 0)$$

El objetivo es  $-4.9$ . También,  $(w_1, w_2, \alpha) = (-\frac{6}{4}, 0, -\frac{5}{2})$ .

Iteración 3

Como  $w_1 < 0$ ,  $s_1$  no es elegible para entrar a la base en este momento.

SUBPROBLEMA

Resuelva el siguiente subproblema.

Maximizar  $(wA - c)x + \alpha$

Sujeta a  $x \in X$

$$wA - c = (-\frac{6}{5}, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2, -1, -1, 1) = (\frac{4}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -1)$$

Por consiguiente, el subproblema queda como sigue.

Maximizar  $\frac{4}{5}x_1 + x_2 - \frac{1}{5}x_3 - x_4 - \frac{5}{2}$

Sujeta a  $x \in X$

Usando la figura 7.1, la solución óptima es  $x_4 = (2, \frac{3}{2}, 0, 0)$  con objetivo  $z_4 - \hat{c}_4 = \frac{3}{5}$  y por tanto se introduce  $\lambda_4$ .

La cota inferior está dada por  $\hat{c}_B \bar{b} - (z_4 - \hat{c}_4) = -\frac{49}{10} - \frac{3}{5} = -5.5$ . Recuerde que el mejor objetivo conocido hasta el momento es  $-4.9$ . Si sólo se deseara una solución aproximada, entonces el procedimiento podría detenerse aquí con la solución factible  $x = (\frac{4}{5}, \frac{21}{10}, \frac{6}{5}, 0)$ , cuyo objetivo es  $-4.9$ .

PASO MAESTRO

$$z_4 - \hat{c}_4 = \frac{3}{5}$$

$$Ax_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

La columna actualizada  $y_4$  está dada por

$$y_4 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Se inserta la columna  $\begin{pmatrix} z_4 - \hat{c}_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$  en el arreglo anterior y se pivotea. Con lo anterior se llega a los dos tableaux siguientes (la columna  $\lambda_4$  se elimina después de pivotear).

	BASES INVERSAS			LD	$\lambda_4$
z	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{49}{10}$	$\frac{3}{5}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$s_2$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\lambda_3$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$

	BASES INVERSAS			LD
z	-1	-1	0	-5
$\lambda_2$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\lambda_4$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{25}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\lambda_3$	0	-1	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$

La mejor solución factible conocida del problema completo está dada por

$$\begin{aligned} x &= \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 \\ &= \frac{1}{3} (2, \frac{3}{2}, 3, 0) + \frac{1}{2} (0, \frac{5}{2}, 0, 0) + \frac{1}{6} (2, \frac{3}{2}, 0, 0) = (1, 2, 1, 0) \end{aligned}$$

El objetivo es -5. También,  $(w_1, w_2, \alpha) = (-1, -1, 0)$ .

Iteración 4

Como  $w_1 < 0$  y  $w_2 < 0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  no son elegibles para entrar a la base en este momento.

SUBPROBLEMA

Maximizar  $(wA - c)x + \alpha$

Sujeta a  $x \in X$

$$wA - c = (-1, -1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2, -1, -1, 1) = (0, 0, 0, -3)$$

Por consiguiente, el subproblema queda como sigue.

Maximizar  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 0$

Sujeta a  $x \in X$

Usando la figura 7.1, la solución óptima es  $x_5 = (0, 0, 0, 0)$  con objetivo  $z_5 - \hat{c}_5 = 0$ , que es el criterio de terminación. También observe que la cota inferior es  $\hat{c}_B b - (z_5 - \hat{c}_5) = -5 - 0 = -5$ , que es igual a la mejor solución (y por consiguiente óptima) conocida hasta el momento.

En resumen, ahora se cuenta con la solución óptima  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 0)$  con objetivo -5. En la figura 7.2 se muestra el avance de las cotas inferiores y los valores objetivos de las soluciones primales factibles generadas por el algoritmo de descomposición. La optimalidad se alcanza en la iteración 4. Si interesara una solución aproximada, entonces habría sido posible detenerse en la iteración 3, pues en tal caso se tenía una solución factible con valor objetivo igual a -4.9 y al mismo tiempo existía la seguridad (por la cota inferior) de que no existían soluciones factibles con objetivo menor que -5.5.

El objetivo óptimo  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 0)$  se muestra en la figura 7.3 en los dos conjuntos  $X_1$  y  $X_2$ . Observe que  $(1, 2)$  no es un punto extremo de  $X_1$  y que  $(1, 0)$  no es un punto extremo de  $X_2$ . Sin embargo, observe que es posible efectuar una transformación de las restricciones maestras

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 3 \end{aligned}$$

en el espacio  $(x_1, x_2)$  sustituyendo  $x_3 = 1$  y  $x_4 = 0$ . Con lo anterior se llega a las dos restricciones  $x_1 \leq 1$  y  $x_1 + x_2 \leq 3$ , que se muestran en la figura 7.3. Se observa

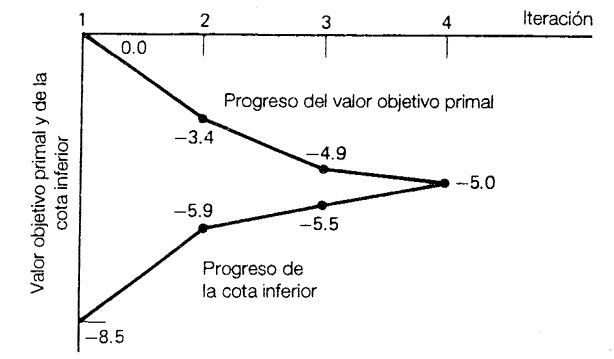


Figura 7.2 Avance del valor objetivo primal y de la cota inferior.

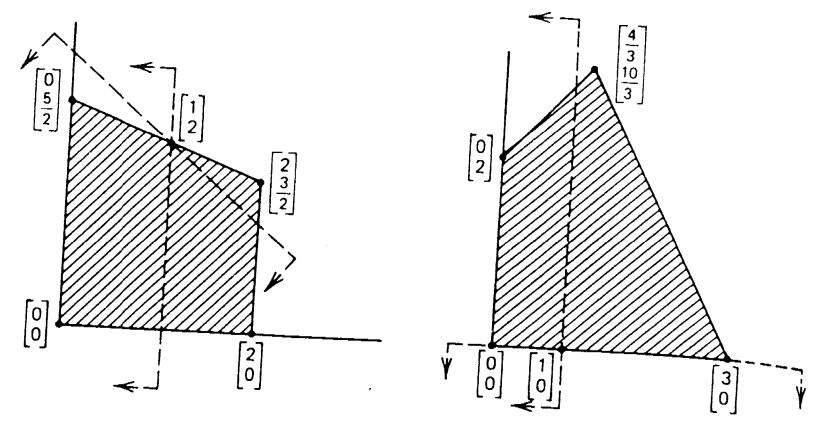


Figura 7.3. Ilustración del punto óptimo.

que (1, 2) es un punto extremo de la intersección de  $X_1$  con estas dos restricciones adicionales. De manera semejante, en el espacio  $(x_3, x_4)$ , al sustituir los valores  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$ , las restricciones maestras se reducen a  $x_3 \leq 1$  y  $2x_4 \leq 0$ . De nuevo, (1, 0) es un punto extremo de la intersección de  $X_2$  con estas dos restricciones adicionales. Es conveniente observar que, si existen óptimos alternativos, entonces es posible que el algoritmo de descomposición no proporcione un punto extremo óptimo del problema completo. El lector puede consultar el ejercicio 7.21.

**7.3 INICIACIÓN**

En esta sección se describirá un método para obtener una solución básica factible inicial del programa maestro, usando variables artificiales en caso de ser necesario. Estas variables artificiales se eliminan aplicando la fase I o el método de penalización. Si al terminar se tiene una variable artificial positiva, entonces el problema completo no tiene soluciones factibles.

**Restricciones en desigualdad**

Considere el siguiente problema.

Minimizar  $\sum_{j=1}^t (cx_j)\lambda_j$   
 Sujeta a  $\sum_{j=1}^t (Ax_j)\lambda_j \leq b$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$

Si existe un  $x_1 \in X$  conveniente con  $Ax_1 \leq b$ , entonces se cuenta con la base siguiente, en donde la identidad corresponde al vector de holgura  $s \geq 0$ .

$$B = \begin{bmatrix} I & Ax_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} I & -Ax_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El arreglo inicial está dado por el siguiente tableau.

	BASES INVERSAS		LD
z	0	$cx_1$	$cx_1$
s	I	$-Ax_1$	$b - Ax_1$
$\lambda_1$	0	1	1

Ahora suponga que no existe ningún  $x \in X$  que sea evidente que satisface  $Ax \leq b$ . En este caso, después de convertir el programa maestro a la forma de igualdades añadiendo las variables de holgura idóneas, las restricciones se manipulan de modo que los valores del LD sean no negativos. Después, conforme sea necesario, se añaden variables artificiales para obtener una matriz identidad. Esta matriz identidad constituye la base inicial. Para sacar de la base a las variables artificiales es posible aplicar el método de dos fases o el método de penalización.

**Restricciones en igualdad**

En este caso se pueden introducir  $m + 1$  variables artificiales a fin de obtener la base inicial. Las variables artificiales se eliminan con el método de dos fases o con el método de penalización.

**7.4 EL CASO DE UNA REGIÓN NO ACOTADA**

Para un conjunto no acotado  $X$ , el algoritmo de descomposición debe modificarse ligeramente. En este caso no es posible representar los puntos en  $X$  como una combinación convexa de los punto extremos, sino como una combinación convexa de los puntos extremos más una combinación no negativa de las direcciones extremas. En otras palabras,  $x \in X$  si y sólo si

$$x = \sum_{j=1}^t \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^t \mu_j d_j$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

en donde  $x_1, x_2, \dots, x_t$  son los puntos extremos de  $X$  y  $d_1, d_2, \dots, d_l$  son las direcciones extremas de  $X$ . El problema primal puede transformarse en un problema denominado problema maestro en las variables  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  y  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$  como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^t (\mathbf{c}x_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^l (\mathbf{c}d_j)\mu_j \\ &\text{Sujeta a} \quad \sum_{j=1}^t (\mathbf{A}x_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^l (\mathbf{A}d_j)\mu_j = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1 \tag{7.6}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

Puesto que usualmente  $t$  y  $l$  son muy grandes, se intentará resolver el problema anterior mediante el método simplex revisado. Suponga que se tiene una solución básica factible del problema anterior con base  $\mathbf{B}$ , y sean  $\mathbf{w}$  y  $\alpha$  las variables duales correspondientes a las restricciones (7.5) y (7.6). Suponga, además, que  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{w}, \alpha) = \hat{\mathbf{c}}_B \mathbf{B}^{-1}$  ( $\hat{\mathbf{c}}_B$  es el costo de las variables básicas), y  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$  se conocen y se pueden representar como sigue:

BASES INVERSAS	LD
$(\mathbf{w}, \alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Recuerde que la solución actual es óptima para el problema completo si  $z_j - \hat{c}_j \leq 0$  para cada variable. En particular, en condiciones de optimalidad se deben satisfacer las siguientes condiciones.

$$\lambda_j \text{ no básico} \Rightarrow 0 \geq z_j - \hat{c}_j = (\mathbf{w}, \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{A}x_j \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{c}x_j = \mathbf{w}\mathbf{A}x_j + \alpha - \mathbf{c}x_j \tag{7.7}$$

$$\mu_j \text{ no básico} \Rightarrow 0 \geq z_j - \hat{c}_j = (\mathbf{w}, \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{A}d_j \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{c}d_j = \mathbf{w}\mathbf{A}d_j - \mathbf{c}d_j \tag{7.8}$$

Como el número de variables no básicas es muy grande, comprobar las condiciones (7.7) y (7.8) generando los puntos y direcciones extremas correspondientes

no es factible computacionalmente. Sin embargo, resolviendo el siguiente subproblema es posible determinar si las condiciones se cumplen o no. Lo que es más importante, conforme se resuelve el subproblema, si las condiciones (7.7) ó (7.8) no se cumplen, se encuentra una variable no básica con valor positivo  $z_k - \hat{c}_k$  y por tanto, elegible para entrar a la base.

$$\text{Maximizar} \quad (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$$

$$\text{Sujeta a} \quad \mathbf{x} \in X$$

Primero, suponga que el valor de la solución óptima del subproblema es no acotado. Recuerde que lo anterior es posible sólo si existe una dirección extrema  $\mathbf{d}_k$  tal que  $(\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{d}_k > 0$ . Lo anterior significa que se viola la condición (7.8). Además,  $z_k - \hat{c}_k = (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{d}_k > 0$ , y  $\mu_k$  es elegible para entrar a la base. En este

caso,  $\begin{pmatrix} \mathbf{A}d_k \\ 0 \end{pmatrix}$  se actualiza premultiplicando por  $\mathbf{B}^{-1}$  y la columna resultante  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$  se introduce en el arreglo anterior y se continúa el método simplex

revisado. Ahora considere el caso en que el valor de la solución óptima es acotado. Una condición necesaria y suficiente para acotamiento es que  $(\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{d}_j \leq 0$  para todas las direcciones extremas, de modo que la ecuación (7.8) se cumple. Después se comprueba si (7.7) se cumple. Sea  $\mathbf{x}_k$  un punto extremo óptimo y considere el objetivo óptimo  $z_k - \hat{c}_k$ , para el subproblema. Si  $z_k - \hat{c}_k \leq 0$ , entonces por la optimalidad de  $\mathbf{x}_k$  se tiene que, para todo punto extremo  $\mathbf{x}_j$ ,

$$(\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}_j + \alpha \leq (\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}_k + \alpha = z_k - \hat{c}_k \leq 0$$

y en consecuencia la condición (7.7) se cumple y se da fin con una solución óptima del problema completo. Si, por otra parte,  $z_k - \hat{c}_k > 0$ , entonces se introduce  $\lambda_k$  en la base. Lo anterior se hace insertando la columna  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$  en el arreglo anterior y

pivoteando, en donde  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}x_k \\ 1 \end{pmatrix}$ . Observe que, como el caso acotado, si el problema maestro incluye variables de holgura u otras variables explícitamente presentes, entonces antes de deducir la optimalidad se deben verificar los valores  $z_j - \hat{c}_j$  para estas variables. También, los subproblemas acotados producen cotas inferiores como para el caso anterior.

En resumen, resolver el subproblema anterior conduce a terminar el algoritmo con una solución óptima o bien, a identificar una variable mejorante para entrar a la base. Ahora se cuenta con todos los ingredientes para un algoritmo de descomposición en el caso de un conjunto no acotado  $X$ . En el ejemplo 7.1 se ilustra tal

algoritmo. En el ejercicio 7.17 se pide al lector escribir un procedimiento paso a paso para este caso.

**Ejemplo 7.1**

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{Sujeta a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La primera restricción se maneja como  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$  y el resto de las restricciones son tratadas por  $X$ . Observe que  $X$  se descompone en los dos conjuntos de la figura 7.4. El problema se transforma en  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  y  $\mu_1, \dots, \mu_l$  como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^t (\mathbf{cx}_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^l (\mathbf{cd}_j)\mu_j \\ & \sum_{j=1}^t (\mathbf{Ax}_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^l (\mathbf{Ad}_j)\mu_j \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

Observe que  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$  pertenece a  $X$  y  $\mathbf{Ax}_1 = 0 + 0 + 0 \leq 12$ . Por consiguiente la base inicial consta de  $\lambda_1$  (correspondiente a  $\mathbf{x}_1$ ) más la variable de holgura  $s$ . Con lo anterior se llega al siguiente arreglo en el que  $w = \alpha = 0$ .

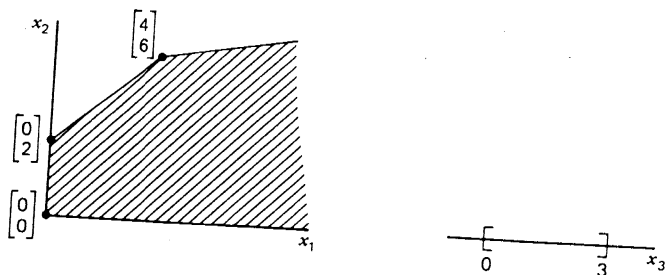


Figura 7.4. Ilustración de  $X$  no acotado.

BASES INVERSAS LD

$z$	0	0	0
$s$	1	0	12
$\lambda_1$	0	1	1

**Iteración 1**

SUBPROBLEMA

Maximizar  $(\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$

Sujeta a  $\mathbf{x} \in X$

Como  $w = \alpha = 0$  y  $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$ , este problema se reduce al siguiente.

Maximizar  $x_1 + 2x_2 + x_3 + 0$

Sujeta a 
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Observe que el problema se descompone en dos problemas en  $(x_1, x_2)$  y  $x_3$ . El valor óptimo de  $x_3$  es 3. La otra parte del problema puede resolverse geométricamente o aplicando el método simplex, en donde  $x_4$  y  $x_5$  son las variables de holgura.

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$	LD
$z$	1	-1	-2	0	0	0
$x_4$	0	-1	1	1	0	2
$x_5$	0	-1	2	0	1	8

Observando la columna  $x_1$  se ve que el óptimo es no acotado. Suponga que se continúa con la introducción de  $x_2$  como procedería normalmente el método simplex.

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$	LD
$z$	1	-3	0	2	0	4
$x_2$	0	-1	1	1	0	2
$x_5$	0	1	0	-2	1	4

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$	LD
$z$	1	0	0	-4	3	16
$x_2$	0	0	1	-1	1	6
$x_1$	0	1	0	-2	1	4

Ahora, cuando  $x_4$  se incrementa en una unidad,  $z$  se incrementa en cuatro unidades,  $x_1$  se incrementa en dos unidades y  $x_2$  se incrementa en una unidad; es decir, en el espacio  $(x_1, x_2)$  se ha encontrado una dirección  $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  que lleva a un valor objetivo no acotado. En el espacio  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{d}_1$  está dada por  $(2, 1, 0)^t$  (¿por qué?). También,  $(\mathbf{wA} - \mathbf{c}) \mathbf{d}_1 = 4$  (el negativo de  $-4$  en el renglón 0 bajo  $x_4$ ), y así  $\mu_1$  se introduce en la base.

PASO MAESTRO

$$z_1 - \hat{c}_1 = 4$$

$$\mathbf{Ad}_1 = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Ad}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en donde  $\mathbf{B}^{-1}$  se obtiene del arreglo inicial del problema maestro. En particular,

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se introduce la columna  $\begin{pmatrix} z_1 - \hat{c}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix}$  en el arreglo maestro y se pivotea. La columna  $\mu_1$  se elimina después del pivoteo.

	BASES INVERSAS		LD
$z$	0	0	0
$s$	1	0	12
$\lambda_1$	0	1	1

$\mu_1$
4
③
0

	BASES INVERSAS		LD
$z$	$-\frac{4}{3}$	0	-16
$\mu_1$	$\frac{1}{3}$	0	4
$\lambda_1$	0	1	1

Iteración 2

$$w = -\frac{4}{3} \text{ y } \alpha = 0.$$

Como  $w < 0$ ,  $s$  no es un candidato para entrar a la base.

SUBPROBLEMA

Maximizar  $(\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$

Sujeta a  $\mathbf{x} \in X$

Este subproblema se reduce a lo siguiente.

Maximizar  $-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 0$       Maximizar  $-\frac{1}{3}x_3$

Sujeta a  $-x_1 + x_2 \leq 2$       Sujeta a  $0 \leq x_3 \leq 3$   
 $-x_1 + 2x_2 \leq 8$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

Aquí, el valor de  $\alpha = 0$  se añade a sólo uno de los subproblemas. Es evidente que  $x_3 = 0$ . El nuevo problema en  $(x_1, x_2)$  se resuelve utilizando el tableau correspondiente a la última iteración, eliminando el renglón 0 e introduciendo los nuevos costos.

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$	LD
$z$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
$x_2$	0	0	1	-1	1	6
$x_1$	0	1	0	-2	1	4

El renglón 1 se multiplica por  $\frac{2}{3}$  y el renglón 2 se multiplica por  $-\frac{1}{3}$  y se suma al renglón 0.

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$	LD
$z$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$x_2$	0	0	1	-1	1	6
$x_1$	0	1	0	-2	1	4

El tableau anterior es óptimo (no único). El objetivo óptimo del subproblema es  $z_2 - \hat{c}_2 = \frac{8}{3} > 0$ , de modo que a la base entra  $\lambda_2$ , correspondiente a  $x_2 = (x_1, x_2, x_3) = (4, 6, 0)$ . Ahora ya se cuenta con una cota inferior del problema, como  $\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}} - (z_2 - \hat{c}_2) = -16 - \frac{8}{3} = -\frac{56}{3}$ .

$$z_2 - \hat{c}_2 = \frac{8}{3}$$

$$Ax_2 = 10$$

$$y_2 = B^{-1} \begin{pmatrix} Ax_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el arreglo maestro se introduce  $\begin{pmatrix} z_2 - \hat{c}_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$  y se pivotea. La columna  $\lambda_2$  se elimina después de pivotear.

	BASES INVERSAS		LD				
z	$-\frac{4}{3}$	0	-16	$\lambda_2$ <table border="1"> <tr><td><math>\frac{8}{3}</math></td></tr> <tr><td><math>\frac{10}{3}</math></td></tr> <tr><td>1</td></tr> </table>	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	1
$\frac{8}{3}$							
$\frac{10}{3}$							
1							
$\mu_1$	$\frac{1}{3}$	0	4				
$\lambda_1$	0	1	1				

	BASES INVERSAS		LD
z	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{56}{3}$
$\mu_1$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\lambda_2$	0	1	1

Observe que la cota inferior conocida de  $-\frac{56}{3}$  se compensa con la cota superior, por lo que ya se tiene a la mano el óptimo. Sin embargo, a continuación se verificará este hecho.

### Iteración 3

Observe que  $w = -\frac{4}{3}$  no se alteró de la última iteración. En consecuencia,  $s$  sigue sin ser un candidato para entrar a la base. También la solución óptima del último subproblema permanece igual (vea la iteración 2). El valor objetivo de  $\frac{8}{3}$  fue para la solución dual previa con  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha = -\frac{8}{3}$ , se tiene  $z_3 - \hat{c}_3 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$ , que es el criterio de terminación y por tanto se tiene a la mano la solución óptima.

Más específicamente, el óptimo  $x^*$  está dado por

$$x^* = \lambda_2 x_2 + \mu_1 d_1$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El objetivo es  $-\frac{56}{3}$ .

### 7.5 ESTRUCTURA DIAGONAL O ANGULAR EN BLOQUE

En esta sección se analizará el importante caso especial en que  $X$  tiene una estructura diagonal en bloque. En este caso,  $X$  mismo puede descomponerse en varios conjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_T$ , cada uno de los cuales implica un subconjunto de variables que no aparecen en ningún otro conjunto. Si, de manera correspondiente, el vector  $x$  se descompone en los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_T$ , el vector  $c$  se descompone en  $c_1, c_2, \dots, c_T$  y la matriz  $A$  de las restricciones maestras  $Ax = b$  se descompone en las matrices  $A_1, A_2, \dots, A_T$ , entonces se obtiene el siguiente subproblema.

$$\text{Minimizar } c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_T x_T$$

$$\text{Sujeta a } \begin{matrix} A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_T x_T = b \\ B_1 x_1 \leq b_1 \\ B_2 x_2 \leq b_2 \\ \vdots \\ B_T x_T \leq b_T \\ x_1, x_2, \dots, x_T \geq 0 \end{matrix}$$

en donde  $X_i = \{x_i: B_i x_i \leq b_i, x_i \geq 0\}$  para  $i = 1, 2, \dots, T$ .

Problemas con la estructura anterior surgen con frecuencia en flujo en redes con varios bienes y en la asignación de recursos escasos entre actividades que compiten entre sí. Problemas con esta estructura se pueden resolver mediante el algoritmo de descomposición presentado en este capítulo (vea la sección 7.2 y el ejemplo 7.1). Sin embargo, tal estructura diagonal o angular en bloque de  $X$  se puede aprovechar aun más, como se analizará en esta sección.

Para el subproblema  $i$ ,  $x_i \in X_i$  si y sólo si

$$x_i = \sum_{j=1}^{t_i} \lambda_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{l_i} \mu_{ij} d_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{t_i} \lambda_{ij} = 1$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t_i$$

$$\mu_{ij} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l_i$$

en donde las  $x_{ij}$  y las  $d_{ij}$  son los puntos extremos y las direcciones extremas (en caso de existir alguna) de  $X_i$ . Sustituyendo cada  $x_i$  por la representación anterior, el problema original se puede volver a plantear como el siguiente problema maestro.



$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{t_i} (\mathbf{c}_i \mathbf{x}_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{l_i} (\mathbf{c}_i \mathbf{d}_{ij}) \mu_{ij} \\ \text{Sujeta a} \quad & \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{t_i} (\mathbf{A}_i \mathbf{x}_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{l_i} (\mathbf{A}_i \mathbf{d}_{ij}) \mu_{ij} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\sum_{j=1}^{t_i} \lambda_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, T \tag{7.10}$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t_i \quad i = 1, 2, \dots, T$$

$$\mu_{ij} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l_i \quad i = 1, 2, \dots, T$$

Observe la diferencia entre este planteamiento y el de la sección 7.2. Aquí se permiten diferentes combinaciones convexas y combinaciones lineales para cada subproblema  $i$ , ya que se tienen  $T$  restricciones de convexidad [las restricciones de la ecuación (7.10)]. Este hecho permite más flexibilidad, pero al mismo tiempo incrementa el número de restricciones de  $m+1$  a  $m+T$ .

Suponga que se tiene una solución básica factible del sistema anterior con una base  $\mathbf{B}$  de orden  $(m+T) \times (m+T)$ . Observe que cada base debe contener por lo menos una variable  $\lambda_{ij}$  de cada bloque (vea el ejercicio 7.19). Además, suponga

que se conocen  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ,  $(\mathbf{w}, \alpha) = (w_1, \dots, w_m, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = \hat{\mathbf{c}}_B \mathbf{B}^{-1}$ , en donde  $\hat{\mathbf{c}}_B$  es el costo de las variables básicas ( $\hat{c}_{ij} = \mathbf{c}_i \mathbf{x}_{ij}$  para  $\lambda_{ij}$  y  $\hat{c}_{ij} = \mathbf{c}_i \mathbf{d}_{ij}$  para  $\mu_{ij}$ ). Esto se puede mostrar como sigue.

BASES INVERSAS	LD
$(\mathbf{w}, \alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Esta solución es óptima si  $z_{ij} - \hat{c}_{ij} \leq 0$  para cada variable (naturalmente,  $z_{ij} - z_{ij} - \hat{c}_{ij} = 0$  para cada variable básica). En particular, en condiciones de optimalidad se deben cumplir los siguientes requisitos

$$\lambda_{ij} \text{ no básico} \Rightarrow 0 \geq z_{ij} - \hat{c}_{ij} = \mathbf{w} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{ij} + \alpha_i - \mathbf{c}_i \mathbf{x}_{ij} \tag{7.11}$$

$$\mu_{ij} \text{ no básico} \Rightarrow 0 \geq z_{ij} - \hat{c}_{ij} = \mathbf{w} \mathbf{A}_i \mathbf{d}_{ij} - \mathbf{c}_i \mathbf{d}_{ij} \tag{7.12}$$

El hecho de que las condiciones (7.11) y (7.12) se cumplan o no se puede comprobar fácilmente resolviendo los siguientes subproblemas.

$$\text{Maximizar } (\mathbf{w} \mathbf{A}_i - \mathbf{c}_i) \mathbf{x}_i + \alpha_i$$

$$\text{Sujeta a } \mathbf{x}_i \in X_i$$

Si el valor de la solución óptima es no acotado, entonces se encuentra una dirección extrema  $\mathbf{d}_{ik}$  tal que  $(\mathbf{w} \mathbf{A}_i - \mathbf{c}_i) \mathbf{d}_{ik} > 0$ ; es decir, se viola la condición (7.12) y la introducción de  $\mu_{ik}$  mejorará la función objetivo, pues  $z_{ik} - \hat{c}_{ik} = (\mathbf{w} \mathbf{A}_i - \mathbf{c}_i) \mathbf{d}_{ik} > 0$ . Si el óptimo es acotado, entonces la condición (7.12) se cumple automáticamente para el subproblema  $i$ . Sea  $\mathbf{x}_{ik}$  un punto extremo óptimo. Si el valor objetivo óptimo  $z_{ik} - \hat{c}_{ik} = \mathbf{w} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{ik} + \alpha_i - \mathbf{c}_i \mathbf{x}_{ik} \leq 0$ , entonces la condición (7.11) se cumple para el subproblema  $i$ . De lo contrario,  $\lambda_{ik}$  se puede introducir en la base. Cuando todos los subproblemas tienen  $z_{ik} - \hat{c}_{ik} \leq 0$ , entonces se ha obtenido la solución óptima del problema original. Si el problema maestro contiene otras variables explícitas incluyendo las variables de holgura, entonces antes de terminar también es necesario comprobar los valores  $z_j - \hat{c}_j$  para estas variables (como se hizo en la sección 7.1).

En resumen, se resuelve cada subproblema  $i$  a la vez. Si el subproblema  $i$  proporciona una solución no acotada, entonces se encuentra una dirección extrema  $\mathbf{d}_{ik}$  que es un candidato para entrar a la base maestra. Si el subproblema  $i$  proporciona un punto óptimo acotado y  $\mathbf{w} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{ik} + \alpha_i - \mathbf{c}_i \mathbf{x}_{ik} > 0$ , entonces el punto extremo es un candidato para entrar a la base maestra. Si no ocurre ninguna de estas condiciones, entonces actualmente no hay ninguna columna que sea candidato para entrar a la base maestra del subproblema  $i$ . Si ningún subproblema proporciona ningún candidato para entrar a la base maestra, entonces se tiene la solución óptima. En caso contrario, de los varios candidatos es necesario elegir uno para entrar a la base maestra. Se puede aplicar la regla del valor  $z_{ik} - \hat{c}_{ik}$  más positivo, del primer  $z_{ik} - \hat{c}_{ik}$  positivo, etc. Si se aplica la regla del primer  $z_{ik} - \hat{c}_{ik}$  positivo, entonces es posible detener el proceso resolviendo los subproblemas una vez que se cuenta con el primer candidato. Al elegir el candidato se actualiza la columna de entrada, se pivotea sobre el arreglo maestro y se repite el proceso.

### Cálculo de cotas inferiores para el caso de subproblemas acotados

Sea  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T$  una solución factible del problema completo, de modo que  $\mathbf{x}_i \in X_i$  para todo  $i$  y  $\sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}$ . Por definición de  $z_{ik} - \hat{c}_{ik}$ , se tiene que

$$(\mathbf{w} \mathbf{A}_i - \mathbf{c}_i) \mathbf{x}_i + \alpha_i \leq (z_{ik} - \hat{c}_{ik})$$

o

$$\mathbf{c}_i \mathbf{x}_i \geq \mathbf{w} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \alpha_i - (z_{ik} - \hat{c}_{ik}).$$

Sumando sobre  $i$  se obtiene

$$\sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i \geq \mathbf{w} \sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \sum_i \alpha_i - \sum_i (z_{ik} - \hat{c}_{ik}).$$

Pero  $\sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{c} \mathbf{x}$  y  $\sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}$ . Por tanto, se obtiene

$$\mathbf{c} \mathbf{x} \geq \mathbf{w} \mathbf{b} + \alpha \mathbf{1} - \sum_i (z_{ik} - \hat{c}_{ik})$$

o

$$\mathbf{c} \mathbf{x} \geq \hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}} - \sum_i (z_{ik} - \hat{c}_{ik}).$$

El lado derecho de esta desigualdad proporciona una cota inferior del problema. Esta es una extensión natural del caso que se presentó para un subproblema acotado.

**Ejemplo 7.2**

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 \\ &\text{Sujeta a} && x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ & && x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & && x_1 + x_2 \leq 6 \\ & && x_2 \leq 2 \\ & && -x_3 + x_4 \leq 3 \\ & && x_3 + x_4 \leq 5 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Las dos primeras restricciones se manejan por medio de  $Ax \leq b$ , y el resto de las restricciones son tratadas por  $X$ . Observe que  $X$  se descompone en dos conjuntos, como se muestra en la figura 7.5. El problema se transforma en el siguiente.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{j=1}^{t_1} (c_1 x_{1j}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2 x_{2j}) \lambda_{2j} \\ &\text{Sujeta a} && \sum_{j=1}^{t_1} (A_1 x_{1j}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2 x_{2j}) \lambda_{2j} \leq b \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1$$

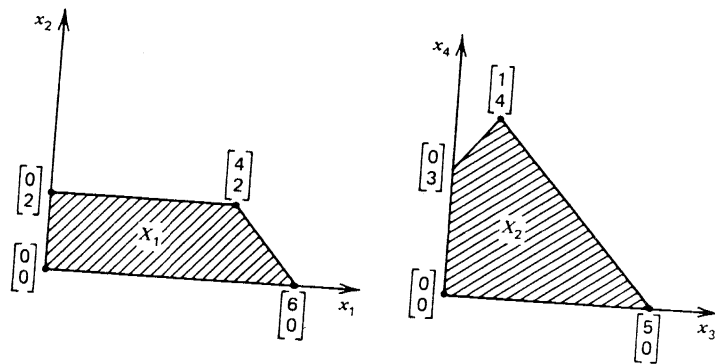


Figura 7.5. La región  $X$ .

$$\lambda_{1j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_1$$

$$\lambda_{2j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_2$$

en donde  $c_1 = (-2, -1)$ ,  $c_2 = (-3, -1)$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Observe que  $x_{11} = (x_1, x_2) = (0, 0)$  y  $x_{21} = (x_3, x_4) = (0, 0)$  pertenecen a  $X_1$  y  $X_2$  y satisfacen las restricciones maestras. Por tanto, se tiene una solución básica factible del sistema completo, en donde la base consta de  $s_1, s_2, \lambda_{11}$ , y  $\lambda_{21}$  ( $s_1$  y  $s_2$  son las holguras). Esto lleva al siguiente arreglo maestro.

	BASES INVERSAS				LD
$z$	0	0	0	0	0
$s_1$	1	0	0	0	6
$s_2$	0	1	0	0	4
$\lambda_{11}$	0	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	0	0	0	1	1

Los cuatro primeros elementos del renglón 0 proporcionan  $w_1, w_2, \alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente.  $B^{-1}$  se almacena bajo estos elementos.

Iteración 1

Resuelva los dos subproblemas siguientes.

SUPROBLEMA 1

SUBPROBLEMA 2

Maximizar  $(wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1$

Maximizar  $(wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2$

Sujeta a  $x_1 \in X_1$

Sujeta a  $x_2 \in X_2$

Como  $w = (0, 0)$  y  $\alpha = (0, 0)$ , estos subproblemas se reducen a maximizar  $2x_1 + x_2 + 0$  y maximizar  $3x_3 + x_4 + 0$  sobre las dos regiones de la figura 7.5. Las soluciones óptimas son, respectivamente,  $x_{12} = (x_1, x_2) = (6, 0)$  con objetivo 12 y  $x_{22} = (x_3, x_4) = (5, 0)$  con objetivo 15. Entonces,  $(wA_1 - c_1)x_{12} + \alpha_1 = 12$  y  $(wA_2 - c_2)x_{22} + \alpha_2 = 15$ . Por tanto,  $\lambda_{12}$  y  $\lambda_{22}$  son ambos candidatos para entrar a la base. Se elige  $\lambda_{22}$ , ya que  $z_{22} - \hat{c}_{22} = 15$  es el más positivo. Observe que una cota inferior del problema es  $0 - 12 - 15 = -27$ .

PROBLEMA MAESTRO

$$z_{22} - \hat{c}_{22} = 15$$

Se forma la columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observe que:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta columna se actualiza premultiplicándola por  $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ . Esta columna se inserta junto con  $z_{22} - \hat{c}_{22}$  en el arreglo maestro. La solución básica factible actual se actualiza al pivotear. Una vez que se ha terminado, se elimina la columna  $\lambda_{22}$ .

	BASES INVERSAS				LD	
$z$	0	0	0	0	0	
$s_1$	1	0	0	0	6	
$s_2$	0	1	0	0	4	
$\lambda_{11}$	0	0	1	0	1	
$\lambda_{21}$	0	0	0	1	1	

$\lambda_{22}$
15
5
10
0
1

	BASES INVERSAS				LD
$z$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-6
$s_1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
$\lambda_{22}$	0	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{2}{5}$
$\lambda_{11}$	0	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	1	$\frac{3}{5}$

Observe que  $w_1 = 0, w_2 = -\frac{3}{2}, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

**Iteración 2**

Puesto que  $s_2$  acaba de salir de la base, no será un candidato para volver a entrar de inmediato. Resuelva los dos subproblemas siguientes:

**SUBPROBLEMA 1**

Maximizar  $(\mathbf{w}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}_1)\mathbf{x}_1 + \alpha_1$

Sujeta a  $\mathbf{x}_1 \in X_1$

**SUBPROBLEMA 2**

Maximizar  $(\mathbf{w}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2)\mathbf{x}_2 + \alpha_2$

Sujeta a  $\mathbf{x}_2 \in X_2$

Estos subproblemas se reducen a lo siguiente.

Maximizar  $2x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 0$

Sujeta a  $(x_1, x_2) \in X_1$

Maximizar  $0x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 0$

Sujeta a  $(x_3, x_4) \in X_2$

Las soluciones óptimas son, respectivamente,  $\mathbf{x}_{13} = (x_1, x_2) = (6, 0)$  con objetivo  $z_{13} - \hat{c}_{13} = (\mathbf{w}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}_1)\mathbf{x}_{13} + \alpha_1 = 12$  y  $\mathbf{x}_{23} = (x_3, x_4) = (5, 0)$  con objetivo  $z_{23} - \hat{c}_{23} = (\mathbf{w}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2)\mathbf{x}_{23} + \alpha_2 = 0$ . Por tanto, en este momento no hay candidato del subproblema 2, y  $\lambda_{13}$  es un candidato para entrar a la base maestra. La cota inferior disponible en esta etapa es  $-6 - 12 - 0 = -18$ .

**PROBLEMA MAESTRO**

$$z_{13} - \hat{c}_{13} = 12$$

Se forma la columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Actualizando esta columna se obtiene

$$\mathbf{y}_{13} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta columna se inserta junto con  $z_{13} - \hat{c}_{13} = 12$  en el arreglo maestro. La solución básica factible actual se actualiza pivotando y luego se elimina la columna  $\lambda_{13}$ .

	BASES INVERSAS				LD	$\lambda_{13}$
$z$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-6	12
$s_1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4	6
$\lambda_{22}$	0	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{2}{5}$	0
$\lambda_{11}$	0	0	1	0	1	1
$\lambda_{21}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	1	$\frac{3}{5}$	0

	BASES INVERSAS				LD
$z$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	-14
$\lambda_{13}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{2}{3}$
$\lambda_{22}$	0	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{2}{5}$
$\lambda_{11}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	1	0	$\frac{1}{3}$
$\lambda_{21}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	1	$\frac{3}{5}$

Observe que  $w_1 = -2$ ,  $w_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

**Iteración 3**

Como  $w_1 < 0$  y  $w_2 < 0$ , entonces ni  $s_1$  ni  $s_2$  son candidatos para entrar a la base. Resuelva los dos subproblemas siguientes.

SUPROBLEMA 1

Maximizar  $(wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1$

Sujeta a  $x_1 \in X_1$

SUPROBLEMA 2

Maximizar  $(wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2$

Sujeta a  $x_2 \in X_2$

Estos subproblemas se reducen a lo siguiente.

Maximizar  $0x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 0$

Sujeta a  $(x_1, x_2) \in X_1$

Maximizar  $0x_3 - \frac{3}{2}x_4 + 0$

Sujeta a  $(x_3, x_4) \in X_2$

Con base en la figura 7.5,  $x_{14} = (x_1, x_2) = (0, 0)$  con objetivo 0 y  $x_{24} = (x_3, x_4) = (0, 0)$  con objetivo 0 son soluciones óptimas. Entonces,  $(wA_1 - c_1)x_{14} + \alpha_1 = (wA_2 - c_2)x_{24} + \alpha_2 = 0$  y se obtiene la solución óptima. Ahora, la cota inferior y la cota superior son iguales. Con base en el problema maestro, el punto óptimo  $x^*$  está dado por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_{11}x_{11} + \lambda_{13}x_{13} \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_{21}x_{21} + \lambda_{22}x_{22} \\ = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 2, 0)$  con objetivo -14.

**Interpretación económica**

El algoritmo de descomposición tiene una interpretación económica interesante. Considere el caso de un gran sistema que se compone de los subsistemas más pequeños 1, 2, ..., T. Cada subsistema  $i$  tiene su propio objetivo, y la función objetivo del sistema completo es la suma de las funciones objetivo de los subsistemas. Cada subsistema tiene sus restricciones designadas por el conjunto  $X_i$ , el cual se supone acotado para simplificar la situación. Además, todos los subsistemas comparten algunos recursos comunes y, por tanto, el consumo de estos recursos por todos los subsistemas no puede exceder la disponibilidad dada por el vector  $b$ .

Recuerde la siguiente interpretación económica de las variables duales (multiplicadores de Lagrange). Aquí,  $w_i$  es la razón de cambio del objetivo como función de  $b_i$ , es decir, si  $b_i$  se reemplaza por  $b_i + \Delta$ , manteniendo iguales a cero las variables no básicas actuales del problema maestro, entonces el objetivo se modifica sumando  $w_i\Delta$ . Por tanto,  $-w_i$  se puede considerar como el precio del consumo de una unidad del  $i$ -ésimo recurso común. De manera semejante,  $-\alpha_i$  se puede considerar como el precio del consumo de una parte de la  $i$ -ésima restricción de convexidad.

Tomando en cuenta todo lo anterior, el algoritmo de descomposición se puede interpretar como sigue. Con las propuestas actuales de los subsistemas, la superordenada (el sistema total) obtiene las ponderaciones óptimas de estas propuestas y anuncia un conjunto de precios para el uso de los recursos comunes. Tales precios se pasan a los subsistemas, los cuales modifican sus propuestas según los nuevos precios. Un subsistema típico  $i$  resuelve el siguiente subproblema.

Maximizar  $(wA_i - c_i)x_i + \alpha_i$

Sujeta a  $x_i \in X_i$

o, de manera equivalente,

Minimizar  $(c_i - wA_i)x_i + \alpha_i$

Sujeta a  $x_i \in X_i$

El objetivo original del subsistema  $i$  es  $c_i x_i$ . El término  $-wA_i x_i$  refleja el precio indirecto de usar los recursos comunes. Observe que  $A_i x_i$  es la cantidad de recursos comunes consumidos por la propuesta  $x_i$ . Puesto que el precio de usar estos recursos es  $-w$ , entonces el costo indirecto de usarlos es  $-wA_i x_i$ , y el costo total es  $(c_i - wA_i)x_i$ . Observe que el término  $-wA_i x_i$  hace que las propuestas que usan mucho de los recursos comunes no sean atractivas desde el punto de vista de costos. El subsistema  $i$  anuncia una propuesta óptima  $x_{ik}$ . Si esta propuesta ha de considerarse, entonces la ponderación de las propuestas previas  $x_{ij}$  debe decrecer para "dejar lugar" a la nueva propuesta; es decir,  $\sum_j \lambda_{ij}$  debe decrecer desde su

nivel actual de 1. El ahorro que resulta es precisamente  $\alpha_i$ . Si el costo de introducir la propuesta  $x_{ik}$  es menor que el ahorro realizado; es decir, si  $(c_i - wA_i)x_{ik} - \alpha_i < 0$ , o si  $(wA_i - c_i)x_{ik} + \alpha_i > 0$ , entonces la superordenada considerará esta nueva propuesta. Después que todos los subsistemas han introducido sus nuevas propuestas, la superordenada calcula la combinación óptima de estas propuestas y pasa los nuevos precios. El proceso se repite hasta que ninguno de los subsistemas tiene una nueva propuesta atractiva; es decir, cuando  $(c_i - wA_i)x_{ik} - \alpha_i \geq 0$  para todo  $i$ .

### 7.6 DUALIDAD Y RELACIONES CON OTROS PROCEDIMIENTOS DE DESCOMPOSICIÓN

El procedimiento de descomposición de Dantzig-Wolfe analizado en este capítulo es equivalente, para problemas de programación lineal, a otras dos técnicas bastante conocidas de partición/descomposición/relajación; a saber, el método de descomposición de Benders y el método de relajación Lagrangiano. A fin de presentar esta relación, considere un problema de programación lineal P de la forma siguiente. (La elección de las igualdades y de las desigualdades se efectuó sólo para efectos ilustrativos; también es posible manejar fácilmente otras formas.)

$$\begin{aligned} P: & \text{ Minimizar} && cx \\ & \text{ Sujeta a} && Ax = b \\ & && x \in X = \{x : Dx \geq d, x \geq 0\} \end{aligned}$$

Por conveniencia, se supondrá que  $X$  es no vacío y acotado. (En el ejercicio 7.33 se pide al lector analizar las siguientes relaciones para el caso de  $X$  no acotado.)

A continuación se escribirá el dual D del problema P. Las variables asociadas con las restricciones  $Ax = b$  y  $Dx \geq d$  se denotarán por  $w$  y  $v$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} D: & \text{ Maximizar} && wb + vd \\ & \text{ Sujeta a} && wA + vD \leq c \\ & && w \text{ no restringida, } v \geq 0 \end{aligned}$$

Observe que cuando  $w$  está fijo en algún valor arbitrario se obtiene un problema de programación lineal en las variables  $v$ . En particular, este programa lineal puede presentar una estructura especial o puede ser fácil de resolver. Suponiendo que este hecho constituye la motivación para abordar el problema, se procederá a *dividir* (particionar) el problema D, a la vez que las variables  $w$  se tratan como variables *complicantes* como se muestra a continuación:

$$D: \begin{cases} \text{ Maximizar} \\ w \text{ no restringida} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} wb + \text{Máximo } vd \\ \text{ Sujeta a } vD \leq c - wA \\ v \geq 0 \end{array} \right.$$

$$= \begin{cases} \text{Máximo} \\ w \text{ no restringida} \end{cases} \left\{ wb + \text{Mínimo}_{x \in X} (c - wA)x \right\} \quad (7.13)$$

Aquí, en el último paso se ha escrito el dual del *problema de optimización interior*, observando la definición de  $X$ . Como se supone que  $X$  es no vacío y acotado, entonces el problema de minimización interior en la ecuación (7.13) alcanza una solución óptima en un punto extremo. Si  $x_1, \dots, x_t$  denotan a los vértices de  $X$  como antes, se tiene que D es equivalente al problema de maximizar  $\{wb + \text{Mínimo}_{j=1, \dots, t} (c - wA)x_j\}$  sobre valores no restringidos de  $w$ . Denotando por  $z$  a la función objetivo en  $\{\cdot\}$ , lo anterior puede volver a escribirse como el siguiente *Problema Maestro PM*:

$$\begin{aligned} MP: & \text{ Maximizar } z \\ & \text{ Sujeta a } z \leq wb + (c - wA)x_j \quad \text{para } j = 1, \dots, t \\ & z, w \text{ no restringida} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Observe que es inconveniente resolver PM directamente, ya que casi siempre contiene demasiadas restricciones. Por tanto, es posible adoptar una *estrategia de relajación*, en la cual sólo se mantengan explícitamente unas cuantas de las restricciones en la ecuación (7.14). Suponga que para tal *programa maestro relajado* se obtiene una solución óptima  $(\bar{z}, \bar{w})$ . Entonces  $\bar{z}$  es una cota superior del valor óptimo del problema original (¿por qué?). Además,  $(\bar{z}, \bar{w})$  es óptimo para PM si y sólo si  $(\bar{z}, \bar{w})$  es factible para todas las restricciones en la ecuación (7.14) (¿por qué?). Entonces, para comprobar si se viola cualquier restricción en la ecuación (7.14), se desea verificar si  $\bar{z} \leq \bar{w}b + (c - \bar{w}A)x_j$  para todo  $j = 1, \dots, t$ ; es decir, si  $\bar{z} \leq \bar{w}b + \text{Mínimo}_{j=1, \dots, t} \{(c - \bar{w}A)x_j\}$ . Sin embargo, el último problema es equivalente al *subproblema* de programación lineal

$$\bar{w}b + \text{Mínimo}_{x \in X} \{(c - \bar{w}A)x\} \quad (7.15)$$

Si  $\bar{z}$  es menor o igual que el valor objetivo óptimo en la ecuación (7.15), entonces ya se ha terminado. (De hecho, en este caso,  $\bar{z}$  es igual al valor óptimo en la ecuación (7.15), ya que  $\bar{z}$  es igual a  $\bar{w}b + (c - \bar{w}A)x_j$  para algún  $j \in \{1, \dots, t\}$  en la ecuación (7.14).) En caso contrario, si  $x_k$  resuelve el problema (7.15), entonces se tiene  $\bar{z} > \bar{w}b + (c - \bar{w}A)x_k$  y es posible generar la restricción  $z \leq \bar{w}b + (c - \bar{w}A)x_k$  y sumarla al programa maestro (relajado) actual y volver a optimizar. Este proceso puede repetirse hasta que con la solución  $(\bar{z}, \bar{w})$  de algún problema maestro relajado se obtenga  $\bar{z}$  igual al valor óptimo en la ecuación (7.15). Lo anterior debe ocurrir en un número finito de pasos, ya que  $X$  tiene sólo un número finito de vértices.

El procedimiento anterior se denomina *técnica de particiones o descomposición de Benders*. (Su generalización a estructuras de problemas no lineales o dis-

cretos se aborda en el ejercicio 7.34 y en la sección de notas y bibliografía.) El problema (7.14) (o su relajación) se denomina *problema maestro (relajado)* de Benders, y el problema (7.15) se denomina *subproblema de Benders*. Sin embargo, observe que el problema (7.15) es también el subproblema resuelto por el método de descomposición de Dantzig-Wolfe, y que el programa maestro de Benders (7.14) es simplemente el dual del problema maestro de Dantzig-Wolfe con las restricciones (7.1) a (7.3). (Aquí, los multiplicadores duales no negativos asociados con las restricciones (7.14) son  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, t$ ; la suma de estas variables es la unidad debido a la columna de la variable  $z$  en la ecuación (7.14).) Por consiguiente, el algoritmo de Benders se denomina *técnica de generación de renglones*, en contraste con el procedimiento de *generación de columnas* de Dantzig-Wolfe. Se concluye que si al final de cada solución del programa maestro relajado se mantienen sólo los renglones generados en la ecuación (7.14) que tienen actualmente variables de holgura no básicas, y así aquéllos cuyas variables duales complementarias  $\lambda_j$  son básicas, entonces el algoritmo resultante es precisamente el mismo que el algoritmo de descomposición de la sección 7.1. En particular, la técnica de solución inicial de la sección 7.3 proporciona un programa maestro de Benders acotado inicial. También, cuando termina el algoritmo de Benders, la solución primal óptima disponible puede calcularse como la suma de los productos de  $x_j$  y la variable dual correspondiente  $\lambda_j$ , que están asociados con las restricciones explícitamente presentes (7.14) en el problema maestro relajado de Benders final. (Observe que esta suma es una combinación convexa.) Además, observe que si no se hubiera eliminado ninguna de las restricciones generadas por el algoritmo de Benders y se hubiera resuelto a optimalidad cada programa maestro relajado de Benders, entonces la implementación equivalente del método de Dantzig-Wolfe hubiera sido optimizar cada programa maestro sobre todas las columnas de las variables  $\lambda_j$  generadas hasta el momento.

Observe que el análisis anterior también indica cómo recuperar un conjunto óptimo de multiplicadores duales ( $\mathbf{w}^*$ ,  $\mathbf{v}^*$ ) para el problema P después de resolverlo usando el algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe. El vector  $\mathbf{w}^*$  está disponible directamente como el conjunto óptimo de multiplicadores asociados con las restricciones (7.1). La solución correspondiente  $\mathbf{v}^*$  es obtenible a partir del primer problema en la ecuación (7.13) después de fijar  $\mathbf{w}$  en  $\mathbf{w}^*$ . Por tanto, si el segundo subproblema de minimización interior en la ecuación (7.13) se resuelve con  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$ , entonces  $\mathbf{v}^*$  se obtiene como el conjunto de multiplicadores óptimos asociados con las restricciones en  $X$ . Así, en el ejemplo de la sección 7.2, se obtiene  $(w_1^*, w_2^*) = (-1, -1)$ . Además, con  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$  fijo, el subproblema (final) resuelto es maximizar  $\{-3x_4 : \mathbf{x} \in X\}$ , con lo que se obtiene un conjunto óptimo de multiplicadores duales  $\mathbf{v}^* = (0, 0, 0, 0)$  para las restricciones 3, 4, 5 y 6 en el ejemplo.

También debe observarse que los métodos de descomposición de Dantzig-Wolfe y de Benders se clasifican, respectivamente, como esquemas de *precios dirigidos* y de *recursos dirigidos*. El primer tipo de procedimiento conduce la coordinación en el método de descomposición ajustando los *precios* o los coeficientes

de la función objetivo mediante multiplicadores Lagrangianos. Por otra parte, el último tipo de procedimiento es dual a este esquema, y conduce esta coordinación ajustando las disponibilidades de los *recursos* comunes (lados derechos) fijando ciertos valores de la variable, por ejemplo.

Existe otra estrategia general de optimización de precios dirigidos para P con la que se encuentra una equivalencia de los métodos anteriores cuando se resuelven problemas de programación lineal; a saber, la *técnica de relajación Lagrangiana*. (Vea el ejercicio 6.73.) Con base en la ecuación (7.13) observe que si la función en  $\{\cdot\}$ , que es una función de  $\mathbf{w}$ , se denota por  $\theta(\mathbf{w})$ , entonces el problema D puede plantearse de manera equivalente como

$$\text{Maximizar } \{\theta(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \text{ no restringida}\} \quad (7.16)$$

en donde

$$\theta(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{b} + \text{Mínimo}\{(\mathbf{c} - \mathbf{w}\mathbf{A})\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\} \quad (7.17)$$

El problema (7.16) se denomina *dual Lagrangiano* del problema P. El problema (7.17) es el *subproblema Lagrangiano* asociado. Observe que en el problema (7.17) las restricciones  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  se han escrito en la función objetivo de P mediante los multiplicadores lagrangianos  $\mathbf{w}$ . Debido al análisis anterior, es evidente que el valor máximo en el problema (7.16) se compensa con el valor objetivo óptimo de P, y así  $\theta(\mathbf{w})$  proporciona una cota inferior para este valor óptimo para cualquier  $\mathbf{w}$  arbitraria. Esta es la razón por la cual el problema (7.16) se denomina problema "dual Lagrangiano". Además, como  $\theta(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{b} + \text{Mínimo}_{j=1, \dots, t}\{(\mathbf{c} - \mathbf{w}\mathbf{A})\mathbf{x}_j\}$ ,  $\theta(\mathbf{w})$  es una función lineal por partes y cóncava de  $\mathbf{w}$  (¿por qué?). Así, el problema (7.16) busca un máximo no restringido para esta función. Aunque para resolver el problema (7.16) es posible usar varios métodos de búsqueda no lineal para problemas de optimización no "suaves", resulta evidente que el método de Benders es una técnica de solución viable. Ese esquema de plano cortante o de generación de renglones puede considerarse como un método de aproximación tangencial para resolver el problema (7.16), en donde sólo se generan unos cuantos de los soportes o segmentos tangenciales  $z \leq \mathbf{w}\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{w}\mathbf{A})\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, t$  que describen a  $\theta(\cdot)$ .  $z$  es el valor medido a lo largo del eje  $\theta(\cdot)$ . Aplicando este punto de vista, el problema maestro relajado PM de la ecuación (7.14) emplea una *linealización exterior* del problema (7.16), usando sólo un subconjunto de los apoyos tangenciales que describen realmente la función lineal por partes  $\theta(\cdot)$ . Si  $\bar{\mathbf{w}}$  resuelve este problema con valor objetivo  $\bar{z}$ , entonces  $\bar{z}$  es una cota superior del valor óptimo del problema (7.16). Sin embargo, si  $\bar{z} = \theta(\bar{\mathbf{w}})$  en sí, entonces  $\bar{\mathbf{w}}$  es óptimo en el problema (7.16) (¿por qué?). En caso contrario,  $\bar{z} > \theta(\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}\mathbf{b} + \text{Mínimo}\{(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{w}}\mathbf{A})\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\} = \bar{\mathbf{w}}\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{w}}\mathbf{A})\mathbf{x}_k$ , por ejemplo, como fue producido por el subproblema (7.17), lo cual coincide con el subproblema de Benders (7.15). Por tanto, el apoyo tangencial  $z \leq \mathbf{w}\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{w}}\mathbf{A})\mathbf{x}_k$  es generado y se incluye en la linealización exterior de  $\theta(\cdot)$ , y el procedimiento se repite hasta que se llega a la terminación. Al terminar, la solución primal óptima puede recuperarse ponderando cada  $x_j$  en la ecuación (7.14) mediante el multiplicador dual correspondiente  $\lambda_j$ , en caso de ser positivo en condiciones de optimalidad, y sumando.

**Ejemplo 7.3**

Considere el problema de programación lineal proporcionado en el ejemplo de la sección 7.2. Las variables duales asociadas con las restricciones se denotan por  $(w_1, w_2, v_1, v_2, v_3, v_4)$  y el dual se escribe como sigue.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } 2w_1 + 3w_2 + 2v_1 + 5v_2 + 2v_3 + 6v_4 \\ &\text{Sujeta a } \begin{array}{rcl} w_1 + w_2 + v_1 + v_2 & \leq & -2 \\ & w_2 & + 2v_2 \leq -1 \\ & w_1 & - v_3 + 2v_4 \leq -1 \\ & 2w_2 & + v_3 + v_4 \leq 1 \\ & & \mathbf{w} \leq \mathbf{0}, \mathbf{v} \leq \mathbf{0} \end{array} \end{aligned}$$

Tratando a  $w$  como las variables complicantes, en este caso el problema maestro de Benders se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z \\ &\text{Sujeta a } z \leq 2w_1 + 3w_2 + x_{j_1}(-2 - w_1 - w_2) \\ &\quad + x_{j_2}(-1 - w_2) + x_{j_3}(-1 - w_1) + x_{j_4}(1 - 2w_2) \\ &\quad z \text{ no restringida, } \mathbf{w} \leq \mathbf{0} \quad \text{para } j = 1, \dots, t \end{aligned}$$

en donde  $x_j = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4})$ ,  $j = 1, \dots, t$  son los vértices de  $X$  según se definieron en la ecuación (7.2). El problema dual Lagrangiano correspondiente es

$$\text{Maximizar } \{ \theta(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \leq \mathbf{0} \}$$

en donde, para  $w = (w_1, w_2)$  dado, se tiene

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{w}) = 2w_1 + 3w_2 + \underset{x \in X}{\text{Mínimo}} \{ &(-2 - w_1 - w_2)x_1 + (-1 - w_2)x_2 \\ &+ (-1 - w_1)x_3 + (1 - 2w_2)x_4 \} \end{aligned}$$

Observe que la evaluación de  $\theta(\mathbf{w})$ , dado  $w$ , es precisamente el subproblema de Benders.

Suponga que como en la sección 7.2, se empieza con el vértice  $x_1 = (0, 0, 0, 0)$  de  $X$ . Por tanto, el problema maestro relajado de Benders es de la forma

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z \\ &\text{Sujeta a } z \leq 2w_1 + 3w_2 \\ &\quad \mathbf{w} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

La solución óptima es  $\bar{z} = 0$ ,  $\bar{w} = (0, 0)$ . Por tanto, usando sólo el soporte tangencial  $z \leq 2w_1 + 3w_2$  para  $\theta(\cdot)$ , se obtiene  $\bar{w} = (0, 0)$  como la solución maximizada. Al resolver el subproblema de Benders' con  $\bar{w} = (0, 0)$ ; es decir, calculando  $\theta(\bar{w})$ , se obtiene  $\theta(\bar{w}) = -\frac{17}{2}$ , realizado en  $x_2 = (2, \frac{3}{2}, 3, 0)$ . Como  $\theta(\bar{w}) < \bar{z}$ , entonces se genera un segundo corte o apoyo tangencial de Benders usando  $x_2$ :

$$\begin{aligned} z &\leq 2w_1 + 3w_2 + 2(-2 - w_1 - w_2) + \frac{3}{2}(-1 - w_2) + 3(-1 - w_1) \\ &= -\frac{17}{2} - 3w_1 - \frac{1}{2}w_2 \end{aligned}$$

Lo anterior lleva al programa maestro de Benders

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z \\ &\text{Sujeta a } z \leq 2w_1 + 3w_2 \\ &\quad z \leq -\frac{17}{2} - 3w_1 - \frac{1}{2}w_2 \\ &\quad \mathbf{w} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

La solución óptima es  $\bar{z} = -\frac{17}{2}$ , y  $\bar{w} = (-\frac{17}{10}, 0)$ . Las variables de holgura en ambas restricciones son no básicas, y por tanto se mantienen ambas restricciones. (Las variables duales respectivas son  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{2}{5}$ .) Al resolver el subproblema de

Benders, se calcula  $\theta(\bar{w}) = -\frac{59}{10}$  realizado en  $x_3 = (0, \frac{5}{2}, 0, 0)$ . Como  $\bar{z} > \theta(\bar{w})$ , se genera una tercera restricción o apoyo tangencial de Benders como  $z \leq 2w_1 + 3w_2 + \frac{5}{2}(-1 - w_2) = -\frac{5}{2} + 2w_1 + \frac{1}{2}w_2$ . Al añadir lo anterior al programa maestro, se obtiene

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z \\ &\text{Sujeta a } z \leq 2w_1 + 3w_2 \\ &\quad z \leq -\frac{17}{2} - 3w_1 - \frac{1}{2}w_2 \\ &\quad z \leq -\frac{5}{2} + 2w_1 + \frac{1}{2}w_2 \\ &\quad \mathbf{w} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

La solución óptima de este problema es  $\bar{z} = -\frac{49}{10}$ , y  $\bar{w} = (-\frac{6}{5}, 0)$ , en donde la variable de holgura en la primera restricción es básica. (Los multiplicadores duales óptimos son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{2}{5}$  y  $\lambda_3 = \frac{3}{5}$ .) Por tanto, es posible eliminar la primera restricción de la linealización exterior actual. (Una restricción eliminada posiblemente puede regenerarse después.) Observe cómo estos cálculos se relacionan

con los cálculos del ejemplo numérico de la sección 7.2. En el ejercicio 7.32 se pide al lector continuar el proceso de resolución calculando a continuación  $\theta(\bar{w})$  y recuperando las soluciones óptimas primal y dual al completar el problema.

**EJERCICIOS**

7.1 Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && x_1 \\ &\text{Sujeta a} && x_1 + 3x_2 \leq \frac{9}{4} \\ & && 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ & && \mathbf{x} \in X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

- a. Resuelva gráficamente el problema.
- b. Resuelva el problema aplicando el método de descomposición de Dantzig-Wolfe. Comente el número de puntos extremos de  $X$  usados en condiciones de optimalidad, en términos de la observación 6 de la sección 7.1.
- c. ¿El programa maestro de Dantzig-Wolfe (7.1) a (7.3) tiene soluciones óptimas alternativas? ¿El problema original tiene soluciones óptimas alternativas? Explique sus respuestas.

7.2 Resuelva el siguiente problema mediante la técnica de descomposición usando una restricción de convexidad. Muestre el avance de la cota inferior y del objetivo primal. Obtenga las soluciones primal y dual.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ &\text{Sujeta a} && x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40 \\ & && -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & && x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & && x_3 \leq 10 \\ & && x_4 \leq 10 \\ & && x_3 + x_4 \leq 15 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

7.3 Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante la técnica de descomposición usando una restricción de convexidad. Muestre el avance de la cota inferior y del objetivo primal. Obtenga las soluciones primal y dual.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ &\text{Sujeta a} && x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 8 \\ & && x_1 + x_2 \leq 6 \\ & && x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & && -x_3 + x_4 \leq 4 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

7.4 Desarrolle el problema maestro y el subproblema usando la técnica de descomposición para el siguiente problema de programación lineal. Suponga que  $X$  es poliédrico y que tiene una estructura especial. Plantee formalmente el algoritmo de descomposición para este caso.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \mathbf{cx} + \mathbf{dy} \\ &\text{Sujeta a} && \mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

7.5 Considere el problema factible y acotado: Minimizar  $\mathbf{cx}$  sujeta a  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \in X$ . Suponga que  $\mathbf{w}^* \mathbf{A} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , en donde  $\mathbf{w}^*$  es el vector multiplicador Lagrangiano óptimo asociado con las restricciones  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . ¿Lo anterior implica la existencia de una solución óptima  $\mathbf{x}^*$  que pertenezca al interior de  $X$ ? ¿Es verdadera la converso de esta implicación? Interprete geométricamente sus respuestas.

7.6 Considere el problema: Minimizar  $\mathbf{cx}$  sujeta a  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{Dx} = \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . Suponga que  $\mathbf{w}_1^*$  y  $\mathbf{w}_2^*$  son los vectores duales óptimos de las restricciones  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{Dx} = \mathbf{d}$ , respectivamente. Considere el problema: Maximizar  $(\mathbf{w}_1^* \mathbf{A} - \mathbf{c}) \mathbf{x}$  sujeta a  $\mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Dx} = \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ . Suponga que  $X$  es acotado. Sean  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_k^*$  soluciones óptimas del problema anterior y que son puntos extremos del conjunto  $X$ . Demuestre que una solución óptima del problema original se puede expresar como una combinación convexa de  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_k^*$ ; es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j^* \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

¿Es cierto que  $X$  es no acotado? Demuestre su aseveración o proporcione un contraejemplo y modifique el planteamiento de representación.



7.7 Considere el siguiente problema.

$$\text{Minimizar } 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a } & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ & 0 \leq x_1, \quad x_2, \quad x_3 \leq 3 \end{aligned}$$

- Formule el problema de modo que sea posible resolverlo mediante el algoritmo de descomposición.
- Encuentre una base inicial en el espacio  $\lambda$ .
- Encuentre una solución óptima mediante el algoritmo de descomposición y compare con el método simplex acotado.

7.8 Considere el siguiente problema (de transporte).

$$\text{Minimizar } x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24}$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & = 500 \\ & & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 700 \\ & x_{11} & + x_{21} & = 200 \\ & & x_{12} & + x_{22} & = 300 \\ & & & x_{13} & + x_{23} & = 400 \\ & & & & x_{14} & + x_{24} & = 300 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} & \geq 0 \end{aligned}$$

- Formule el problema de modo que sea posible resolverlo mediante el algoritmo de descomposición usando cuatro restricciones de convexidad.
- Encuentre una solución óptima usando el algoritmo de descomposición.

7.9 Aplique el principio de descomposición para resolver el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a } & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5 \\ & & 3x_3 + 4x_4 \geq 12 \\ & & x_3 \leq 4 \\ & & & x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

7.10 En el texto se desarrolló una cota inferior del valor objetivo óptimo cuando el subproblema es acotado. Analice en detalle el caso en que se relaja esta hipótesis.

7.11 Resuelva el siguiente problema mediante la técnica de descomposición usando dos restricciones de convexidad.

$$\text{Maximizar } x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a } & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 4x_3 \leq 5 \\ & & x_3 + x_4 \leq 4 \\ & & -x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

7.12 Resuelva el siguiente problema aplicando la técnica de descomposición.

$$\text{Minimizar } -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a } & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & & x_3 + x_4 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

7.13 Considere el problema: Minimizar  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  sujeta a  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \in X$ . Suponga que  $X$  tiene una estructura diagonal en bloque. El algoritmo de descomposición se puede aplicar usando una restricción de convexidad o bien, usando varias restricciones de convexidad, una para cada subproblema. Analice las ventajas y las desventajas de ambas estrategias. ¿Cuál preferiría el lector y por qué?

7.14 Aplique el algoritmo de descomposición al siguiente problema.

$$\text{Minimizar } -2x_1 + x_2 - 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a } & 6x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1, \quad x_2, \quad x_3 \leq 1 \end{aligned}$$

7.15 Suponga que no se eliminan las columnas añadidas durante cada paso maestro del algoritmo de descomposición. En particular, suponga que el programa maestro en la iteración  $p$  es como sigue.

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^p (\mathbf{c}\mathbf{x}_j)\lambda_j$$

$$\text{Sujeta a } \sum_{j=1}^p (\mathbf{A}\mathbf{x}_j)\lambda_j = \mathbf{b}$$

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, p$$

en donde  $x_1, \dots, x_p$  son los puntos extremos generados hasta el momento. Analice los detalles de tal procedimiento de descomposición y compare éste con el de la sección 7.1. Ilustre resolviendo el problema de la sección 7.2.

7.16 En referencia al ejercicio 7.15, considere el siguiente programa maestro.

Minimizar  $\sum_{j=1}^p (c_j) \lambda_j$

Sujeta a  $\sum_{j=1}^p (A_j) \lambda_j = b$

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Escriba el dual de este programa maestro. Suponga que, en vez de resolver este problema, se ha resuelto el problema dual. ¿Cómo procede el algoritmo de descomposición? Proporcione un planteamiento detallado del algoritmo y relaciónelo con el análisis de la sección 7.6. Demuestre la convergencia e interprétela geoméricamente.

7.17 Obtenga un diagrama de flujo y los pasos detallados del algoritmo de descomposición para resolver el problema: Minimizar  $cx$  sujeta a  $Ax = b$ ,  $x \in X$ , en donde  $X$  no necesariamente es acotado. Después, codifique el algoritmo de descomposición en FORTRAN o algún otro lenguaje de computadora. Use la codificación para resolver algunos de los problemas numéricos dados aquí.

7.18 Resuelva el siguiente problema mediante el algoritmo de descomposición.

Minimizar  $-x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4$

Sujeta a

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

7.19 Considere el siguiente problema.

Minimizar  $\sum_{i=1}^T c_i x_i$

Sujeta a  $\sum_{i=1}^T A_i x_i = b$

$$x_i \in X_i \quad i = 1, 2, \dots, T$$

Demuestre que cualquier base en el espacio  $\lambda_{ij}$  debe contener por lo menos un  $\lambda_{ij}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, T$ .

7.20 Resuelva el siguiente problema mediante el algoritmo de descomposición. Use la fase I para iniciar el procedimiento en el espacio  $\lambda$ .

Maximizar  $4x_1 + 3x_2 + x_3$

Sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7.21 ¿Es posible que el algoritmo de descomposición genere un punto óptimo no extremo del problema completo en caso de que haya soluciones óptimas alternativas? Comente lo anterior.

(Sugerencia: Considere el siguiente problema y empiece con el punto extremo  $(0, 0)$ .)

Maximizar  $x_1 + x_2$

Sujeta a  $x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}$

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

7.22 Cuando se resuelve(n) el (los) subproblema(s) y el problema maestro, se cuenta con muchas opciones. Algunas de éstas son las siguientes:

- El subproblema se termina si se encuentra un punto extremo  $x_k$  con  $\bar{z}_k - \hat{c}_k > 0$ . Luego  $\lambda_k$  se introduce en el problema maestro.
- En cada iteración es posible generar varias columnas a partir del (los) subproblema(s).
- Por lo menos se añade una columna al problema maestro sin eliminar ninguna de las columnas generadas previamente. En este caso, el problema maestro se reduce a encontrar la combinación óptima de todas las columnas generadas hasta el momento.

Analice en detalle las opciones anteriores y compárelas entre sí. Comente las ventajas y las desventajas de cada opción.

7.23 Efectúe un análisis detallado de los casos que pueden ocurrir al usar variables artificiales para encontrar una base inicial del problema maestro. Comente el método de dos fases y el método de penalización.

7.24 Considere el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Tx_T \\ \text{Sujeta a} & D_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_Tx_T = b_0 \\ & D_1x_0 + B_1x_1 & = b_1 \\ & D_2x_0 & + B_2x_2 & = b_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ & D_Tx_0 & & + B_Tx_T = b_T \\ & x_0, & x_1, & x_2, \dots, & x_T \geq 0 \end{array}$$

Describa en detalle cómo es posible aplicar la técnica de descomposición para resolver problemas que tienen la estructura anterior. (*Sugerencia:* Considere el primer conjunto de restricciones como las restricciones del problema maestro. El subproblema consta de las restricciones restantes. Considere el dual del subproblema y resuélvalo por descomposición. Lo anterior se transforma en un algoritmo de "tres niveles". Se dice que el subproblema posee estructura dual-angular.)

7.25 Considere el siguiente programa lineal con estructura escalonada:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \dots + c_Tx_T \\ \text{Sujeta a} & A_1x_1 & = b_1 \\ & B_1x_1 + A_2x_2 & = b_2 \\ & B_2x_2 + A_3x_3 & = b_3 \\ & B_3x_3 + A_4x_4 & = b_4 \\ & \vdots & \vdots \\ & B_{T-1}x_{T-1} + A_Tx_T = b_T \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \dots, & x_{T-1}, & x_T \geq 0 \end{array}$$

- Escriba  $x_1$  como una combinación convexa (con pesos  $\lambda_j, j = 1, \dots, E_1$ ) de los vértices en  $X_1 = \{x: A_1x_1 = b_1, x_1 \geq 0\}$ , que se supone no vacío y acotado, y aplique el principio de descomposición al problema.
- Para el programa maestro obtenido en el inciso (a), defina  $X_2$  como el conjunto de  $\lambda_j, j = 1, \dots, E_1$  y  $x_2$  que satisfacen las restricciones en que

sólo aparecen estas variables (es decir, que no implican a las variables  $x_3, \dots, x_T$ ). Aplique el principio de descomposición a este problema maestro con los subproblemas resueltos sobre  $X_2$  para obtener una *descomposición anidada de segundo nivel* del problema.

c. Continuando de esta manera, proponga un algoritmo de descomposición anidada de múltiples niveles para este problema.

7.26 Considere el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Tx_T \\ \text{Sujeta a} & A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_Tx_T \leq b \\ & B_1x_1 & \leq b_1 \\ & B_2x_2 & \leq b_2 \\ & \vdots & \vdots \\ & B_Tx_T \leq b_T \\ & x_1, & x_2, \dots, & x_T \geq 0 \end{array}$$

La siguiente implementación del principio de descomposición es una posibilidad. Las restricciones del subproblema son

$$\begin{array}{ll} A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_Tx_T \leq b \\ x_1, & x_2, \dots, & x_T \geq 0 \end{array}$$

y las restricciones maestras son  $B_1x_1 \leq b_1, B_2x_2 \leq b_2, \dots, B_Tx_T \leq b_T$ . Describa los detalles del tal algoritmo. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de este procedimiento? ¿Tiene este esquema una interpretación económica? Use este esquema para resolver el ejercicio 7.12.

7.27 Considere el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{j=1}^T c_jx_j + \sum_{j=1}^T d_jy_j \\ \text{Sujeta a} & x_{j-1} - x_j + A_jy_j = b_j \quad j = 1, 2, \dots, T \\ & x_T = b \\ & 0 \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, T \\ & 0 \leq y_j \leq u'_j \quad j = 1, 2, \dots, T \end{array}$$

en donde  $x_0$  es un vector conocido.

- ¿Qué clase de problemas corresponden a esta estructura general? ¿Cuál es la interpretación de los vectores  $x_j$  y  $y_j$ ? (*Sugerencia:* Analice un sistema de control discreto.)

- b. ¿Cómo es posible aplicar el algoritmo de descomposición a este sistema?  
 (Sugerencia: Elija las restricciones terciadas, una sí y otra no, para formar las restricciones maestras.)
- c. Aplique el procedimiento del inciso (b) para resolver el siguiente problema, usando  $x_0 = 80$ .

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 6y_4 \\ & x_0 - x_1 + y_1 = 40 \\ & x_1 - x_2 + y_2 = 50 \\ & x_2 - x_3 + y_3 = 60 \\ & x_3 - x_4 + y_4 = 40 \\ & x_4 = 30 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 40 \\ & 0 \leq y_1, y_2 \leq 45 \\ & 0 \leq y_3, y_4 \leq 50 \end{aligned}$$

- 7.28 Considere el siguiente problema de patrones de corte. Se cuenta con rollos estándar de longitud  $l$  y se recibe un pedido requiriendo  $b_i$  unidades de longitud  $l_i$ , en donde  $i = 1, 2, \dots, m$ . Se desea calcular el número mínimo de rollos que satisfacen el pedido.
- a. Formule el problema.
- b. Aplique el algoritmo de descomposición para resolver el problema, ignorando los requerimientos de enterabilidad. Comente en detalle lo anterior. (Sugerencia: Suponga que la columna  $a_j$  representa el  $j$ -ésimo patrón de corte. Aquí,  $a_j$  es un vector de enteros no negativos; la  $i$ -ésima componente  $a_{ij}$  es el número de rollos de longitud  $l_i$  y el  $j$ -ésimo patrón de corte. Desarrolle un esquema para generar estas columnas  $a_j$ . ¿Cuál es el problema maestro y cuál es el subproblema?)

- 7.29 Un molino agrícola produce alimento para ganado y alimento para pollos. Estos productos se componen de tres ingredientes principales; a saber, maíz, cal y harina de pescado. Los ingredientes contienen dos tipos principales de nutrientes, que son proteínas y calcio. En la tabla siguiente se muestran los contenidos de nutrientes por libra de cada ingrediente.

NUTRIENTE	INGREDIENTES		
	MAÍZ	CAL	HARINA DE PESCADO
Proteínas	25	15	25
Calcio	15	30	20

El contenido de proteínas en el alimento para ganado debe estar en el intervalo  $[18, 22]$  por libra. El contenido de calcio en el mismo alimento debe ser mayor o igual que 20 por libra. De manera semejante, en el alimento para

pollos el contenido de proteínas por libra y el contenido de calcio por libra deben estar en los intervalos  $[20, 23]$  y  $[20, 25]$ , respectivamente. Suponga que se dispone de 3000, 2500 y 1000 libras de maíz, cal y harina de pescado, respectivamente. También suponga que se requiere producir 4000 y 2000 libras de alimento para ganado y para pollos, respectivamente. El precio por libra de maíz, cal y harina de pescado es, respectivamente, de \$0.10, \$0.10 y \$0.08. Formule el problema de mezclado de alimentos con el objetivo de minimizar el costo. Resuelva el problema mediante el algoritmo de descomposición usando dos restricciones de convexidad. Es posible obtener cantidades extras de maíz y de harina de pescado pero, debido a la escasez, a precios más altos de \$0.12 y \$0.10 por libra. ¿Aconsejaría el lector al molino que considere la compra extra de maíz y de harina de pescado y que modifique su mezcla según estos precios? ¿Por qué?

- 7.30 Una compañía petrolera tiene dos refinerías, una en Dallas y la otra en Nueva York. La compañía puede comprar dos tipos de petróleo crudo, petróleo ligero y petróleo pesado, a los precios de \$11 y \$9 por barril, respectivamente. Debido a la escasez, las cantidades máximas que se pueden comprar de estos crudos son de 2 millones y 1 millón de barriles, respectivamente. Por cada barril de cada tipo de petróleo es posible producir las siguientes cantidades de gasolina, kerosina y turbosina.

	GASOLINA	KEROSINA	TURBOSINA
Petróleo ligero	0.40	0.20	0.35
Petróleo pesado	0.32	0.40	0.20

Observe que durante el proceso de refinamiento se pierden 5% y 8% del crudo, respectivamente. La compañía tiene un contrato para entregar estos productos a tres consumidores en las ciudades de Kansas, Los Angeles y Detroit. Las demandas de estos productos son las siguientes

	GASOLINA	KEROSINA	TURBOSINA
Kansas	200,000	400,000	—
Los Angeles	300,000	200,000	600,000
Detroit	500,000	100,000	300,000

Se desea determinar las cantidades que debe comprar la compañía de cada tipo de crudo, en cada una de sus refinerías, y el patrón de embarque de los productos a las ciudades de Kansas, Los Angeles y Detroit, de modo que se satisfagan las demandas y se minimice el costo total (compra + embarque). A continuación se proporcionan los costos de embarque y de manejo por barril de cualquier producto acabado, de las refinerías a los consumidores.

	KANSAS	LOS ANGELES	DETROIT
Refinería en Dallas	\$0.60	\$0.40	\$0.50
Refinería en Nueva York	\$0.35	\$0.80	\$0.30

- Formule el problema.
- Sugiera un esquema de descomposición para resolver el problema.
- Resuelva el problema aplicando el esquema obtenido en el inciso (b).

7.31 Una compañía tiene dos fábricas, una en Atlanta y otra en Los Angeles. Las dos fábricas producen refrigeradores y lavadoras/secadoras. Las capacidades de producción de estos artículos en Atlanta son de 5000 y 7000, respectivamente. La capacidad de las instalaciones en Los Angeles es de 8000 refrigeradores y 4000 lavadoras/secadoras. La compañía entrega estos productos a tres grandes clientes en las ciudades de Nueva York, Seattle y Miami. A continuación se proporcionan las demandas de los clientes.

DEMANDA/CLIENTE	NUEVA YORK	SEATTLE	MIAMI
Refrigeradores	4000	5000	4000
Lavadoras/secadoras	3000	3000	4000

Los artículos se transportan desde las fábricas hasta los clientes a través de una red de ferrocarril. En la tabla siguiente se resumen los costos de transporte por unidad (no se hace distinción entre los dos artículos). También, debido a limitaciones de espacio, en la tabla se muestra el número máximo de refrigeradores y/o lavadoras/secadoras que es posible transportar de cada fábrica a cada uno de los clientes.

FÁBRICA		CLIENTE		
		NUEVA YORK	SEATTLE	MIAMI
Atlanta	Costo unitario de embarque en \$	6	14	7
	Número máximo de unidades	6000	3000	8000
Los Angeles	Costo unitario de embarque en \$	10	8	15
	Número máximo de unidades	3000	9000	3000

Se desea determinar el patrón de embarque que minimice el costo total de transporte.

- Formule el problema.
- Aplique la técnica de descomposición con dos restricciones de convexidad para resolver el problema.

(Nota. Este problema se denomina *problema de transporte de bienes múltiples*. El subproblema se descompone en dos problemas de transporte. Si el lector está familiarizado con el algoritmo de transporte, puede aplicarlo para resolver los subproblemas.)

7.32 Complete la solución del ejemplo 7.3 en la sección 7.6 e interprete el proceso de solución como una aplicación de las técnicas de relajación de Benders y de Lagrange. Proporcione las soluciones primal y dual.

7.33 Proporcione el desarrollo del algoritmo de particiones de Benders y del método de relajación lagrangiano dados en la sección 7.6 para el caso de  $X$  no acotado (*sin* acotar artificialmente este conjunto). Proporcione un planteamiento formal y completo del algoritmo así desarrollado y establezca su convergencia. Ilustre lo anterior aplicando este algoritmo al ejemplo 7.1 e identifique la relación paso a paso de este procedimiento con el método de descomposición de Dantzig-Wolfe de la sección 7.4.

7.34 Considere la generalización del algoritmo de particiones de Benders para el siguiente problema no lineal y/o discreto.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} + f(\mathbf{y}) \\ \text{Sujeta a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \in Y \end{aligned}$$

en donde  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son vectores,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices,  $f$  es una función arbitraria y  $Y$  es un conjunto arbitrario.

a. Demuestre que el problema se puede volver a plantear como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z \\ \text{Sujeta a} \quad & z \geq f(\mathbf{y}) + \mathbf{w}(\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{y}) \quad \text{para cada } \mathbf{w} \in W \\ & \mathbf{y} \in Y \end{aligned}$$

en donde  $W = \{\mathbf{w} \text{ no restringido: } \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\}$ . (Sugerencia: El problema original puede volver a plantearse como

$$\text{Minimizar}_{\mathbf{y} \in Y} \left( f(\mathbf{y}) + \text{Mínimo}_{\substack{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}}} \mathbf{c}\mathbf{x} \right)$$

Considere el dual de

Minimizar  $cx$

Sujeta a  $Ax = b - By$   
 $x \geq 0$

b. Demuestre que  $z \geq f(y) + w(b - By)$  para todo  $wA \leq c$  si y sólo si  $z \geq f(y) + w_j(b - By)$  y  $d_j(b - By) \leq 0$  para todo punto extremo  $w_j$  y toda dirección extrema  $d_j$  de la región  $W$ .

c. Use el inciso (b) para volver a plantear el problema del inciso (a) como sigue:

Minimizar  $z$

Sujeta a  $z \geq f(y) + w_j(b - By) \quad j = 1, 2, \dots, t$   
 $d_j(b - By) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$   
 $y \in Y$

en donde  $w_1, \dots, w_t$  y  $d_1, \dots, d_l$  son los puntos extremos y las direcciones extremas de  $W$ .

d. Sin enumerar de antemano de manera explícita  $w_1, \dots, w_t$  y  $d_1, \dots, d_l$ , diseñe un algoritmo de descomposición para resolver el problema del inciso (c). (Sugerencia:

Problema maestro:

Minimizar  $z$

Sujeta a  $z \geq f(y) + w_j(b - By) \quad j = 1, 2, \dots, t'$   
 $d_j(b - By) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l'$   
 $y \in Y$

en donde  $w_1, \dots, w_{t'}$  y  $d_1, \dots, d_{l'}$  son los puntos extremos y las direcciones extremas generadas hasta el momento.

Subproblema:

Maximizar  $w(b - By)$

Sujeta a  $wA \leq c$

en donde  $y$  se obtiene a partir del óptimo del problema maestro.)  
e. ¿Cómo obtendría el lector el óptimo  $(x, y)$  en la terminación del algoritmo de descomposición del inciso (d)?

(Nota. Este algoritmo es el procedimiento de particiones de Benders. Observe que el conjunto  $Y$  puede ser discreto y, por tanto, el procedimiento

puede usarse para resolver problemas enteros mixtos. En este caso, el problema maestro en el inciso (d) es un problema puro de programación entera y el subproblema es un programa lineal.)

7.35 Aplique el procedimiento de particiones de Benders del ejercicio 7.34 para resolver el siguiente problema [considere  $(x_1, x_2)$  como  $x$ , y  $(x_3, x_4)$  como  $y$ ].

Minimizar  $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4$

Sujeta a  $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 12$   
 $-x_1 + x_2 \leq 4$   
 $2x_1 + x_2 \leq 6$   
 $x_3 + x_4 \leq 8$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

7.36 Una compañía desea construir varios almacenes para guardar cierto producto. Estos almacenes surtirán a dos grandes clientes con demandas mensuales de 3000 y 5000 unidades. Es posible construir tres almacenes candidatos con capacidades de 4000, 5000 y 6000 unidades. Aplicando el costo estimado de construcción de los almacenes, su vida útil y el valor del dinero con el tiempo, los costos de producción por mes para los tres almacenes se han estimado en \$8000, \$12 000 y \$7000. A continuación se proporcionan los costos de transporte por unidad desde los tres almacenes candidatos hasta los clientes.

ALMACÉN	CLIENTE	
	1	2
1	1.50	2.00
2	2.00	1.50
3	2.50	2.25

Aplique el procedimiento de particiones de Benders' del ejercicio 7.34 para determinar cuáles almacenes se deben construir, y encontrar el correspondiente patrón de embarque.

7.37 Resuelva por completo gráficamente el siguiente programa lineal usando descomposición.

Minimizar  $2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5$

Sujeta a  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$   
 $3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 \geq 5$   
 $-x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 2$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(Sugerencia: Denote por  $Ax \geq b$  la primera restricción y suponga que las dos restricciones siguientes representan a  $X$ . Después, tome el dual de cada conjunto.)

- 7.38 Indique cómo es posible generalizar los resultados del ejercicio anterior a cualquier número  $m$  de restricciones. (Sugerencia: Denote por  $Ax = b$  la primera de las restricciones y tome las siguientes  $m - 1$  restricciones como parte del subproblema. Después aplique de nuevo descomposición al subproblema de manera semejante.)
- 7.39 Suponga que un programa lineal requiere de  $3m/2$  iteraciones para encontrar una solución. También suponga que se aplican las técnicas de pivoteo normales para actualizar la base inversa y el vector del lado derecho en total, una matriz de  $(m + 1) \times (m + 1)$ , si se ignora la columna  $z$ . Si la matriz de restricciones no tiene ninguna estructura especial, ¿existe una separación óptima para la descomposición? Es decir, encuentre  $m_1 + m_2 = m$  de modo que las primeras restricciones  $m_1$  formen el problema maestro las siguientes restricciones  $m_2$  sean restricciones del subproblema, y se minimice el "esfuerzo" total. Suponga que el "esfuerzo" se define como el número de operaciones elementales (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones).
- 7.40 En el problema anterior, suponga que  $m_1$  y  $m_2$  son dados y que las segundas restricciones  $m_2$  tienen una estructura especial. Específicamente, suponga que el subproblema, cuando es tratado por sí mismo, requiere de sólo el 5% del esfuerzo normal para encontrar una solución.
- ¿Se debe descomponer el problema para mayor eficiencia?
  - ¿Existe un valor crítico del porcentaje de esfuerzo requerido?
- 7.41 Resuelva por descomposición el siguiente problema.

$$\text{Minimizar} \quad -2x_1 + 5x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a} \quad & x_1 + 2x_2 + a_1x_3 \leq 6 \\ & 3x_1 - 6x_2 + a_2x_3 \leq 5 \\ & 2a_1 + 3a_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

[Sugerencia: Sea  $X = \{(a_1, a_2): 2a_1 + 3a_2 = 4, a_1, a_2 \geq 0\}$ . Este problema se denomina *problema generalizado de programación lineal*.]

## NOTAS Y REFERENCIAS

- El algoritmo de descomposición de este capítulo es una adaptación del principio de descomposición de Dantzig-Wolfe [1960, 1961]. Este último se inspiró en las

sugerencias de Ford y Fulkerson [1958b] para resolver el caso especial de problemas de flujo en redes con bienes múltiples.

- El método de descomposición presentado en este capítulo está estrechamente relacionado con los conceptos de multiplicadores de Lagrange generalizados, la aproximación tangencial de la función lagrangiana dual y el dual del algoritmo de plano cortante, como se analizó en la sección 7.6. Para mayor información sobre estos tópicos, el lector puede consultar a Bazaraa y Shetty [1979], Everett [1963], Geoffrion [1971], Lasdon [1970], Kelley [1960] y Zangwill [1969].
- Además del algoritmo de Dantzig-Wolfe y otros algoritmos de descomposición, en la bibliografía existen muchos otros métodos de descomposición. Estos pueden clasificarse en algoritmos de *precios dirigidos* y algoritmos de *recursos dirigidos*. En los primeros, se encuentra una dirección para modificar los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de acoplamiento y, después, se toma un tamaño de paso idóneo a lo largo de esta dirección. Vea, por ejemplo Geoffrion [1970], Lasdon [1970], Grinold [1972], Balas [1966b], Held, Wolfe y Crowder [1974], y Bazaraa y Goode [1979]. Los algoritmos de recursos dirigidos proceden determinando una dirección para modificar las distribuciones de los recursos comunes entre los subproblemas y determinando después el tamaño del paso. El lector puede consultar a Geoffrion [1970], Lasdon [1970] y Abadie [1963].
- En el ejercicio 7.34 se describe el esquema de particiones de Benders [1962] que se especializó en la sección 7.6. Este esquema es particularmente idóneo para resolver problemas mixtos de programación entera.
- Para un análisis geométrico más profundo del algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe, consulte a Todd [1983]. Para cuestiones de implementación, consulte a Ho y Loute [1981, 1983]. Birge [1985] proporciona un análisis adicional de este procedimiento, y Wittrock [1985] lo aplica al dual del problema con estructura escalonada del ejercicio 7.25. (El método bosquejado en el ejercicio 7.25 está tomado de la obra de Glassey [1973].) Para generalizaciones de los algoritmos de Dantzig-Wolfe/Benders, consulte a Geoffrion [1972] y a Burkard *et al.* [1985].