**Universidad de la República** **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Julio 2022**

EXAMEN – 21 JULIO DE 2022

| Nro de Examen | Cédula | Apellido y nombre |
|---|---|---|
| | | |

## Respuestas Verdadero o Falso

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

## Respuestas Ejercicios Multiple Opción

| E. 1 | E. 2 | E. 3 | E. 4 | E. 5 | E. 6 | E. 7 | E. 8 | E. 9 | E. 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

## Importante

- El examen dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Tienen 5 ejercicios verdadero/falso de 4 puntos cada uno y 10 ejercicios múltiple opción de 8 puntos cada uno. El examen es de 100 puntos en total. Se aprueba con 60 puntos.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Notación:** Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la frontera y el interior de $A$ se denotan por $\partial(A)$ y $int(A)$ respectivamente.

### 1. Verdadero - Falso.

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, $-1$ punto si la respuesta es incorrecta 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

(1) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y $B \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado entonces $A \cap B$ es cerrado.

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un función continua en $(0,0)$ y las derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$ existen, entonces $f$ es diferenciable $(0,0)$.

(3) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es convergente.

(4) La parte imaginaria del complejo $\frac{5}{2-i}$ es igual a 1.

(5) La función $y(x) = e^{3x}\sin(2x)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 13y = 0$.

## 2. Múltiple Opción

Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, $-2$ punto si la respuesta es incorrecta 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

(1) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Entonces

A. La función $f$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde sus derivadas parciales no existen en $(0,0)$.

B. La función $f$ es una función con derivadas parciales continuas en $(0,0)$ por lo tanto es diferenciable $(0,0)$.

C. La función $f$ es una función continua en $\mathbb{R}^2$ y su plano tangente en $(0,0)$ es igual a $z=0$.

D. La función $f$ es diferenciable en $(0,0)$ pero no tiene derivadas parciales continuas en $(0,0)$.

(2) Consideremos la función $w=2st$ donde $s=x^2+y^2$, $t=\dfrac{x}{y}$. Entonces, la dirección de máximo crecimiento de $w$ en $x=y=1$ es:

A. la dirección del vector $(1,0)$.

B. la dirección del vector $(0,1)$.

C. la dirección del vector $(2,1)$.

D. la dirección del vector $(1,1)$.

(3) El volumen encerrado entre el plano de ecuación $z=0$ y el gráfico de la función $f(x,y)=2-x^2-y^2$ vale:

A. $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

B. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

C. $2\pi$.

D. $\pi$.

(4) El polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y)=\cos(x+y)e^{-x^2}$ en $(0,0)$ es:

A. $1-\dfrac{3}{2}x^2-xy-\dfrac{1}{2}y^2$.

B. $1+x-\dfrac{3}{2}x^2+xy-\dfrac{1}{2}y^2$.

C. $1+\dfrac{3}{2}x^2-xy+\dfrac{1}{2}y^2$.

D. 1.

(5) La serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^n$$

A. No se puede clasificar.

B. diverge.

C. oscila.

D. converge.

(6) Se considera la sucesión $a_n$, definida para todo $n \in \mathbf{N}$, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n - 2} \\ a_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Entonces, de $a_n$ se puede decir que:

A. es monótona creciente y convergente a 1.
B. es monótona decreciente y convergente a 1.
C. es monótona creciente y no convergente.
D. es monótona decreciente y no convergente.

(7) Considere las siguientes afirmaciones:

I. Si $A$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces $\partial(A) \cup int(A) = A$.
II. Si $A$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto de sus puntos de acumulación es cerrado.
III. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia cualquiera de conjuntos cerrados entonces $\cup_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado.

Entonces

A. I, III son verdaderas y II es falsa
B. I, II, son verdaderas y III es falsa.
C. II, III son verdaderas y I es falsa.
D. Solamente II es verdadera.

(8) Sea $(a_n, b_n)$ una sucesión en $\mathbb{R}^2$.

Entonces

A. Si $(a_n)$ y $(b_n)$ no convergen entonces $(a_n, b_n)$ no tiene subsucesión convergente.
B. Si $(a_n, b_n)$ converge entonces la sucesión real $c_n = a_n b_n$ converge.
C. Si $(a_n, b_n)$ converge entonces la sucesión real $d_n = a_n + b_n$ diverge.
D. Si $(a_n, b_n)$ tiene una subsucesión convergente entonces la sucesión $(a_n, b_n)$ converge.

(9) Sea $y = y(x)$ una función que satisface la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = -6x^2 - 8x + 13$ con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = 3$.

Entonces

A. $y(1) = e^2 + e^3$.
B. $y(1) = 2(\dfrac{1}{e^2} + e^3)$.
C. $y(1) = e^{-2} + e^3$.
D. $y(1) = \dfrac{1}{e^2} + e^3 + 1$.

(10) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La integral $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{x}{2-x}\right)^\alpha dx$:

A. converge para todo $\alpha > 1$.
B. converge para todo $\alpha \in (-1, 1)$.
C. converge para todo $\alpha < 0$.
D. converge para todo $\alpha \in (-1, 0)$.