Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Julio 2022**

SEGUNDO PARCIAL – 02 JULIO DE 2022

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Respuestas Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	V	F	V	V	V	F	V

Respuestas Ejercicios Multiple Opción

E. 1	E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10
C	A	D		B	C	A	B	C	B

Importante

- El parcial dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Tienen 10 ejercicios verdadero/falso de 2 puntos cada uno y 10 ejercicios múltiple opción de 4 puntos cada uno. El parcial es de 60 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos.
- **Notación:** Dado un conjunto $A \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\partial(A)$ la frontera de A, $int(A)$ el conjunto de sus puntos interiores y $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A$.

1. Verdadero - Falso.

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

(1) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ entonces f es continua en $(0, 0)$.
(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ entonces f es diferenciable en $(0, 0)$.
(3) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Entonces la frontera de A coincide con el conjunto de los puntos de acumulación de A.
(4) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Entonces la frontera de A coincide con el conjunto de los puntos de acumulación de A.
(5) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x, y) = x + 2y + 1$ entonces el diferencial de f en (1,1) es $df_{(1,1)}(x, y) = x + 2y + 1$.
(6) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x, y) = x+2y+1$ entonces el plano tangente de f en (1,1) es $z = x+2y+1$.
(7) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ entonces $A^c \cup \partial(A) = (int(A))^c$.
(8) Si f es diferenciable en a entonces $-5f$ es diferenciable en a.
(9) Si una sucesión en $\mathbb{R}^2$ es acotada entonces alguna sucesión coordenada es convergente.
(10) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a entonces $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en a.

2. Múltiple Opción

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

1. Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0\ y>0 \\ 2 & \text{si } x<0\ y>0 \\ 3 & \text{si } x<0\ y<0 \\ 4 & \text{si } x>0\ y<0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

A. La función es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.
B. La función es discontinua solamente en $(0,0)$.
C. La función es continua para todo (x,y) tal que $xy \neq 0$.
D. La función es discontinua únicamente sobre todos los puntos del Eje X.

La opción correcta es la (C):

Consideremos un punto (x_0,y_0) tal que $x_0y_0 = 0$. En otras palabras, un punto cualquiera sobre el Eje X o el Eje Y. Es fácil verificar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe, usando trayectorias. (Rectas paralelas a los ejes coordenados). Por lo tanto, f no es continua en (x_0,y_0). En los restantes puntos la función siempre es constante en algún entorno y por lo tanto continua.

2. Considere las siguientes afirmaciones:

I. Si A y B son dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Entonces su unión $A\bigcup B$ y su intersección $A\bigcap B$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.
II. El conjunto $A = \{p\}$ fomado por un solo punto $p \in \mathbb{R}^n$ no es un abierto en $\mathbb{R}^n$.
III. Sea A un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. La frontera de A es un conjunto cerrado.
IV. El conjunto $A = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ no tiene puntos interiores.

Entonces

A. Todas las afirmaciones son verdaderas.
B. I, II, IV son verdaderas y III es falsa.
C. II, III, IV son veradaderas y I es falsa.
D. I, III y IV son verdaderas II es falsa.

La opción correcta es la (A):

Remitimos a las notas del Curso.

3. Si $f(x,y) = (e^{2x}\sin(y), e^{3x}\cos(y))$, y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ diferenciable tal que:

$$J_g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g(1) = (0,0)$$

Entonces $d(f\circ g)_{(1)}(t-1)$ vale

A. $((t-1), 2(t-1))$
B. $(2e^2(t-1), 3e^3(t-1))$
C. $(3(t-1), 2(t-1))$
D. $(2(t-1), 3(t-1))$

La opción correcta es la (D):

Utilizando la regla de la cadena III, la Jacobiana de la función $f\circ g$ en $t=1$ se encuentra como:

$$J_{f\circ g}(1) = J_f(g(1)) \cdot J_g(1)$$

$$J_f(g(1)) = \begin{pmatrix} 2e^{2x}\sin(y) & e^{2x}\cos(y) \\ 3e^{3x}\cos(y) & -e^{3x}\sin(y) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{f\circ g}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente $d(f\circ g)(1) = J_{f\circ g}(1) \cdot \Big(t-1\Big) = (2(t-1), 3(t-1))$.

4. De la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se conoce que:
   - f es diferenciable en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   - $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, t\right) = t^2 + 2t$
   - $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ con $\vec{v} = (1, -2)$

   Si $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, entonces $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(f\circ g\right)(r,\theta)$ en $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ vale:

   A.

   B.

   C.

   D.

   Puede ser útil recordar que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   Primero, usando la diferencialidad de f en $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ y el hecho de que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \langle(\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})), (1,-2)\rangle = 0$$

   lo cual implica que $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   Por otra parte, podemos calcular por definición el valor de $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ usando que $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, t\right) = t^2 + 2t$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$$

   Ahora, sean g_1 y g_2 las funciones componentes de g

$$g(r,\theta) = (g_1(r,\theta), g_2(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   Usando esta notación, por la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\partial g_1}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\partial g_2}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})(2\frac{\partial g_1}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) + \frac{\partial g_2}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}))$$

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) = (2+\sqrt{2})(2\frac{\partial g_1}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) + \frac{\partial g_2}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}))$$

   Finalmente usando que $\dfrac{\partial g_1}{\partial\theta}(1,\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\dfrac{\partial g_2}{\partial\theta}(1,\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial\theta}(1,\frac{\pi}{4}) = -1 - \sqrt{2}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \cos(2cx + ay)$$

   donde c es una constante no nula ($c \neq 0$).

   Entonces

A. La función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

para infinitos valor de a.

B. Existen exáctamente dos valores de a para los cuales la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

C. Existe un único valor de a para el cual la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

D. No existen valores de a para los cuales la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

La opción correcta es la (B): Hay que calcular las derivadas segundas e igualar los resultados, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(2cx+at)2c \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\cos(2cx+at)4c^2$. Por otro lado $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\sin(2cx+at)a \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = -\cos(2cx+at)a^2$. Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Leftrightarrow \cos(2cx+at)4c^2 = \cos(2cx+at)a^2c^2 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Entonces

A. Existen las derivadas parciales de f en todo punto del plano y ambas son continuas en $(0,0)$.

B. Existen las derivadas parciales de f en todo punto del plano y sólo una de ellas es continua en $(0,0)$.

C. Existen las derivadas parciales de f en todo punto del plano y ninguna es continua en $(0,0)$.

D. Las derivadas parciales de f no están definidas en todo el plano.

La opción correcta es la (C):

• Calculemos primero $\frac{\partial f}{\partial x}$: Para todo $(x,y) \neq (0,0)$ basta aplicar las reglas de derivación para calcular dicha derivada parcial.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• Calculemos ahora $\frac{\partial f}{\partial y}$: Para todo $(x,y) \neq (0,0)$, al igual que antes, basta aplicar las reglas de derivación para calcular dicha derivada parcial.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Para $(x,y)=(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiamos ahora la continuidad en el origen de ambas derivadas.
Si consideramos la recta $x=0$: $\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0\neq 1$.
Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.
Para la otra derivada parcial podemos considera la recta $x=y$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^4}{(2x^2)^2}=-\frac{1}{2}\neq 0.$$

Entonces $\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua en $(0,0)$.

7. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Entonces:

A. f es continua y diferenciable en $(0,0)$.
B. f es continua en $(0,0)$ pero no es diferenciable en $(0,0)$.
C. f es diferenciable en $(0,0)$ pero no es continua en $(0,0)$.
D. f no es diferencible ni continua en $(0,0)$.

<u>La opción correcta es la (A.)</u>:

• Continuidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0,\theta\in[0,2\pi)}\frac{e^{r^2}-1}{r^2}=\lim_{r\to 0,\theta\in[0,2\pi)}\frac{r^2}{r^2}=1=f(0,0).$$

• Diferencviabilidad en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{h^2}-1}{h^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{2he^{h^2}-2h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{h^2}-2}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{4he^{h^2}}{3}=0.$$

Por simetría podemos deducir que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
Para ver la diferenciabilidad tenemos que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{(x^2+y^2)^{1/2}}=\lim_{r\to 0,\theta\in[0,2\pi)}\frac{e^{r^2}-1-r^2}{r^3}=0.$$

8 El valor del límite

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{xe^y-\left(2+(x-2)+2y+2y^2+(x-2)y+(x-2)^2\right)}{(x-2)^2+y^2}$$

es:

A. 1.
B. -1.
C. 0.
D. No existe.

<u>La opción correcta es la (B):</u>

Llamemos $f(x,y)=xe^y$. Sus derivadas hasta orden 2 son:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y.$

Luego, el desarrollo de Taylor de f en un entorno de $(2,0)$ es:

$$f(x,y) = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)y + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0)(x-2)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0)(x-2)y + \frac{\partial^2 f}{\partial y}(2,0)y^2\right) + r_3(x-2,y) =$$

$$= 2 + (x-2) + 2y + \frac{1}{2}\left(2(x-2)y + 2y^2\right) + r_2(x-2,y).$$

Sustituyendo en el límite, tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xe^y - \left(2 + (x-2) + 2y + 2y^2 + (x-2)y + (x-2)^2\right)}{(x-2)^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y^2 - 2y^2 - (x-2)^2 + r_2}{(x-2)^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{-\left(y^2 + (x-2)^2\right) + r_2}{(x-2)^2 + y^2} = -1,$$

porque $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{r_2}{(x-2)^2 + y^2} = 0.$

9. Sea π el plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = x^3y + 2y^2 + e^{xy}$ en el punto $(0,2,f(0,2))$. Selecione la opción correcta:
   A. $(-\frac{1}{2}, 1) \in \pi$.
   B. $(-1,1,9) \in \pi$.
   C. $(-\frac{1}{2}, 1, 0) \in \pi$.
   D. $(-1,1,0) \in \pi$.

   La opción correcta es la (C):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4y + xe^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 8$$

   Por lo tanto la ecuación del plano tangente es

$$z - f(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2)$$

$$z - 9 = 2(x-0) + 8(y-2)$$

$$z = 2x + 8y - 7$$

10. Se considera la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ Entonces $\int\int_D xy\,dy\,dx$ es igual a
   A. $\frac{\pi}{4}$
   B. $\frac{1}{12}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{1}{12}$

La opción correcta es la (B):

Pasando a coordenadas polares $\iint\limits_D xy\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_{cos\theta}^1 rcos\theta rsen\theta rdrd\theta = \int_0^{\pi/2}\int_{cos\theta}^1 r^3 cos\theta sen\theta drd\theta = \frac{1}{12}$