matemática INICIAL

Práctico 3: Razonamiento lógico

IMERL

Ejercicio 1 (Conectivas "y" ($\wedge$), "o" ($\vee$)) *Mostrar que cada una de las propiedades siguientes se puede expresar en lenguaje matemático por un enunciado "P y Q" o "P o Q" (x e y son números reales):*

a) $(x-2)(x+3)=0$.
Solución: $(x-2)(x+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \;\; o \;\; x=-3$

b) $x^2-1=0$.
Solución: $x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \;\; o \;\; x=1$

c) $xy>0$.
Solución: $xy>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x>0 \;\; e \;\; y>0) \;\; o \;\; (x<0 \;\; e \;\; y<0)$

d) $(x-2)(x-3)\neq 0$.
Solución: $(x-2)(x-3)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq 2 \;\; y \;\; x\neq -3$

e) $x^2-1\neq 0$.
Solución: $x^2-1\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1 \;\; y \;\; x\neq 1$

f) $xy\leq 0$.
Solución: $xy\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x\leq 0 \;\; e \;\; y\geq 0) \;\; o \;\; (x\geq 0 \;\; e \;\; y\leq 0)$

Ejercicio 2 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$)) 1. *Dado un número real x cualquiera, nos interesamos en la afirmación "$x^2>4$".*
Determinar si cada una de las condiciones siguientes es suficiente para dicha afirmación:

$$x>100, \qquad x>10^6, \qquad x>1{,}9, \qquad x<-2, \qquad x<-2 \;\; o \;\; x>2,$$
$$x<-10, \qquad x<-2{,}1, \qquad x<-3 \;\; o \;\; x>3, \qquad x<0, \qquad x<-1.$$

Entre las que son suficientes, indicar cuáles son necesarias.
Solución:

- $x>100$ *es suficiente.*
- $x>10^6$ *es suficiente.*
- $x>1{,}9$ *no es suficiente.*
- $x<-2$ *es suficiente.*
- $x<-2$ *o* $x>2$ *es suficiente.*
- $x<-10$ *es suficiente.*
- $x<-2{,}1$ *es suficiente.*
- $x<-3$ *o* $x>3$ *es suficiente.*
- $x<0$ *no es suficiente.*
- $x<-1$ *no es suficiente.*

De las anteriores, sólo la condición $x<-2$ *o* $x>2$ *es necesaria.*

2. *Nos interesamos ahora en la afirmación "$x^2>10^3$".*
Dar seis condiciones suficientes para dicha afirmación, y una necesaria.
Solución:

- $x>1000$.
- $x>100$.

- $x < -200$.
- $x \in (50, 100)$.
- $x \in [-160, -150]$.
- $x > 10\sqrt{10}$ *o* $x < -10\sqrt{10}$. *Esta condición es, además, necesaria.*

Una condición necesaria pero no suficiente es, por ejemplo, $|x| > 5$.

Ejercicio 3 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$)) *En cada uno de los casos siguientes, reducir la condición suficiente dada para que sea necesaria:*

1. *Sea x un real positivo. Si $x > 4$ entonces $x^2 > 10$.*
   Solución:
   Sea x un real positivo. Se tiene que $x > \sqrt{10}$ si y solo si $x^2 > 10$.
   (Obsérvese que ser mayor que $\sqrt{10}$ es menos "exigente" que ser mayor que 4).

2. *Sean x e y reales no negativos. Si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x + y > 0$.*
   Solución:
   Sean x e y reales no negativos. Tenemos que $x > 0$ **o** *$y > 0$ si y solo si $x + y > 0$.*

Ejercicio 4 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$) *En cada uno de los casos siguientes, completar la condición necesaria dada para que sea suficiente:*

1. *Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario que sus diagonales sean perpendiculares.*
   Solución:
   Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario y suficiente que sus diagonales sean perpendiculares y se corten en el punto medio de ambas.

2. *Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario que su intersección sea vacía.*
   Solución:
   Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario y suficiente que su intersección sea vacía y que pertenezcan a un mismo plano.

3. *Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario que $ab > 0$ y que $bc > 0$.*
   Solución:
   Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario y suficente que $ab > 0$, que $bc > 0$ y que a sea positivo.

Ejercicio 5 (Cuantificadores ($\forall, \exists$)) *Para cada una de las proposiciones siguientes, indicar (en los puntos "...") el cuantificador que permite que dicha proposición sea verdadera:*

1. $\ldots x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1;$
   Solución:
   $\exists\ x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1.$

2. $\ldots x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$
   Solución:
   $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$
   (observar que si el cuantificador $\forall$ sirve, entonces también servirá el cuantificador $\exists$, por ejemplo, en este caso: $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$).

3. $\ldots a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0;$
   Solución:
   $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0.$

4. $\dots x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0$;
Solución:
$\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$

Ejercicio 6 (Negación) *Completar el cuadro siguiente:*

P	no P
$13=12$	$13 \neq 12$
$x \in \mathbb{N}$	$x \notin \mathbb{N}$
$x \neq 1$	$x = 1$
$x > 0$	$x \leq 0$
$x \leq 1$	$x > 1$

Ejercicio 7 (Negación) *Completar el cuadro siguiente:*

P	*P* (*v o f*)	*no P* (*v o f*)	*no P*
Todos los triángulos son rectángulos.	*F*	*V*	*Existe un triángulo que no es rectángulo*
Existe un real x tal que $x^2 < 0$.	*F*	*V*	*Todos los números reales x cumplen* $x^2 \geq 0$
Todos los cuadriláteros no se pueden inscribir en una cfa.	*F*	*V*	*Existe algún cuadrilátero que se puede inscribir en una cfa.*
Existen triángulos que tienen ángulos obtusos.	*V*	*F*	*Todos los triángulos no tienen ángulos obtusos*
Todos los números reales verifican $x^2 \geq 1$.	*F*	*V*	*Existe un número real x que verifica* $x^2 < 1$
Existe al menos un divisor de 12 que no es divisor de 18	*V*	*F*	*Todos los divisores de 12 son divisores de 18*
Toda función que no es par es impar	*F*	*V*	*Existe una función que no es par ni impar*
En todo triángulo el ortocentro es interior al triángulo	*F*	*V*	*Existe un triángulo en el que el ortocentro es exterior al triángulo.*

Entonces:

- *la negación de una frase que empieza por "existe..." es ... "todos los..."*
- *la negación de una frase que empieza por "todos los..." es ... "existe..."*

Ejercicio 8 (Negación) *Decir si cada afirmación es verdadera o falsa y negarla*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$ *F* $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 > x$ *V* $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq x$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 = x$ *V* $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \neq x$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = x$ *V* $\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 \neq x$

Ejercicio 9 (Contrarrecíproco) *Escribir el contrarrecíproco de cada una de los enunciados siguientes:*

1. *Si es el* 1^{ero} *de enero entonces el museo está cerrado.*
Solución: *Si el museo está abierto entonces no es el* 1^{ero} *de enero.*

2. *Un número entero que es múltiplo de 6 es también múltiplo de 3.*
   Solución: *Un número entero que no es múltiplo de 3 tampoco es múltiplo de 6.*

3. *Si un número es mayor que 7 entonces es mayor que 4.*
   Solución: *Si un número es menor o igual a 4, entonces es menor o igual a 7.*

4. *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ entonces $x + 4 > 0$.*
   Solución: *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x + 4 \leq 0$ entonces $x \leq 0$.*

5. *Si un triángulo ABC es rectángulo en A entonces $BC^2 = AC^2 + AB^2$.*
   Solución: *Si $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$ entonces el triángulo ABC no es rectángulo en A.*

Ejercicio 10 (Demostraciones) *Probar que las siguientes afirmaciones son falsas.*

1. *Un número siempre es inferior a su cuadrado.*
   Contraejemplo: *$a = \frac{1}{2}$, pues $a^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = a$.*

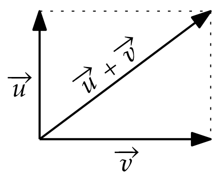
2. *Para todo par de reales a y b positivos se cumple que $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.*
   Contraejemplo: *$a = 3$ y $b = 4$. Tenemos que $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, mientras $a + b = 7$.*

3. *Para todo par de reales a y b no nulos, $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.*
   Contraejemplo: *$a = b = 1$. Tenemos que $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2}$ mientras $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$.*

4. *Si a, b, c y d son cuatro números reales que verifican $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a - c \leq b - d$.*
   Contraejemplo: *$a = b = c = 0$ y $d = 1$. Tenemos que $a \leq b$ y $c \leq d$, pero $a - c\ (= 0) > b - d\ (= -1)$.*

5. *Si un número x verifica $-2 \leq x \leq 4$ entonces $4 \leq x^2 \leq 16$.*
   Contraejemplo: *$x = -1$. Tenemos que $x^2 = 1 < 4$.*

6. *Para todo par de vectores $\vec{y}$ y $\vec{v}$ se cumple que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.*
   Contraejemplo: *En el plano, se consideran los vectores $\vec{u} = (0, 3)$ y $\vec{v} = (4, 0)$. Tenemos que $\vec{u} + \vec{v} = (4, 3)$, luego:*



$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{0^2 + 3^2} = 3 \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \\ \|\vec{u} + \vec{v}\| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \neq 7 \end{aligned}$$

Ejercicio 11 (Demostración enunciados falsos) *Considerar la siguiente afirmación:*

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \textit{para todo par de números reales positivos } a \textit{ y } b.$$

Para demostrar que es falsa, ¿debo probar que la igualdad nunca vale? o ¿debo hallar un par de números reales positivos a y b para los cuales no vale? Demostrar que dicha afirmación es falsa.
Solución: *para demostrar que la afirmación es falsa basta encontrar* ***un*** *par de reales positivos a y b que no verifiquen $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Por ejemplo $a = 3$ y $b = 2$, ya que $\sqrt{5} \neq \sqrt{2} + \sqrt{3}$.*

Ejercicio 12 (Demostración enunciados verdaderos) *Considerar la siguiente afirmación:*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \textit{para todo par de números reales positivos } a \textit{ y } b.$$

Para demostrar que es verdadera, ¿es suficiente con probar que la igualdad vale para un par de números reales positivos a y b? ¿es suficiente probar que vale para muchos pares de números reales positivos a y b? Demostrar que dicha afirmación es verdadera.

Solución:

Para demostrar que es verdadera, no alcanza probar que la igualdad vale para un par de núúmeros, ni para muchos números. Como hay infinitos pares de números reales positivos a y b no es posible demostrar la igualdad caso por caso.

Una demostración: llamemos $x = \sqrt{a}\sqrt{b}$. *Entonces* $x^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = ab$. *Por otra parte* x *es positivo, pues es el producto de dos reales positivos (*$\sqrt{a}$ *y* $\sqrt{b}$*). Entonces* $x > 0$ *y* $x^2 = ab$*, y por lo tanto* $x = \sqrt{ab}$*. Concluimos que* $\sqrt{ab} = x = \sqrt{a}\sqrt{b}$*, como queríamos probar.*

Un razonamiento que no es una demostración:

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} &\implies (\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 \\ &\implies (\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 \\ &\implies ab = ab \quad \checkmark \end{aligned}$$

¿Por qué no sirve como demostración? Todos los pasos son correctos. Sin embargo se utiliza lo que se quiere demostrar como premisa *y se obtiene una conclusión que es claramente cierta pero que no aporta nada. Para tener una demostración hay que utilizar como premisa afirmaciones que sean claramente ciertas o que se conozcan de otras propiedades, y obtener la afirmación como conclusión.*

Ejercicio 13 (Demostraciones con conjuntos)

Probar o refutar las siguientes afirmaciones:

1. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $B^c \subseteq A^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$
5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B^c$

1. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $B^c \subseteq A^c$.

   Solución: *Tomamos* $x \in B^c$*, como* $x \notin B$ *y* $A \subseteq B$*, tenemos que* $x \notin A$*. Hemos probado que* $B^c \subseteq A^c$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

   Solución: *Esta afirmación es falsa. Miremos por ejemplo los siguientes subconjuntos de* $\mathbb{N}$*:* $A = \{1, 2\}$*,* $B = \{1, 2, 3\}$*. Entonces* $(A \cap B)^c = A^c = \mathbb{N} \setminus A$*. Por otro lado* $A^c \cap B^c = B^c = \mathbb{N} \setminus B$*. Claramente estos dos conjuntos no son iguales.*

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución: $x \notin A \cap B$ *si y solo si* $x \notin A$ *o* $x \notin B$ *si y solo si* $x \in A^c$ *o* $x \in B^c$ *si y solo si* $x \in A^c \cup B^c$.

4. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución: *Esta afirmación es falsa. Miremos el mismo ejemplo de subconjuntos de números naturales que en 2:* $A = \{1, 2\}$*,* $B = \{1, 2, 3\}$*. Entonces* $(A \cup B)^c = B^c = \mathbb{N} \setminus B$*. Por la parte 1,* $B^c \subseteq A^c$ *y por lo tanto* $A^c \cup B^c = A^c = \mathbb{N} \setminus A$.

5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   Solución: $x \notin A \cup B$ *si y solo si* $x \notin A$ *y* $x \notin B$ *si y solo si* $x \in A^c \cap B^c$.

6. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución: *Esta afirmación es falsa. Consideremos* $A = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ *y* $B = \{2\} \subseteq \mathbb{N}$*. Como* $B \subseteq A$*,* $A^c \subseteq B^c$*. Por lo tanto* $A^c \cup B^c = B^c = \mathbb{N} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{N} \setminus \{2\}$*. Por otro lado* $(A \setminus B)^c = \{1, 3\}^c = \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$.

Ejercicio 14 (Demostraciones con conjuntos)

Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   Solución: *Verdadera*

   $(\subseteq)$ $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$
   $(\supseteq)$ $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in A \cup B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   Solución: *Verdadera*
   $(\subseteq)$ *Si* $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ *y* $x \in B \cap C$, *o sea,* $x \in A$ *y* $(x \in B$ *y* $x \in C)$. *En definitiva* $x \in A, x \in B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$.
   $(\supseteq)$ *Si* $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in A, x \in B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in A$ *y* $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   Solución: *Verdadera*
   Observemos primero que por definición de unión, dado un conjunto D, *si* $x \in D \Rightarrow x \in D \cup F$ *para cualquier conjunto* F.
   $(\subseteq)$ *Si* $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B \cap C$.
   Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ *y* $x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Si $x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ *y* $x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   $(\supseteq)$ *Si* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$ *y* $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A$ *o* $x \in B)$ *y* $(x \in A$ *o* $x \in C)$.
   Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.
   Si $x \notin A \Rightarrow x \in B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Solución: *Verdadera*
   La demostración es similar a la anterior

Ejercicio 15 (Demostraciones por aburdo)

1. *Probar que* $\sqrt{2}$ *es irracional.*
2. *Probar que hay infinitos números primos.*
3. *Si* n *no es un cuadrado perfecto entonces* $\sqrt{n}$ *es irracional.*