Programación Lineal y Programación Lineal Entera Mixta

Pedro Piñeyro
Departamento de Investigación Operativa
Instituto de Computación (InCo)

INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA DE PRODUCCIÓN

2024

Contenido

- Introducción a los problemas y características generales de los problemas de Programación Lineal (LP).
- Modelado y resolución de un problema LP.
- Introducción a los problemas y características generales de los problemas de Programación Lineal Entera Mixta (MILP).
- Revisión de algunos problemas clásicos de optimización combinatoria.

Programación Lineal (LP)

- Uno de los modelos de Programación Matemática más estudiados y extendidos (LP por su nombre en inglés).
- **La función objetivo y las restricciones son expresiones matemáticas lineales**.
- **Las variables se asumen continuas (valores con decimales)**.
- El uso del término "Programación " en LP proviene de planificar actividades para optimizar el uso de los recursos.

LP: Ejemplos de aplicación

- Planificación de la producción
- Mezcla de productos
- Balanceo de linea de montaje
- Planificación financiera
- Gestión de personal
- Problemas de transporte y distribución
- Planificación Forestal
- Producción Agropecuaria
- Programación de vuelos aéreos

LP: Perspectiva histórica

- Sus orígenes se remontan al estudio de sistemas de inecuaciones lineales a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX realizados por Joseph Fourier (1768 - 1830).
- **Leonid Kantorovich** (1912 - 1986), es señalado como el primero en aplicar LP para la optimización del uso de recursos alrededor de 1940. Recibe el Premio Nobel en Economía en 1975 (compartido con T. Koopmans) por sus contribuciones a la teoría de optimización.

LP: Perspectiva histórica (cont.)

- **George Dantzig** (1914 - 2005), desarrolla el Método Simplex para la resolución de problemas de LP alrededor de 1947 y los fundamentos teóricos de LP junto con **John von Neumann**. Reconocido como el "Padre" de la LP.
- **Narendra Karmarkar** (1956 -), desarrolla un Método de Punto Interior eficiente para resolver problemas LP de gran tamaño, en los años 1983/1984, trabajando en IBM y AT&T Bell Laboratories de EEUU.

LP: Características

- Asignación de recursos limitados a actividades.
- Costos proporcionales a las cantidades.
- Determinismo: todos los datos se asumen conocidos.
- Las variables de decisión pueden tomar valores fraccionales.
- Para su resolución se suele exigir la no negatividad de las variables (sin perdida de generalidad).
- El tamaño del modelo (cantidad de variables y restricciones) afectan los tiempos de resolución.

LP: Formulación expandida

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Minimize} & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \cdots & + & c_n x_n & = & z \\
\text{Subject to} & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & \leq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & \leq & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & \ldots, & & x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

LP: Formulación algebraica

$$\begin{array}{llll} \text{Minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & = & z \\ \text{Subject to} & \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j & \leq & \mathbf{b} \\ & x_j & \geq & 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

LP: Formulación compacta

$$\begin{array}{lrcl} \text{Minimize} & \mathbf{c^t x} & = & z \\ \text{Subject to} & \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

- La f.obj. puede ser de Min o Max, con Min f = – Max – f.
- La restricciones pueden ser de =, ≤ ó ≥. Se puede ir de una a otra formulación, sumando o restando **variables de holgura**.
- La formulación con Min, "=" y lado derecho $b \geq 0$, se conoce como **Formulación Estándar de LP**.

Ejemplo de LP: Planteo

- Un sistema de producción de dos productos y dos máquinas.
- Para la producción del producto $\boldsymbol{x}$ se requieren 2 horas de la máquina $\boldsymbol{A}$ y 3 horas de la máquina $\boldsymbol{B}$.
- Para la producción del producto $\boldsymbol{y}$ se requieren 3 horas de la máquina $\boldsymbol{A}$ y 2 horas de la máquina $\boldsymbol{B}$.
- La máquina $\boldsymbol{A}$ tiene una disponibilidad de 50 horas a la semana.
- La máquina $\boldsymbol{B}$ tiene una disponibilidad de 38 horas a la semana.
- El precio de venta del producto $\boldsymbol{x}$ es \$65.
- El precio de venta del producto $\boldsymbol{y}$ es \$70.
- Objetivo: Maximizar las ganancias por semana.

Ejemplo LP: Formulación

$$\text{Max } 65x + 70y$$

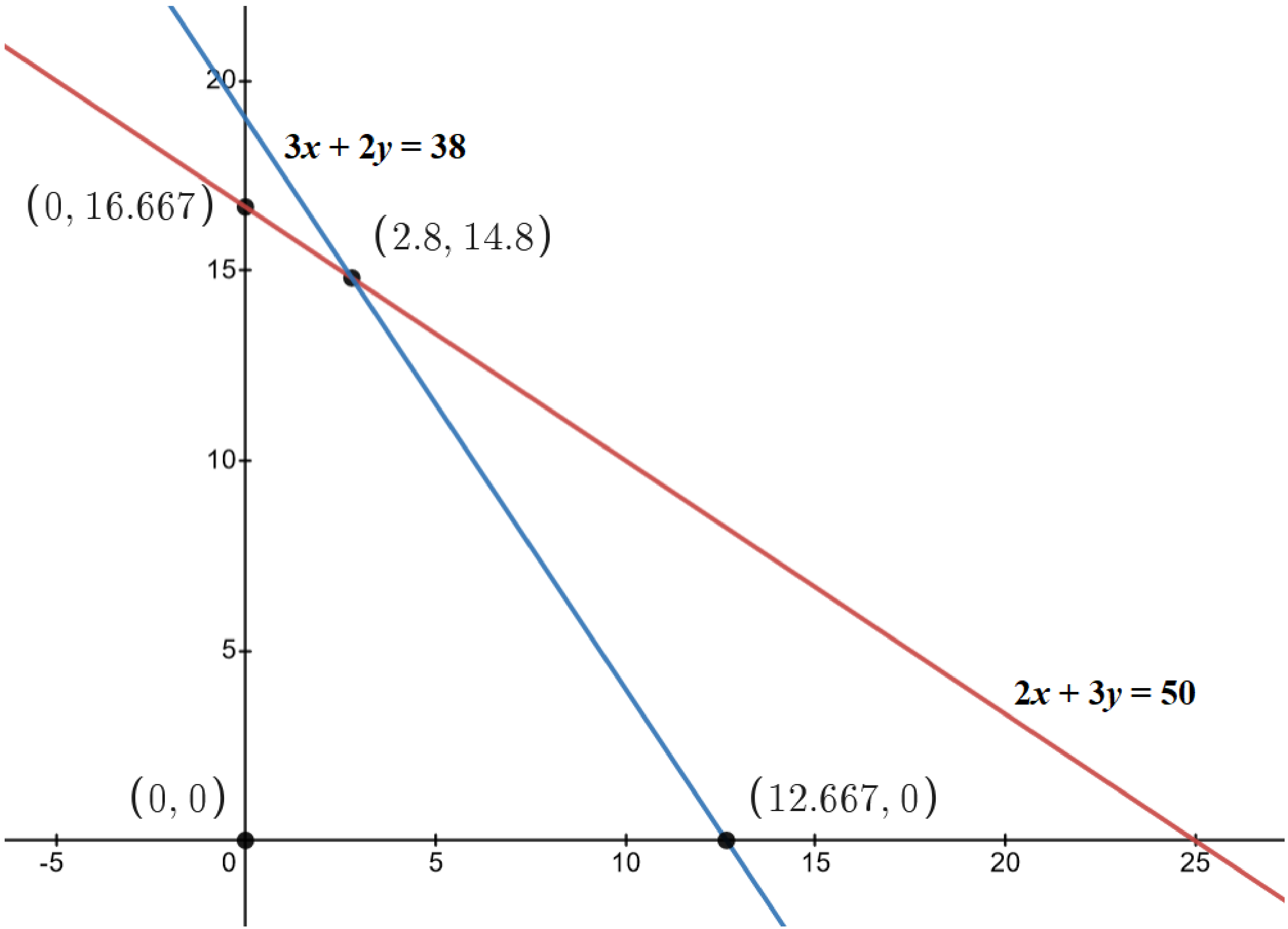
sujeto a:

$$2x + 3y \leq 50 \quad (\text{cap. máq. } A)$$

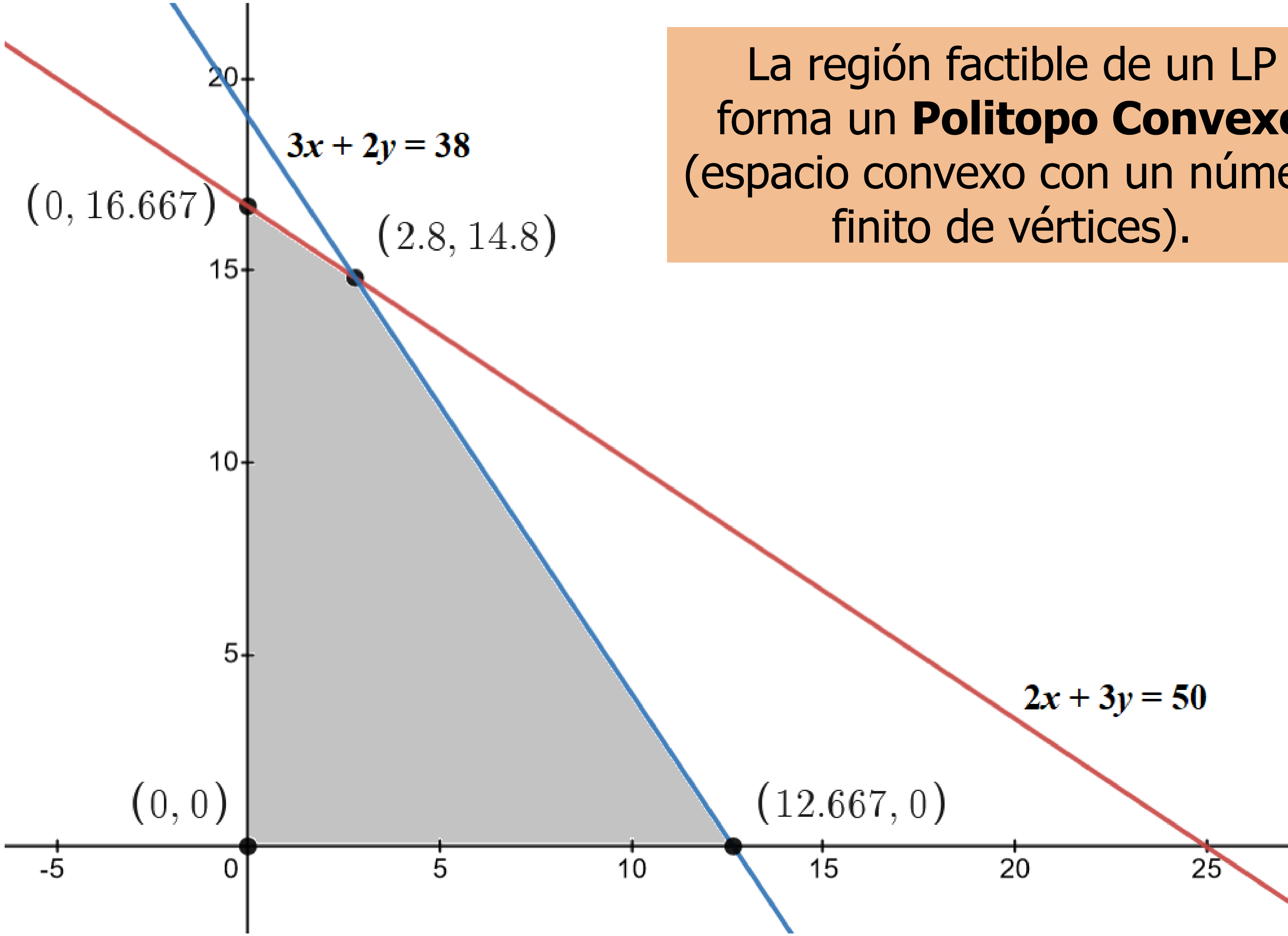
$$3x + 2y \leq 38 \quad (\text{cap. máq. } B)$$

$$x, y \geq 0$$

Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico

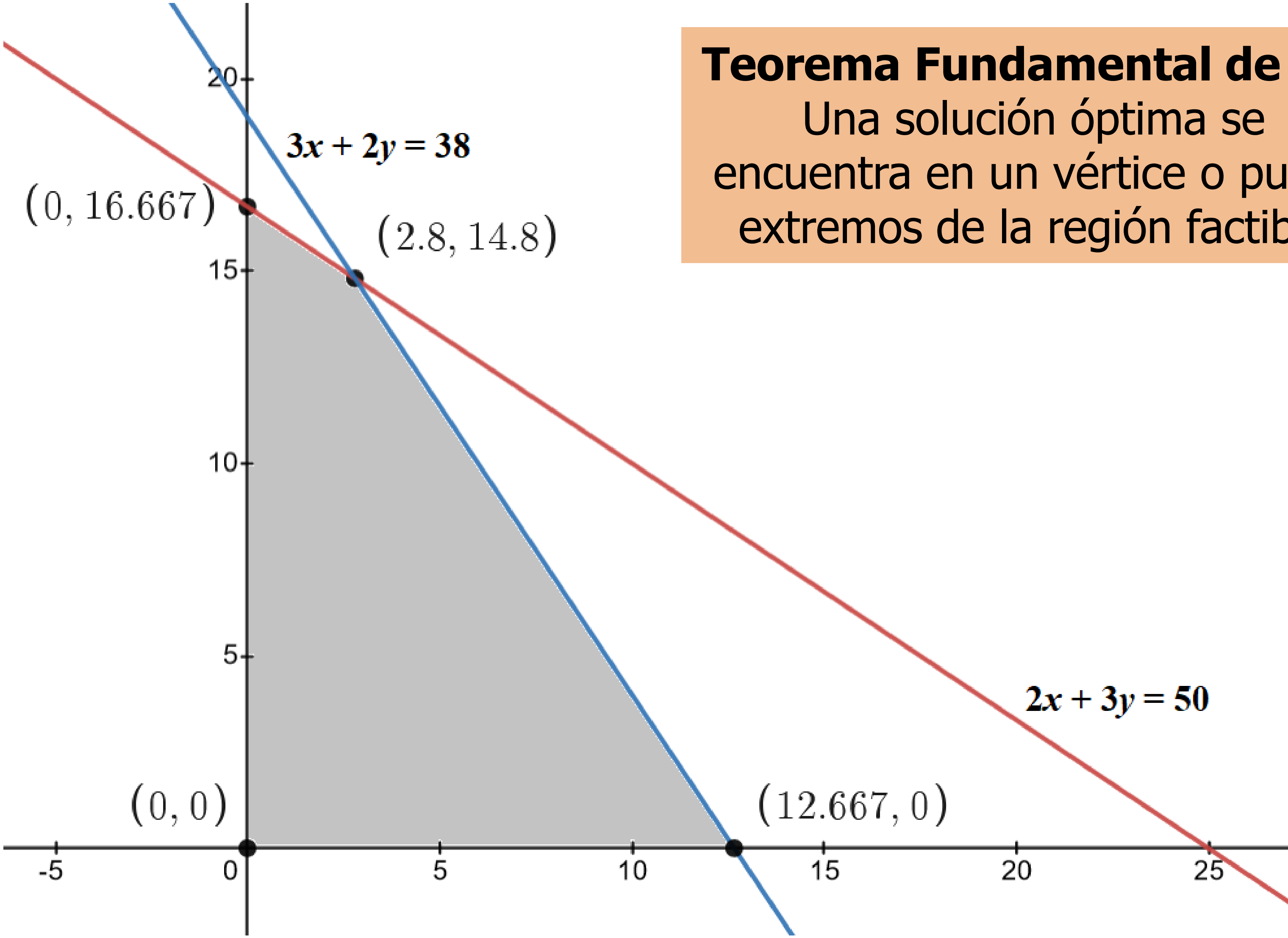


Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico



La región factible de un LP forma un **Politopo Convexo** (espacio convexo con un número finito de vértices).

Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico



Teorema Fundamental de LP: Una solución óptima se encuentra en un vértice o punto extremos de la región factible

Ejemplo LP: Resolución Método Simplex

- Requiere que el problema de LP esté formulado en la **forma estándar**.
- Parte de un vértice de la región factible (**solución básica**) y se va moviendo a vértices adyacentes, de a uno a la vez, y no empeorando el valor objetivo.
- Termina cuando se cumpla la **condición de optimalidad** (el vértice actual es la solución óptima) o no exista solución óptima (problema no acotado).

Ejemplo LP: Resolución Método Simplex

$$\text{Min} - 65x - 70y$$

sujeto a:

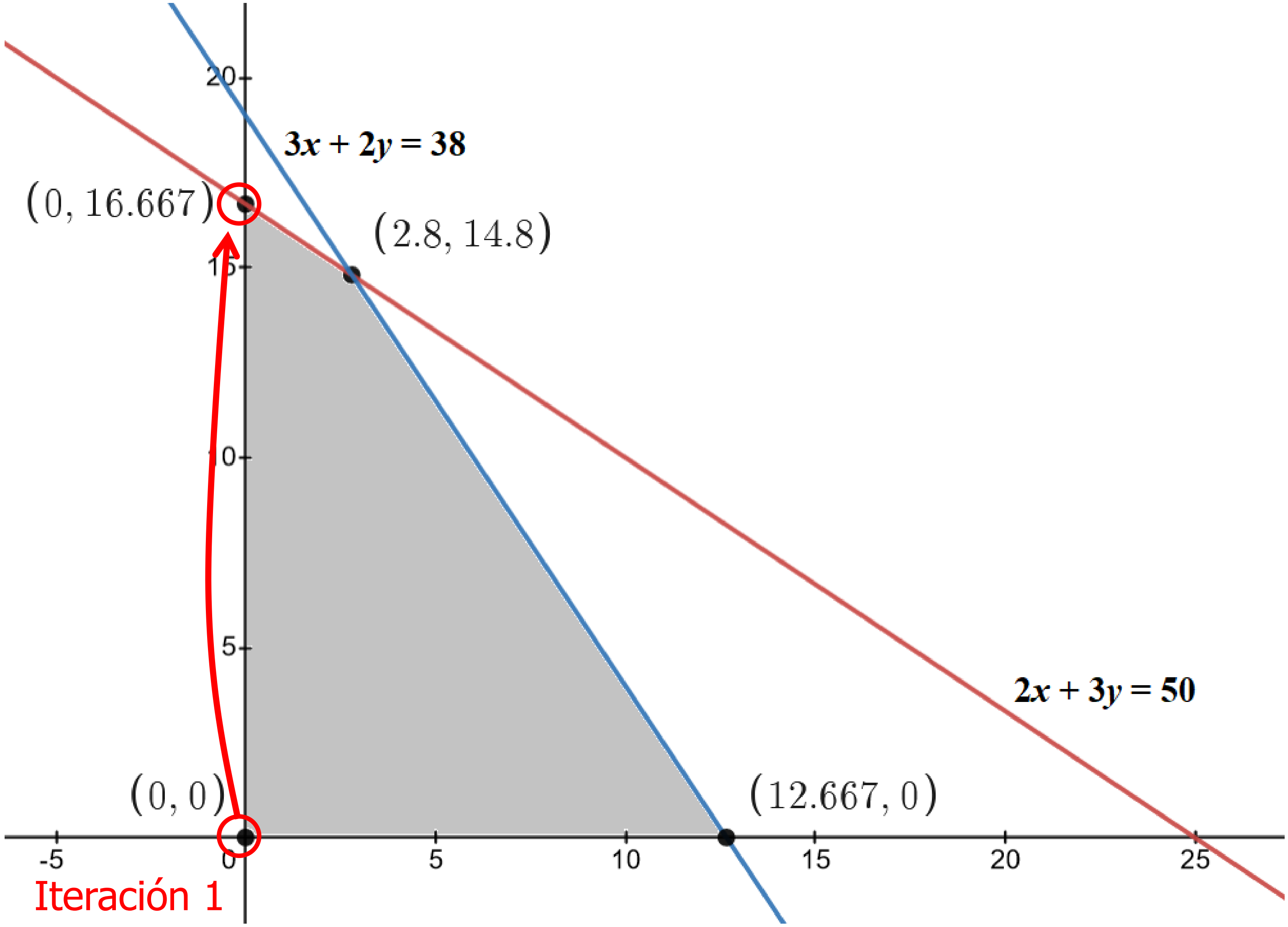
$$2x + 3y + \boldsymbol{s_1} \qquad = 50$$

$$3x + 2y \qquad + \boldsymbol{s_2} = 38$$

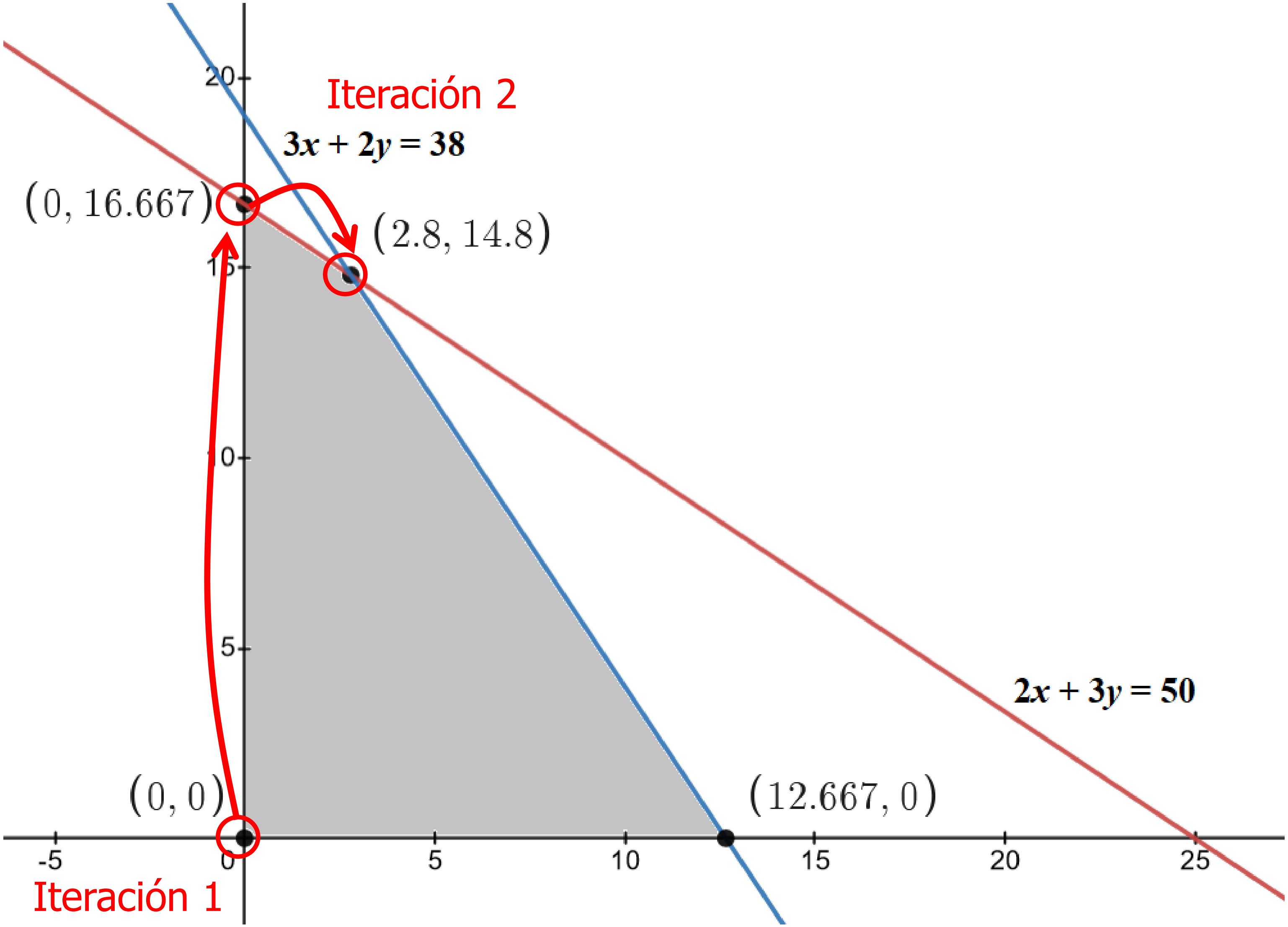
$$x, y, s_1, s_2 \geq 0$$

- LP equivalente al anterior con variables de holgura $\boldsymbol{s_1}$ y $\boldsymbol{s_2}$.

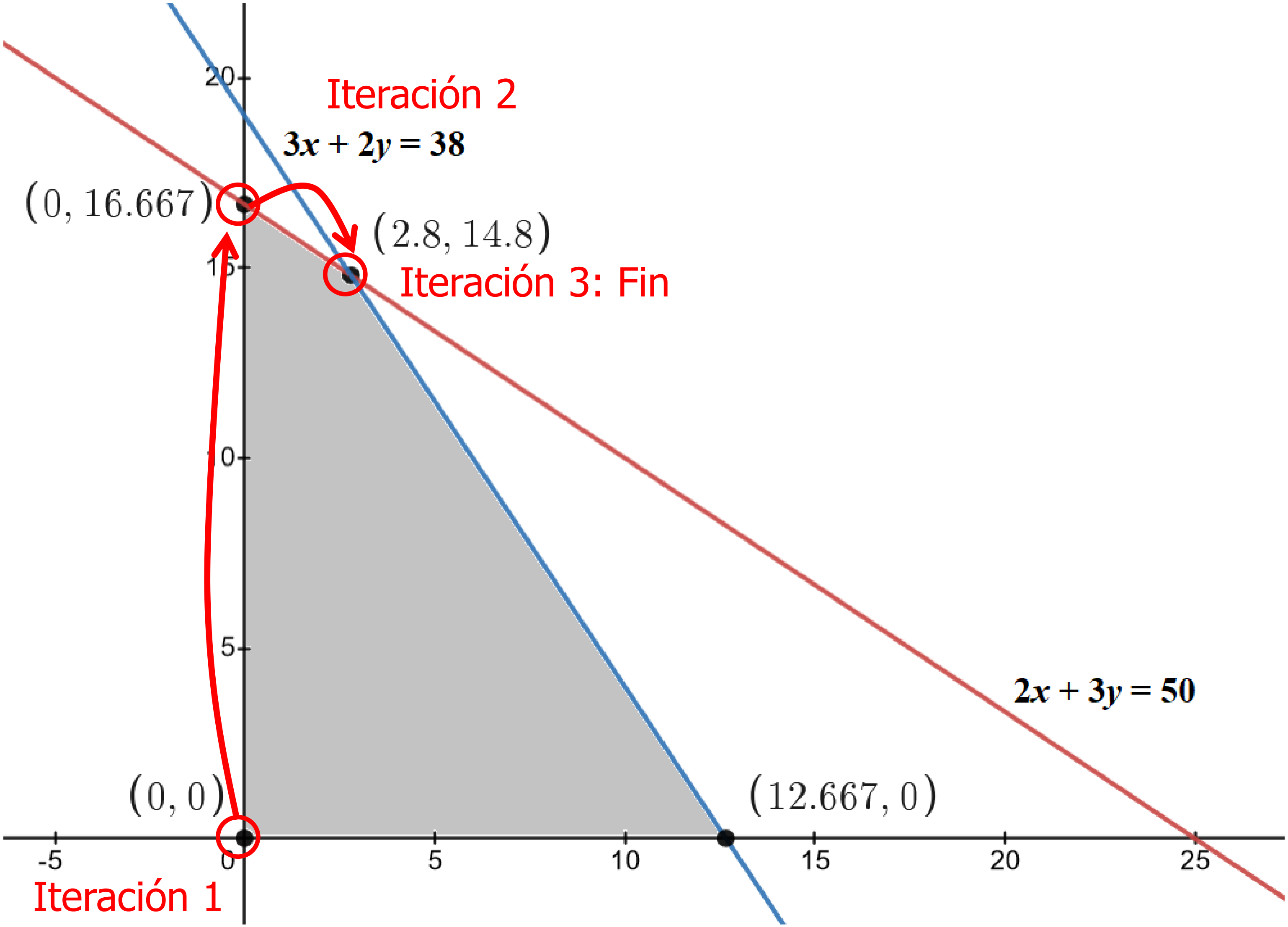
Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



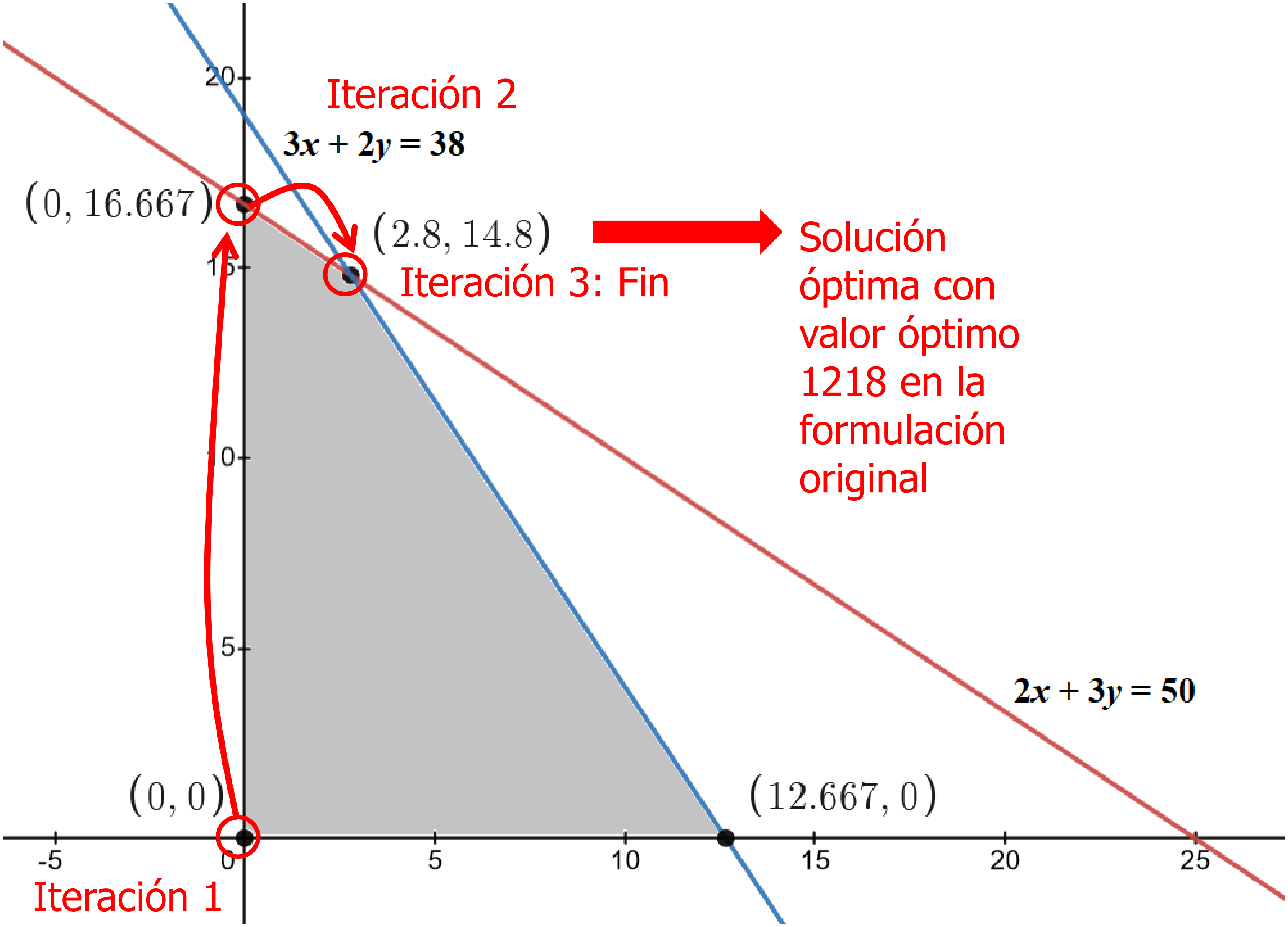
Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



Programación Lineal Entera Mixta (MILP)

- Extensión de los modelos LP, donde **se requiere que al menos una de las variables tome valores enteros**.
- Cuando se exige que todas las variables tomen valores enteros, se denominan problemas de Programación Entera (IP).
- Un caso particular (e importante) es el caso de variables binarias, es decir, cuando toman valores en el conjunto {0,1}.
- Se pierde la propiedad de convexidad de LP, por lo tanto **los modelos MILP son en general más difíciles de resolver que los de LP**.

MILP: Ejemplos de aplicación

- Planificación de la producción
- Problemas de transporte y distribución
- Problemas de instalación
- Problemas de secuenciamiento de tareas
- Problemas con costos de configuración
- Problemas de cubrimiento
- Problemas de ruteo de vehículos
- Problemas de diseño de redes

MILP: sobre las soluciones

TotalDiasProduccion = 1675.86

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0	0	4.2324	7.7676	4	8
2	9	9	0	3	3	0	15
3	9	3	6	0	3	9	9
4	13.6585	0	0	6.82927	6.82927	6.82927	6.82927
5	0	20.4878	6.82927	0	6.82927	0	34.1463
6	6.82927	20.4878	0	0	13.6585	0	34.1463
7	0	0	0	0	35.2	0	12
8	0	0	0	14	0	0	0
9	0	0	0	0	0	10	0
10	0	10	0	0	0	12	0
11	0	10	0	0	0	12	0
12	0	0	10	0	0	0	0
13	8.57143	25.7143	8.57143	8.57143	25.7143	25.7143	25.7143
14	8.57143	42.8571	8.57143	8.57143	8.57143	42.8571	0
15	0	0	35	0	0	25	0
16	15	15	5	5	5	20	0
17	3.5	3	0	4.5	0	0	8
18	6.5	0	4	2	0	3	0
19	0	0	3	0	2	4	5

Variables Continuas

Variables Enteras

TotalDiasProduccion = 1681

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	2	1	1	12	1	0	11	4	0	3	1
2	11	1	9	1	2	0	15	7	1	1	9	9
3	12	0	9	3	0	0	15	1	0	8	9	9
4	5	13	15	0	7	6	14	20	35	0	14	22
5	7	0	0	20	0	8	0	7	52	0	14	43
6	29	0	10	5	16	0	29	0	0	43	0	19
7	0	47	0	0	0	17	0	0	0	42	0	0
8	0	0	0	12	0	0	0	26	0	0	12	0
9	0	0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	10
10	10	0	0	0	12	0	0	0	12	0	0	0
11	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
12	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
13	17	9	0	52	0	31	2	17	25	27	0	26
14	25	0	2	35	41	0	24	27	2	0	24	26
15	15	0	2	13	18	12	5	25	0	0	15	15
16	10	0	35	0	0	20	0	25	0	0	15	15
17	8	0	3	0	0	2	7	0	6	0	7	3
18	8	0	3	0	3	2	3	0	7	0	5	5
19	4	2	4	0	3	0	5	0	7	0	11	0

MILP: sobre las soluciones

TotalDiasProduccion = 1675.86

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0	0	4.2324	7.7676	4	8
2	9	9	0	3	3	0	15
3	9	3	6	0	3	9	9
4	13.6585	0	0	6.82927	6.82927	6.82927	6.82927
5	0	20.4878	6.82927	0	6.82927	0	34.1463
6	6.82927	20.4878	0	0	13.6585	0	34.1463
7	0	0	0	0	35.2	0	12
8	0	0	0	14	0	0	0
9	0	0	0	0	0	10	0
10	0	10	0	0	0	12	0
11	0	10	0	0	0	12	0
12	0	0	10	0	0	0	0
13	8.57143	25.7143	8.57143	8.57143	25.7143	25.7143	25.7143
14	8.57143	42.8571	8.57143	8.57143	8.57143	42.8571	0
15	0	0	35	0	0	25	0
16	15	15	5	5	5	20	0
17	3.5	3	0	4.5	0	0	8
18	6.5	0	4	2	0	3	0
19	0	0	3	0	2	4	5

Variables Continuas

Variables Enteras

TotalDiasProduccion = 1681

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	2	1	1	12	1	0	11	4	0	3	1
2	11	1	9	1	2	0	15	7	1	1	9	9
3	12	0	9	3	0	0	15	1	0	8	9	9
4	5	13	15	0	7	6	14	20	35	0	14	22
5	7	0	0	20	0	8	0	7	52	0	14	43
6	29	0	10	5	16	0	29	0	0	43	0	19
7	0	47	0	0	0	17	0	0	0	42	0	0
8	0	0	0	12	0	0	0	26	0	0	12	0
9	0	0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	10
10	10	0	0	0	12	0	0	0	12	0	0	0
11	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
12	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
13	17	9	0	52	0	31	2	17	25	27	0	26
14	25	0	2	35	41	0	24	27	2	0	24	26
15	15	0	2	13	18	12	5	25	0	0	15	15
16	10	0	35	0	0	20	0	25	0	0	15	15
17	8	0	3	0	0	2	7	0	6	0	7	3
18	8	0	3	0	3	2	3	0	7	0	5	5
19	4	2	4	0	3	0	5	0	7	0	11	0

MILP: sobre las soluciones

TotalDiasProduccion = 1675.86

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0	0	4.2324	7.7676	4	8
2	9	9	0	3	3	0	15
3	9	3	6	0	3	9	9
4	13.6585	0	0	6.82927	6.82927	6.82927	6.82927
5	0	20.4878	6.82927	0	6.82927	0	34.1463
6	6.82927	20.4878	0	0	13.6585	0	34.1463
7	0	0	0	0	35.2	0	12
8	0	0	0	14	0	0	0
9	0	0	0	0	0	10	0
10	0	10	0	0	0	12	0
11	0	10	0	0	0	12	0
12	0	0	10	0	0	0	0
13	8.57143	25.7143	8.57143	8.57143	[illegible]	25.7143	25.7143
14	8.57143	42.8571	8.57143	8.57143	8.57143	42.8571	0
15	0	0	35	0	0	25	0
16	15	15	5	5	5	20	0
17	3.5	3	0	4.5	0	0	8
18	6.5	0	4	2	0	3	0
19	0	0	3	0	2	4	5

Variables Continuas

Variables Enteras

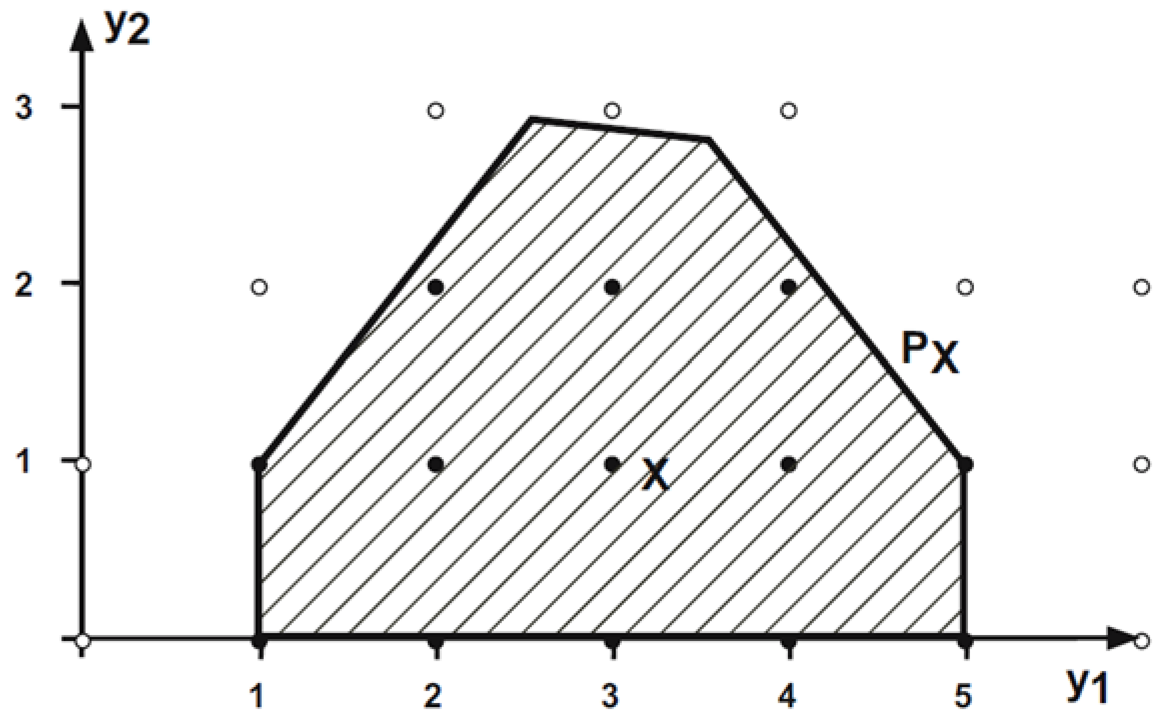
TotalDiasProduccion = 1681

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	2	1	1	12	1	0	11	4	0	3	1
2	11	1	9	1	2	0	15	7	1	1	9	9
3	12	0	9	3	0	0	15	1	0	8	9	9
4	5	13	15	0	7	6	14	20	35	0	14	22
5	7	0	0	20	0	8	0	7	52	0	14	43
6	29	0	10	5	16	0	29	0	0	43	0	19
7	0	47	0	0	0	17	0	0	0	42	0	0
8	0	0	0	12	0	0	0	26	0	0	12	0
9	0	0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	10
10	10	0	0	0	12	0	0	0	12	0	0	0
11	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
12	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
13	17	9	0	52	[illegible]	31	2	17	25	27	0	26
14	25	0	2	35	41	0	24	27	2	0	24	26
15	15	0	2	13	18	12	5	25	0	0	15	15
16	10	0	35	0	0	20	0	25	0	0	15	15
17	8	0	3	0	0	2	7	0	6	0	7	3
18	8	0	3	0	3	2	3	0	7	0	5	5
19	4	2	4	0	3	0	5	0	7	0	11	0

MILP: Envoltura Convexa

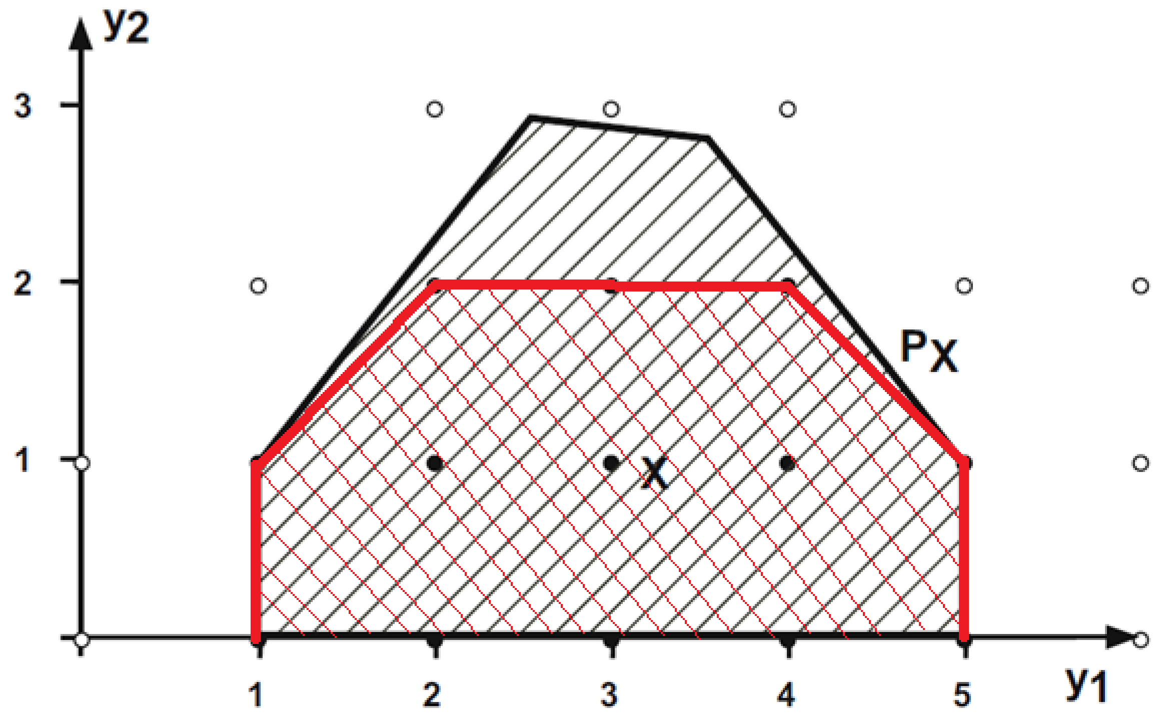
- Conjunto convexo mínimo, que incluye todos las soluciones factibles.



Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

MILP: Envoltura Convexa

- Conjunto convexo mínimo, que incluye todos las soluciones factibles.



Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

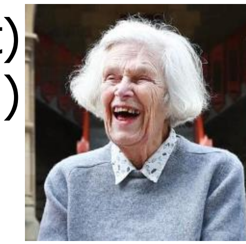
MILP: Branch-and-Bound

- Estrategia de ramificación y acotamiento, que genera un árbol de búsqueda.
- En cada nodo se resuelve un **problema relajado** de LP, eliminando las restricciones de integralidad sobre las variables.
- Si la solución del problema de un nodo no es entera en alguna componente, se generan nuevos subproblemas (y nodos), con restricciones para eliminar valores fraccionales de las variables.
- Se usan reglas de vaciamiento o poda, para finalizar la búsqueda en un camino del árbol.

MILP: Branch-and-Bound

Ailsa H. Land
(1927 – 2021)

Alison G. Doig (now Harcourt)
(1929 -)



ECONOMETRICA

VOLUME 28 July, 1960 NUMBER 3

AN AUTOMATIC METHOD OF SOLVING DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS

BY A. H. LAND AND A. G. DOIG

In the classical linear programming problem the behaviour of continuous, nonnegative variables subject to a system of linear inequalities is investigated. One possible generalization of this problem is to relax the continuity condition on the variables. This paper presents a simple numerical algorithm for the solution of programming problems in which some or all of the variables can take only discrete values. The algorithm requires no special techniques beyond those used in ordinary linear programming, and lends itself to automatic computing. Its use is illustrated on two numerical examples.

"Alison Harcourt y Ailsa Land, dos matemáticas unidas por la programación lineal" (ver)

Ejemplo MILP: Formulación

$$\text{Max } 65x + 70y$$

sujeto a:

$$2x + 3y \leq 50 \quad \text{(cap. máq. } A\text{)}$$

$$3x + 2y \leq 38 \quad \text{(cap. máq. } B\text{)}$$

$$x, y \geq 0, \text{ enteros}$$

	x^*	y^*	z^*
LP	2.8	14.8	1218
MILP	?	?	?

Ejemplo MILP: Formulación

$$\text{Max } 65x + 70y$$

sujeto a:

$$2x + 3y \leq 50 \quad \text{(cap. máq. } A\text{)}$$

$$3x + 2y \leq 38 \quad \text{(cap. máq. } B\text{)}$$

$$x, y \geq 0, \text{ enteros}$$

	x^*	y^*	z^*
LP	2.8	14.8	1218
MILP	1	16	1185

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

- Planificación de la producción de tiempo discreto (períodos) con demanda dinámica y costos de configuración.
- Satisfacer la demanda diaria de un producto a tiempo (sin retrasos), durante un mes (22 días).
- Costos unitarios de producción y almacenamiento.
- Costos de configuración (set-up) por cada vez que se produce una cantidad positiva.
- Inventario inicial cero (s.p.d.g.).

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

Costo set-up = $200
Costo prod. = $2
Costo inv. = $1

Lot Fix Size (LFS) = 500					
Día	**Demanda**	**Prod.**	**Set-up**	**Inv.**	**Costo**
1	53	500	1	447	1647
2	115		0	332	332
3	95		0	237	237
4	114		0	123	123
5	80		0	43	43
6	103	500	1	440	1640
7	131		0	309	309
8	107		0	202	202
9	81		0	121	121
10	59		0	62	62
11	123	500	1	439	1639
12	100		0	339	339
13	109		0	230	230
14	123		0	107	107
15	77		0	30	30
16	97	500	1	433	1633
17	101		0	332	332
18	131		0	201	201
19	92		0	109	109
20	116	500	1	493	1693
21	123		0	370	370
22	68		0	302	302
				Costo $	**11701**

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

Costo set-up = $200
Costo prod. = $2
Costo inv. = $1

Lot For Lote (L4L)					
Día	**Demanda**	**Prod.**	**Set-up**	**Inv.**	**Costo**
1	53	53	1	0	306
2	115	115	1	0	430
3	95	95	1	0	390
4	114	114	1	0	428
5	80	80	1	0	360
6	103	103	1	0	406
7	131	131	1	0	462
8	107	107	1	0	414
9	81	81	1	0	362
10	59	59	1	0	318
11	123	123	1	0	446
12	100	100	1	0	400
13	109	109	1	0	418
14	123	123	1	0	446
15	77	77	1	0	354
16	97	97	1	0	394
17	101	101	1	0	402
18	131	131	1	0	462
19	92	92	1	0	384
20	116	116	1	0	432
21	123	123	1	0	446
22	68	68	1	0	336
				Costo $	**8796**

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

Costo set-up = $200
Costo prod. = $2
Costo inv. = $1

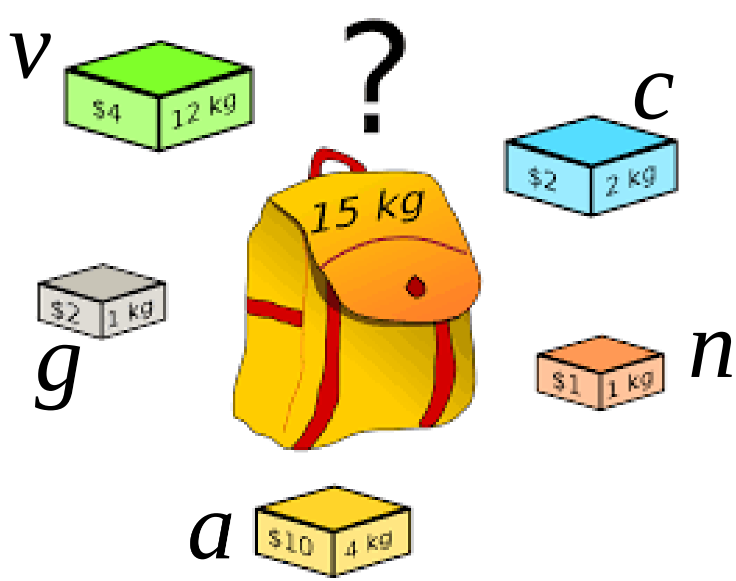
MILP					
Día	**Demanda**	**Prod.**	**Set-up**	**Inv.**	**Costo**
1	53	168	1	115	651
2	115	0	0	0	0
3	95	209	1	114	732
4	114	0	0	0	0
5	80	183	1	103	669
6	103	0	0	0	0
7	131	238	1	107	783
8	107	0	0	0	0
9	81	140	1	59	539
10	59	0	0	0	0
11	123	223	1	100	746
12	100	0	0	0	0
13	109	109	1	0	418
14	123	200	1	77	677
15	77	0	0	0	0
16	97	198	1	101	697
17	101	0	0	0	0
18	131	223	1	92	738
19	92	0	0	0	0
20	116	307	1	191	1005
21	123	0	0	68	68
22	68	0	0	0	0
				Costo $	**7723**

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

- La formulación MILP tiene variables binarias para indicar si en un período determinado se realiza o no producción.
- Se puede formular como un problema de Flujos en Red (asegura los valores enteros de las cantidades a producir).
- Wagner y Whitin en 1958, proponen un algoritmo eficiente para la resolución del ELSP, basado en la **propiedad de inventario cero** (ZIP).

Knapsack Problem

- Cuántos objetos introducir a una mochila con capacidad finita, para maximizar el valor total.
- Cada objeto tiene un valor y un peso.
- Wikipedia:



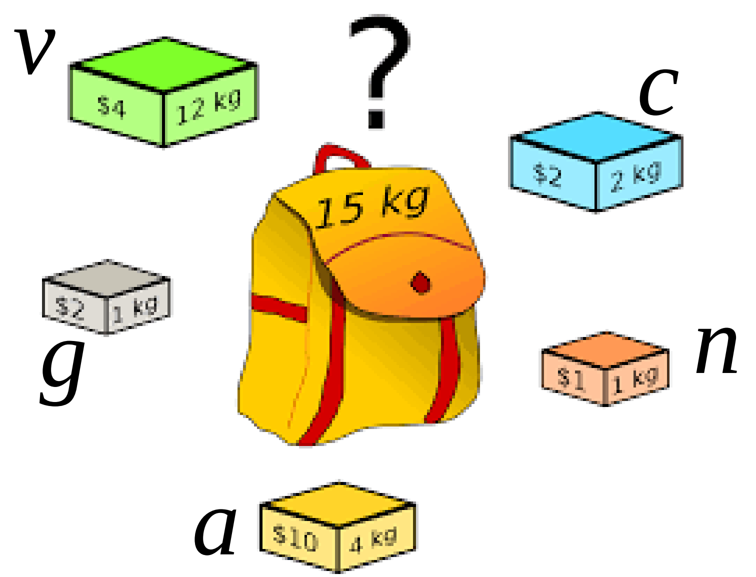
Knapsack Problem

Max *mochila* = $4v + 2g + 2c + 1n + 10a$

sujeto a:

$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$

$v, g, c, n, a \geq 0$



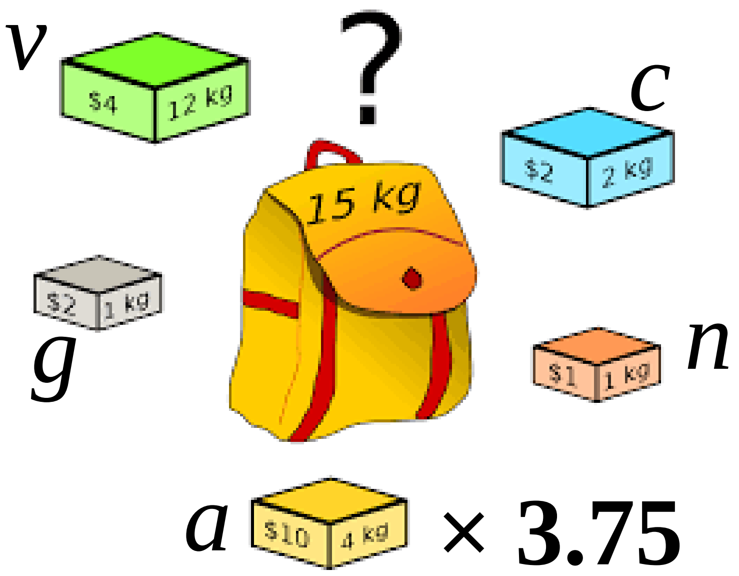
Knapsack Problem

Max $mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$

sujeto a:

$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$

$v, g, c, n, a \geq 0$



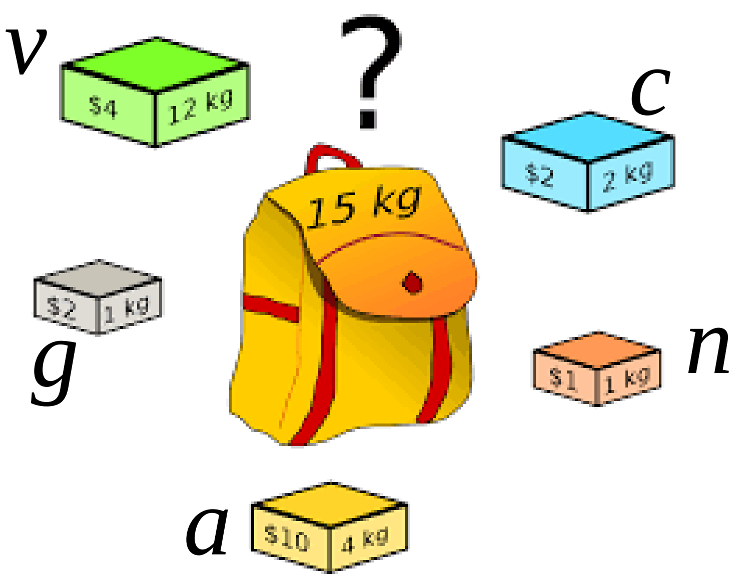
Knapsack Problem

Max $mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$

sujeto a:

$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$

$v, g, c, n, a \geq 0$, enteros



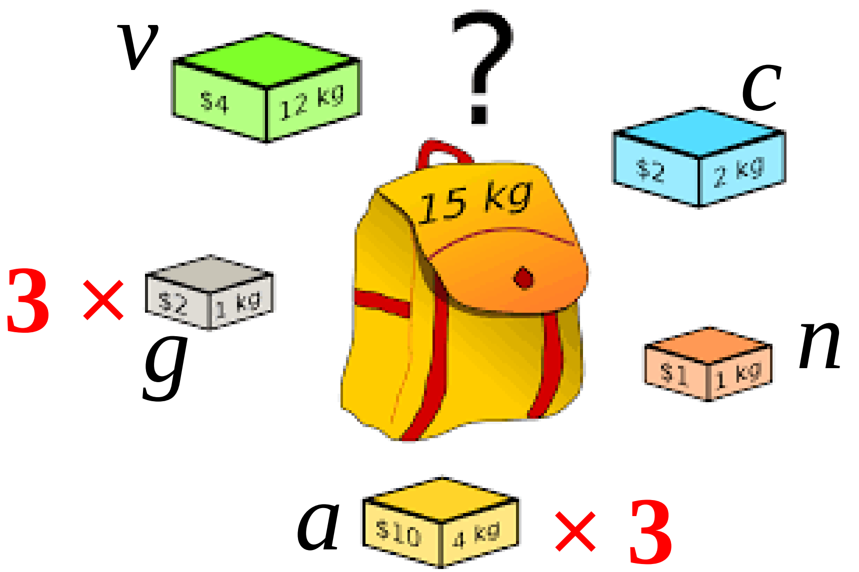
Knapsack Problem

Max $mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$

sujeto a:

$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$

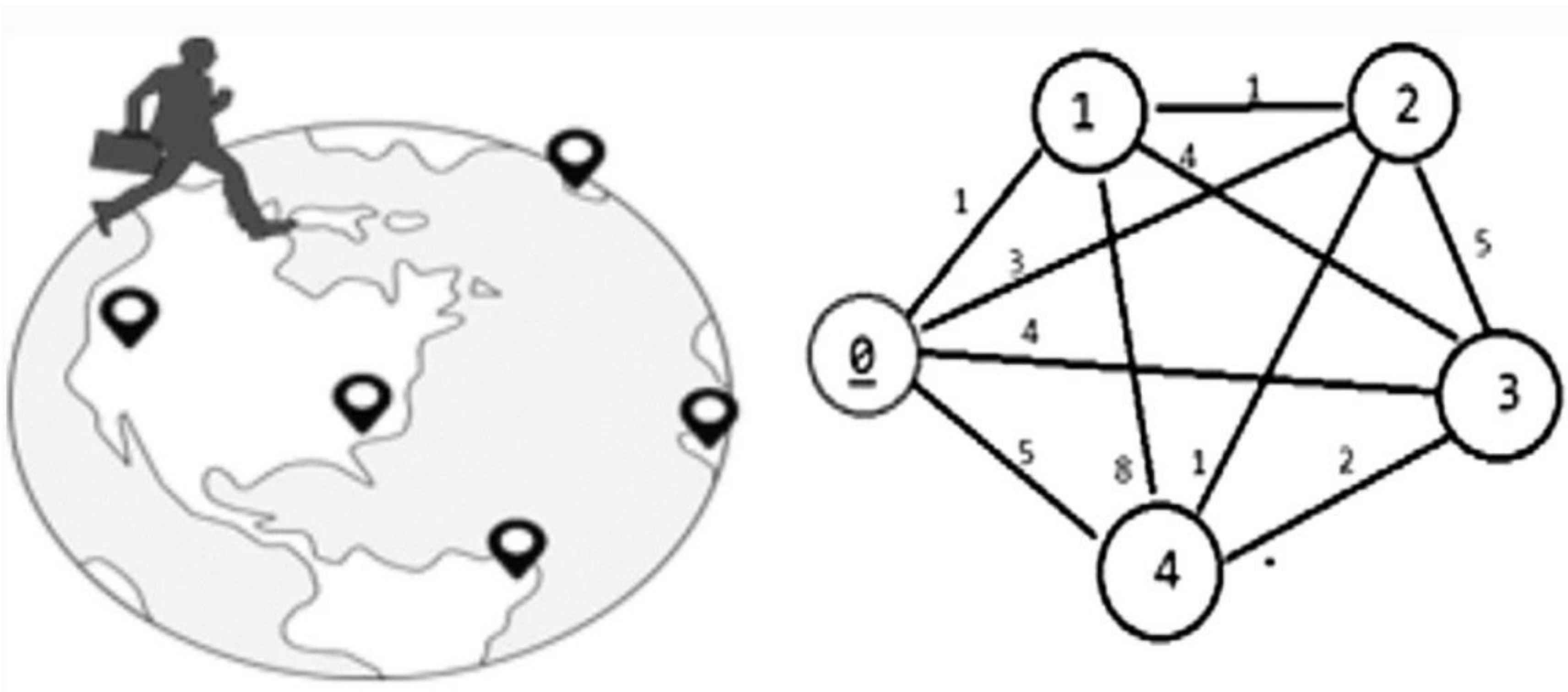
$v, g, c, n, a \geq 0$, enteros



Problema del viajante (TSP)

- Dado un conjunto de ciudades, determinar la recorrida de menor distancia, pasando una única vez por cada ciudad y finalizando en la misma ciudad de partida.
- Se puede representar como un grafo, en donde cada nodo representa una ciudad y cada arco la distancia entre ciudades (si existe el camino).

Problema del viajante (TSP)



Fuente: https://link.springer.com/article/10.1007/s10922-018-9469-9/

Problema del viajante (TSP)

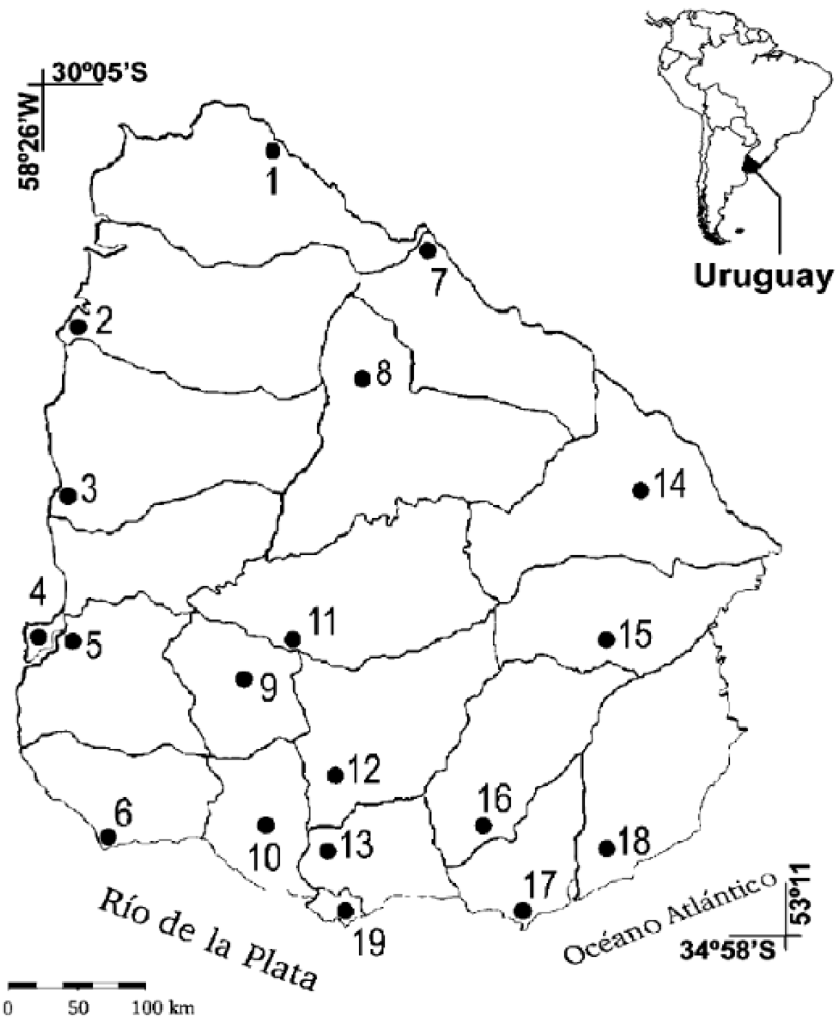


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Fuente: Rossi & Martinez (2013)

Partiendo de Artigas, encontrar un recorrido por todas las ciudades capitales del país, que minimice la distancia total recorrida.

Problema del viajante (TSP)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	Artigas	*	555	611	418	503	435	748	392	435	711	601	325	183	671	207	580	211	503	459
2	Canelones	555	*	145	137	52	268	155	378	237	131	46	332	455	220	450	47	344	282	151
3	Colonia	611	145	*	218	178	207	301	507	176	276	177	286	549	360	404	108	429	427	176
4	Durazno	418	137	218	*	85	201	298	418	170	273	183	229	318	363	348	136	207	424	41
5	Florida	503	52	178	85	*	286	209	329	255	184	98	318	403	274	437	88	292	355	126
6	Fray Bentos	435	268	207	201	286	*	422	622	31	395	309	110	452	483	228	220	341	546	160
7	Maldonado	748	155	301	298	209	422	*	325	391	75	134	487	572	85	605	202	509	212	301
8	Melo	392	378	507	418	329	622	325	*	590	276	387	435	262	285	428	407	204	113	460
9	Mercedes	435	237	176	170	255	31	391	590	*	363	278	110	452	452	228	189	341	415	129
10	Minas	711	131	276	273	184	395	75	276	363	*	122	463	604	132	582	182	484	164	276
11	Montevideo	601	46	177	183	98	309	134	387	278	122	*	378	501	210	496	93	390	286	188
12	Paysandú	325	332	286	229	318	110	487	435	110	463	378	*	342	553	118	285	231	614	190
13	Rivera	183	455	549	318	403	452	572	262	452	604	501	342	*	541	335	473	111	373	359
14	Rocha	671	220	360	363	274	483	85	285	452	132	210	553	541	*	672	272	490	172	366
15	Salto	207	450	404	348	437	228	605	428	228	582	496	118	335	672	*	403	224	534	309
16	San José	580	47	108	136	88	220	202	407	189	182	93	285	473	272	403	*	353	327	95
17	Tacuarembó	211	344	429	207	292	341	509	204	341	484	390	231	111	490	224	353	*	320	248
18	Treinta y Tres	503	282	427	424	335	546	212	113	514	164	286	614	373	172	534	327	320	*	427
19	Trinidad	459	151	176	41	126	160	301	460	129	276	188	190	359	366	309	95	248	427	*

Fuente: viatermal.com

Problema del viajante (TSP)

Solución: Ir a la ciudad más cercana no visitada aun

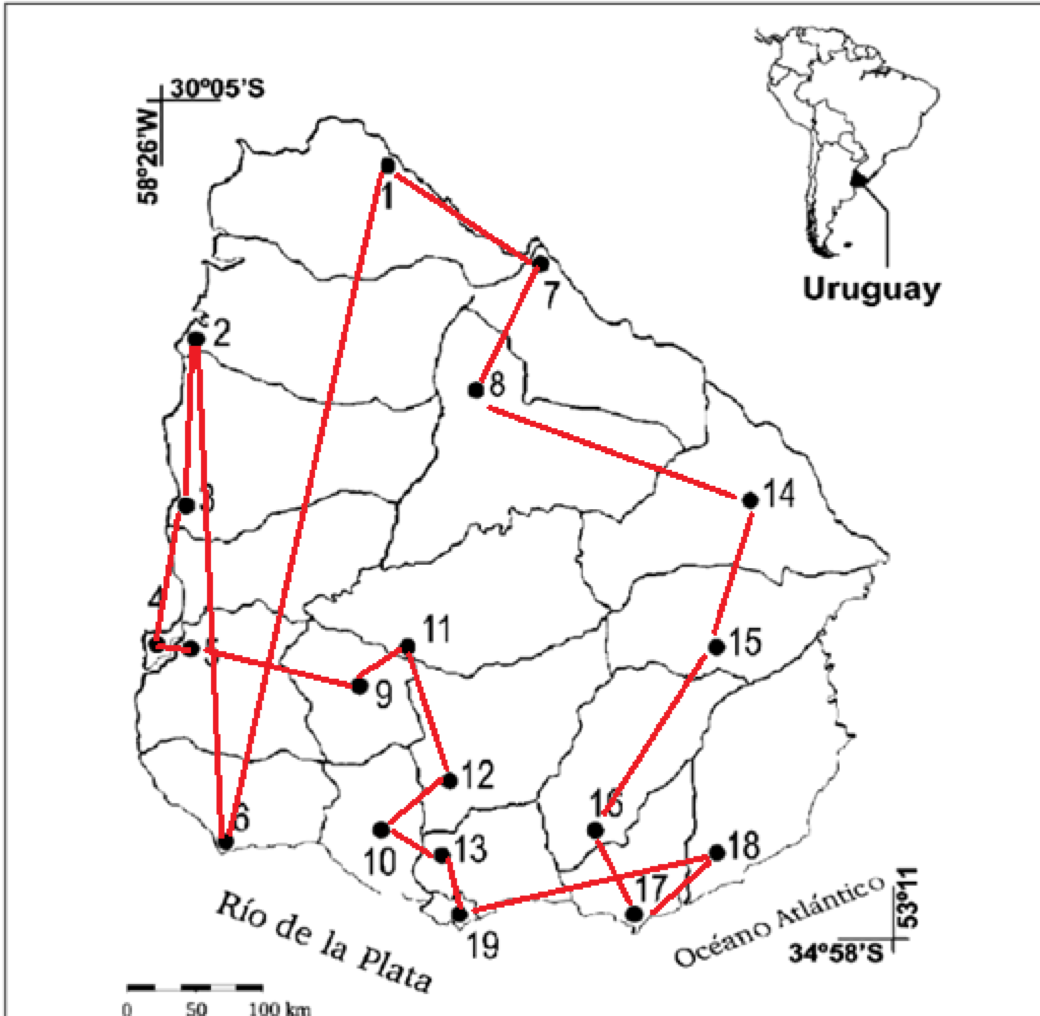


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Artigas
Rivera
Tacuarembó
Melo
Treinta y Tres
Minas
Maldonado
Rocha
Montevideo
Canelones
San José
Florida
Durazno
Trinidad
Mercedes
Fray Bentos
Paysandú
Salto
Colonia
2855 km

Fuente: viatermal.com

Problema del viajante (TSP)

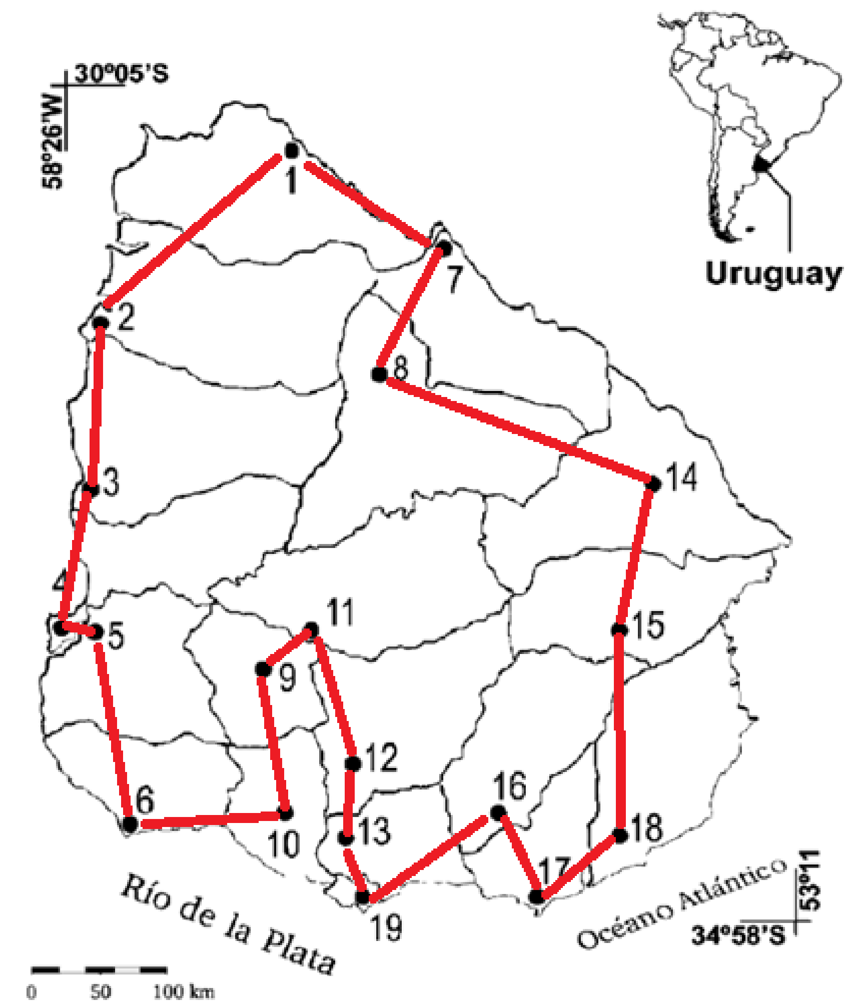


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Artigas
Rivera
Tacuarembó
Melo
Treinta y Tres
Rocha
Maldonado
Minas
Montevideo
Canelones
Florida
Durazno
Trinidad
San José
Colonia
Mercedes
Fray Bentos
Paysandú
Salto
2134 km

Fuente: viatermal.com

Problema del viajante (TSP)

18!
alternativas
diferentes…
más de
640237×10^{10}

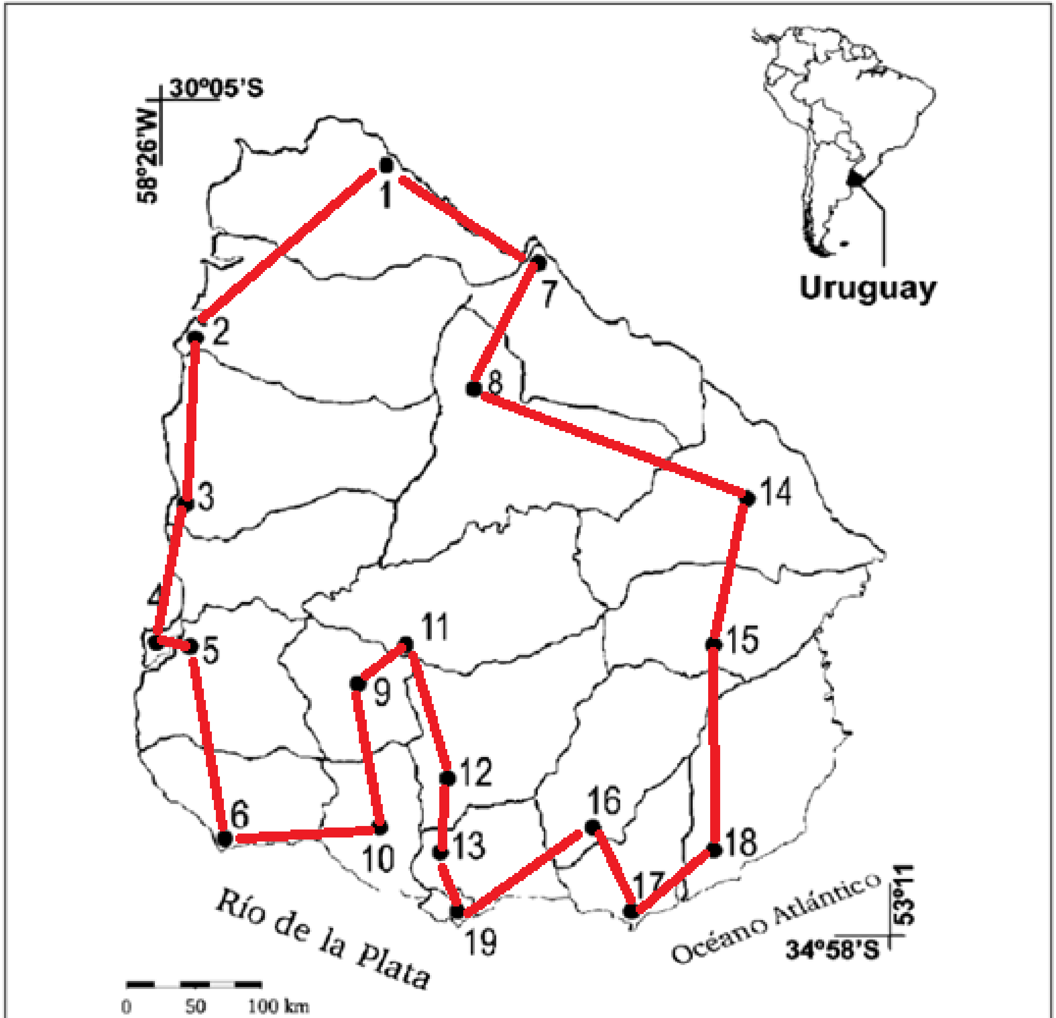


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Artigas
Rivera
Tacuarembó
Melo
Treinta y Tres
Rocha
Maldonado
Minas
Montevideo
Canelones
Florida
Durazno
Trinidad
San José
Colonia
Mercedes
Fray Bentos
Paysandú
Salto
2134 km

Fuente: viatermal.com

Problema del viajante (TSP)

- Para el MILP del TSP, hay que considerar restricciones para eliminar los *subtours* (recorridos inválidos), denominadas SECs.
- **DFJ**: Dantzig, Fulkerson y Johnson en 1954, proponen una cantidad exponencial de SECs, que describen la envoltura convexa.
- **MTZ**: Miller, Tucker y Zemlin en 1960, proponen una cantidad polinomial de SECs, con una relajación débil a LP.

LP y MILP: UCs

- Introducción a la Investigación de Operaciones (IIO).
- Optimización de Problemas de Producción (OPP).
- Fundamentos de Programación Entera (FPE).
- Técnicas de Descomposición en Programación Matemática (TDPM).
- Reformulaciones y Algoritmos para Planificación de la Producción (RAPP).

Bibliografía

- Poler R, Mula J, Díaz-Madruñero M (2014): *Operations Research Problems*, Springer.
- Wagner , Whitin M (1958): *Dynamic version of the Economic Lot Size Model*, en *Management Science* 5, 89-96.
- Bektas T, Gouveia L (2014): *Requiem for the Miller-Ticker-Zemlin subtours elimination constraints?*, en *Eur. Journal of Operational Research* 236, 820-832.
- Pochet Y, Wolsey LA (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer.