Sistemas lineales invariantes. Respuesta al impulso

(¿Por qué nos importa el Análisis de Fourier?!)

. Consideremos un sistema caracterizado por un operador S;

mapeo de entrada en salida

En óptica la entrada puede ser real (Intensidad) o compleja (campo) y de dos variables reales indep. (espacio)

Sean $p(x_1, y_1)$ y $q(x_1, y_1)$ dos entradas diferentes:

$p_2(x_2, y_2)$

$S\{p(x_1, y_1)\}$ y $S\{q(x_1, y_1)\}$ sus respuestas

→ Un sistema es lineal si la siguiente propiedad de superposición se verifica:

$$S\{ap + bq\} = a\,S\{p\} + b\,S\{q\}$$

⇒ En los sistemas lineales puedo expresar la respuesta a una entrada arbitraria descomponiendo la misma en términos de funciones elementales:

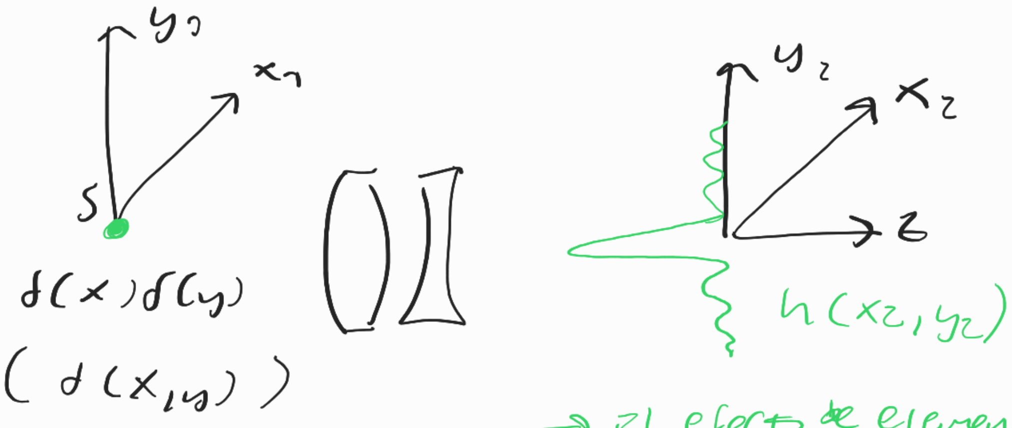
$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta)\, \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$g_1(\xi, \eta)$ es un número a efectos de S

$$\Rightarrow S\{g_1(x_1, y_1)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta)\, \underline{S\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}}\, d\xi\, d\eta$$

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = S\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}:$$

respuesta al impulso o <u>Point Spread Function</u>



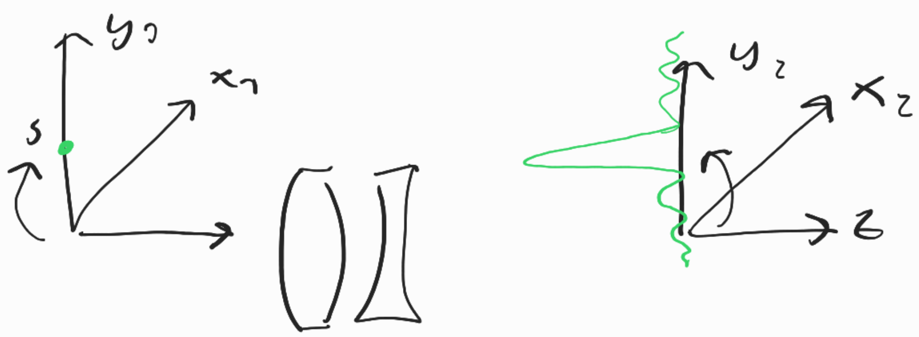
→ El efecto de elementos ópticos se puede describir indicando las imágenes de fuentes puntuales en el plano objeto

■ <u>Sistemas lineales invariantes</u>!

Un sistema lineal es espacialmente invariante (o isoplanático) si la PSF depende sólo de las distancias: $x_2 - \xi$, $y_2 - \eta$ (distancia entre excitación y respuesta):

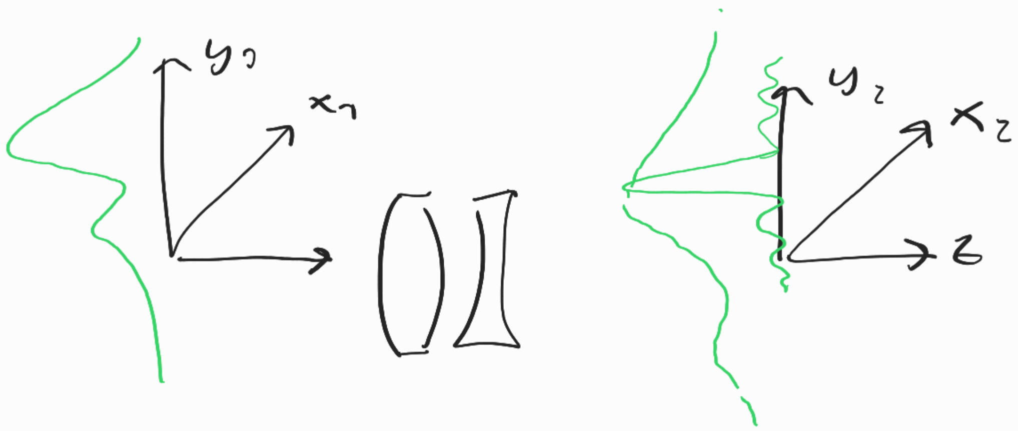
$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta)$$

La imagen de una fuente puntual no cambia en la forma, tan sólo en posición, a medida que la fuente explora el espacio objeto:



La integral de superposición toma luego la siguiente forma:

$$g_2(x_2,y_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi,\eta)\, h(x_2-\xi, y_2-\eta)\, d\xi\, d\eta$$



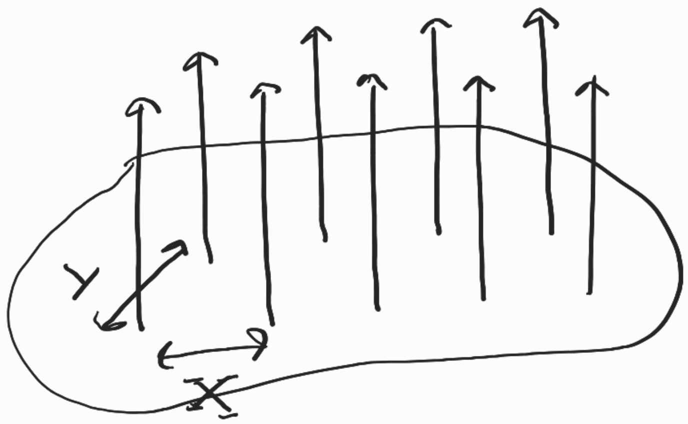
• Es decir:

$$g_2(x,y) = (g_1 * h)(x,y)$$

• En Fourier:

$$G_2(f_x,f_y) = \underbrace{H(f_x,f_y)}_{\text{función de transferencia que indica los efectos del sistema en frecuencia}} G_1(f_x,f_y)$$

Teoría de muestreo en 2D



La toma de muestras suficientemente próximas puede ser una buena representación de la función original.

Pero: ¿puede ser exacta?

Teorema de Whittaker–Shannon

Peine bidimensional de muestreo aplicado a la función g:

$$g_s(x,y) = \text{III}(x/X)\,\text{III}(y/Y)\,g(x,y)$$

$$G_s(f_x,f_y) = \underbrace{\mathcal{F}\{\text{III}(x/X)\,\text{III}(y/Y)\}} * G(f_x,f_y)$$

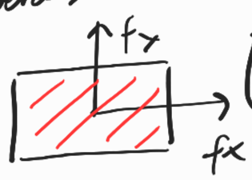
$$= XY\,\text{III}(Xf_x)\,\text{III}(Yf_y)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_x - n/X,\, f_y - \frac{m}{Y}\right)$$

$$\delta(ax,by) = \frac{1}{|ab|}\,\delta(x,y)$$

$$\Rightarrow G_s(f_x,f_y) = \sum_n \sum_m G\left(f_x - \frac{n}{X},\, f_y - \frac{m}{Y}\right)$$

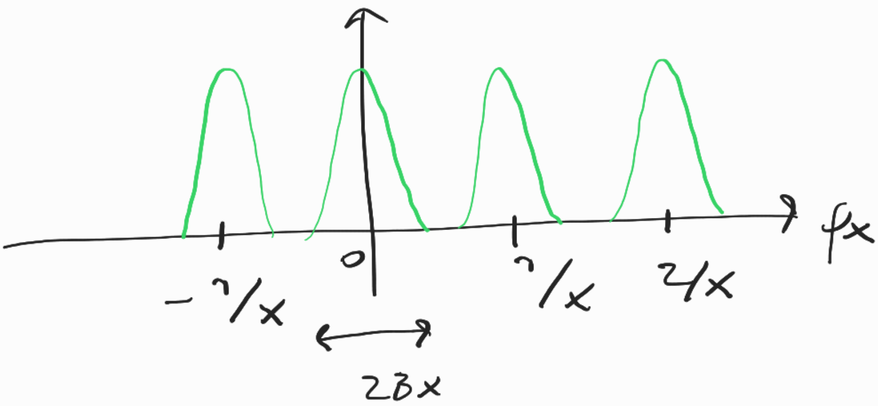
Supongamos g de banda limitada, $G(f_x,f_y)$ no nulo en:



$$\begin{cases} -B_x \le f_x \le B_x \\ -B_y \le f_y \le B_y \end{cases}$$

El espectro de g_s se construye a partir del espectro de g alrededor de los puntos $(n/X, m/Y)$

1D!



• Para que no haya solapamiento entre las copias $2B_{X(Y)} \leq \frac{1}{X(Y)}$

$\Rightarrow$ el espaciado de las muestras debe ser suficientemente pequeño para alejar la copia sin solapamiento

• Función de Transferencia del filtro?

Hay muchas opciones, pero dados los límites (cartesianos) del espectro, podemos elegir:

$$H(f_X, f_Y) = \Pi\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \Pi\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right)$$

$$\Rightarrow G_s(f_X, f_Y)\, \Pi\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \Pi\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) = G(f_X, f_Y)$$

En el espacio:

$$\left[\text{III}(x/X)\, \text{III}(y/Y)\, g(x,y)\right] * h(x,y) = g(x,y)$$

Siendo: $h(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Pi\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \Pi\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right)\right\} =$

$$h(x,y) = (2B_x)(2B_y)\,\mathrm{sinc}(2B_x x)\,\mathrm{sinc}(2B_y y)$$

$$\Rightarrow g(x,y) = 4B_xB_yXY \sum_n \sum_m g(nX, mY) \cdot$$

$\mathrm{III}(x/X) = X \sum \delta(x - nX)$

$$\cdot\, \mathrm{sinc}\left(2B_X(x - nX)\right)\mathrm{sinc}\left(2B_Y(y - mY)\right);$$

Si los intervalos de samples tienen sus máximos valores posibles:

$$g(x,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g\left(\frac{n}{2B_X}, \frac{m}{2B_Y}\right)}_{\text{muestras}} \underbrace{\mathrm{sinc}\left(2B_X\left(x - \frac{n}{2B_X}\right)\right) \cdot \mathrm{sinc}\left(2B_Y\left(y - m/2B_Y\right)\right)}_{\text{función de interpolación}}$$

Teorema de Whittaker-Shannon, suponiendo:
- red vect. de samples
- función de transferencia del filtro recto.

Space-Bandwidth Product (SBP)

g:
- acotada en banda $\begin{cases} -B_X \le f_X \le B_X \\ -B_Y \le f_Y \le B_Y \end{cases}$
- tiene valores significativos sobre $\begin{cases} -L_X \le x \le L_X \\ -L_Y \le y \le L_Y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Para poder representar con buena precisión a g necesito,

al menos:

$$M = \frac{(2L_x)}{(1/2B_x)} \frac{(2L_y)}{(1/2B_y)} = \boxed{16 L_x L_y B_x B_y}_{SBP}$$

mide el grado de complejidad de la señal