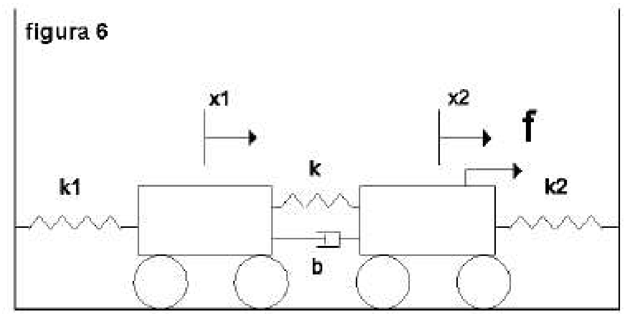
Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 2, CLASE 2

Hoja 2. Ejercicio 6.a

6) Dado el mecanismo de la **figura 6**, con dos carritos, tres resortes y un amortiguador de pistón, se considera su movimiento alrededor de la posición de reposo con el carro de masa $\mathbf{M_2}$ sometido a una fuerza variable **f(t)**.

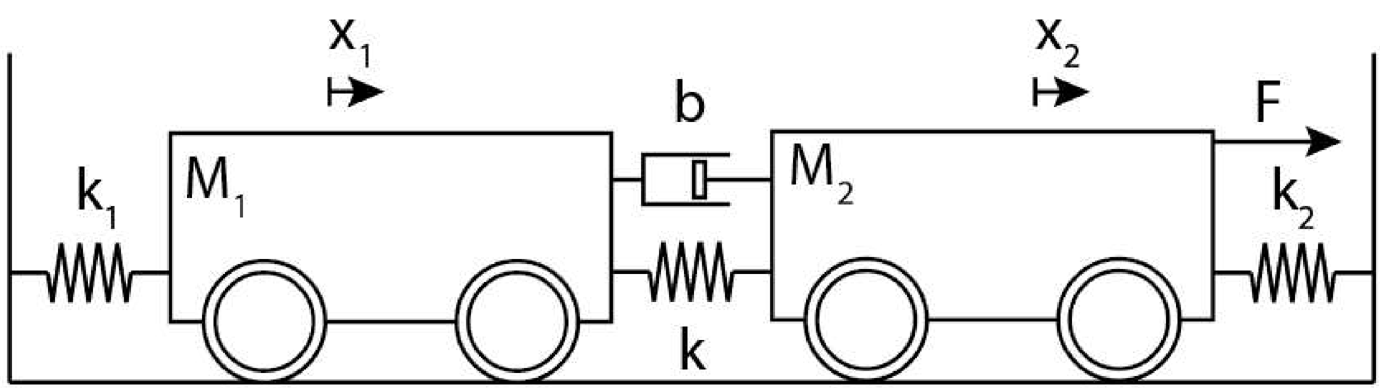


a) Modele el mecanismo con un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases}$$

$$donde \quad u = f(t), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^t, \quad y = x$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a



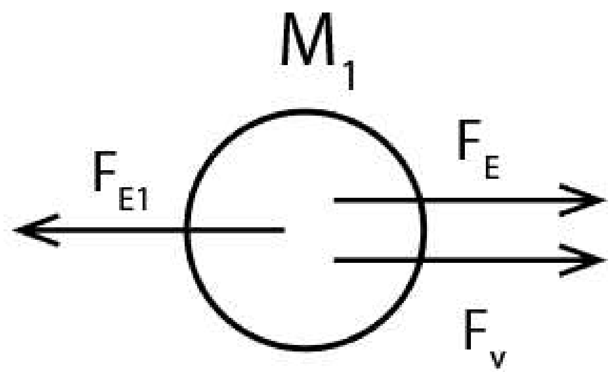
Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1

$\left|\overrightarrow{F_{E1}}\right| = k_1(x_1 - l_0^1)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

Repitamos el proceso para el carro de masa M_2

$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$ $\Longrightarrow$ Tiene sentido este resultado?

Pensemos un poco

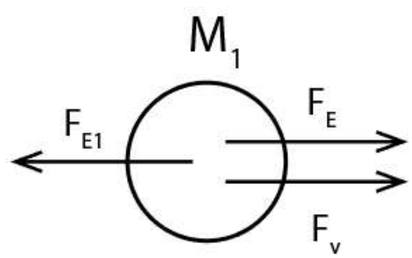
- Las únicas dos fuerzas que actúan en los extremos del resorte son las propias fuerzas elásticas (principio de acción y reacción)
- El resorte tiene masa nula
- $m_{res}.\ddot{x}_{res} = 0 = F_{E1} - F_{E2} \rightarrow F_{E1} = F_{E2}$
- Este resultado es válido para los demás resortes y el amortiguador

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

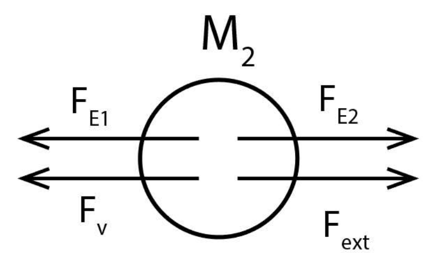


$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_{E2}}| = k_2(x_2 - l_0^2)$

$|\overrightarrow{F_{ext}}| = F_{ext}$

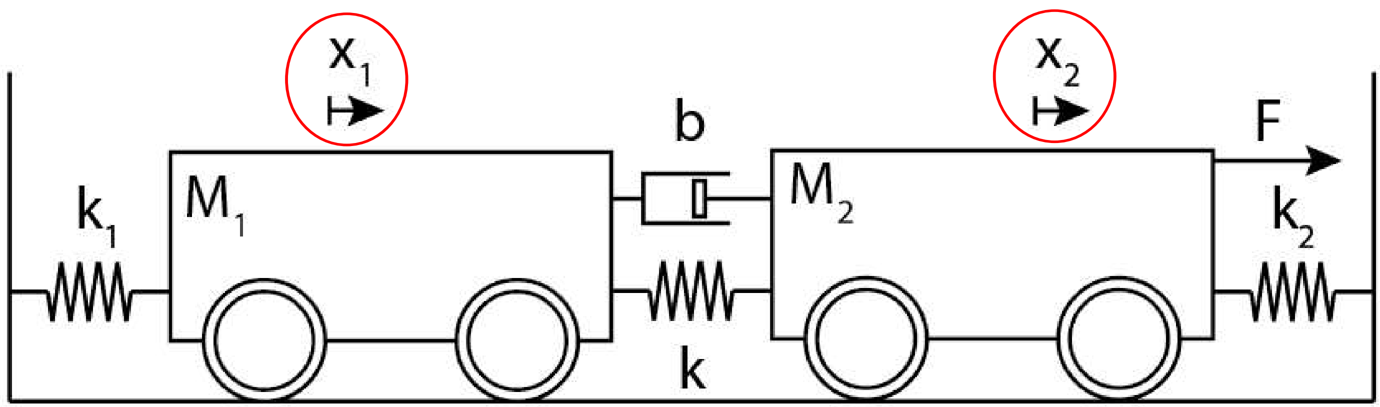


Hoja 2. Ejercicio 6.a

- Hallar el módulo de cada uno de los vectores es (más o menos) sencillo
- El problema está en poder ordenar la información en un conjunto de ecuaciones
- ¿Qué término “suma”? ¿Cuál “resta”?
- ¿Qué es sumar?
- Estrategia de resolución
  - Establecer una convención de signos clara
  - Introducir pequeños apartamientos

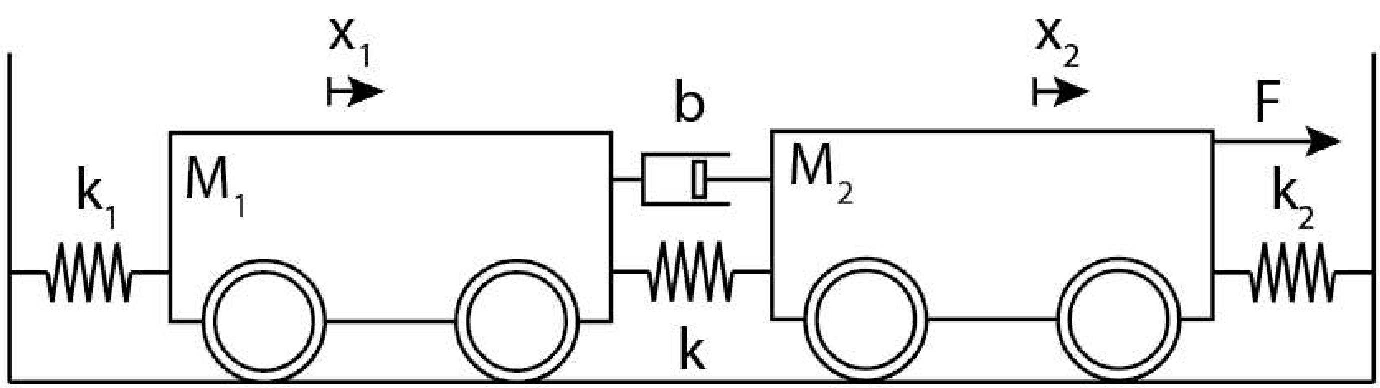
Hoja 2. Ejercicio 6.a

El ejercicio propone una convención de signos



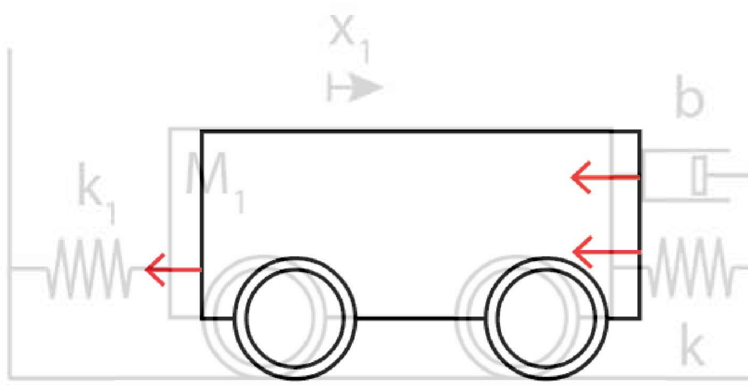
Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_1 = 0^+, \dot{x}_1 = 0^+$
$\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = l_0^2$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_1 = 0^+, \dot{x}_1 = 0^+$
$\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = l_0^2$



$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

2ª Ley de Newton) $M_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - l_0^1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

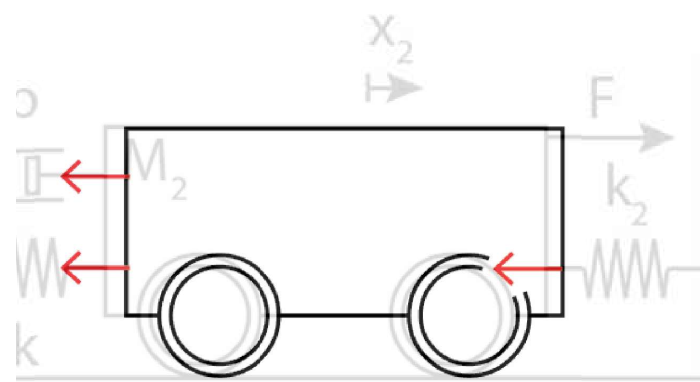
$\ddot{x}_2 = 0^+, \dot{x}_2 = 0^+$
$\ddot{x}_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = l_0^2$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_{E2}}| = k_2(x_2 - l_0^2)$

$|\overrightarrow{F_{ext}}| = F_{ext}$



2ª Ley de Newton) $M_2\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2) + \mathrm{F_{ext}}$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

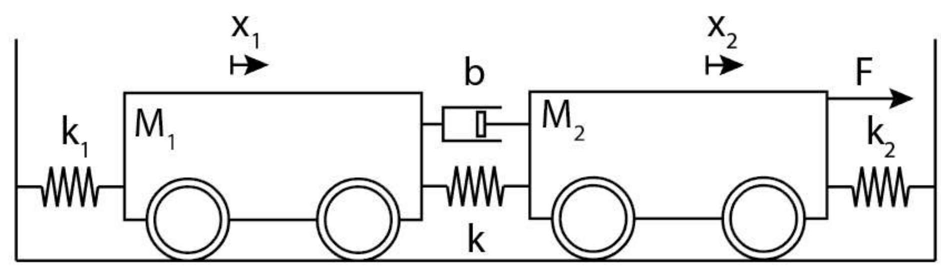
$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - l_0^1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) \\ M_1\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2) + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

⚠ Las ecuaciones que obtuvimos no tienen la forma deseada

Cambio de variable

$x_1' = x_1 - l_0^1$

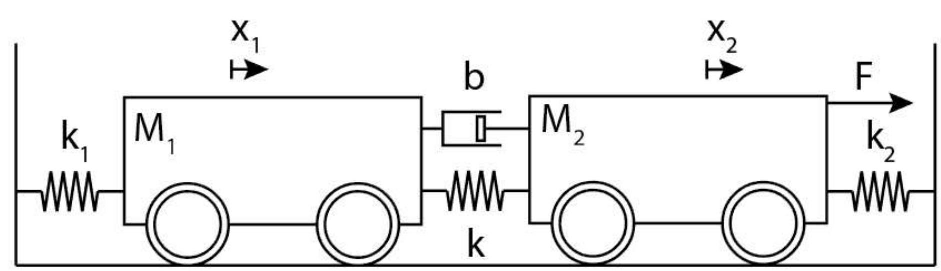
$x_2' = x_2 - l_0^2$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

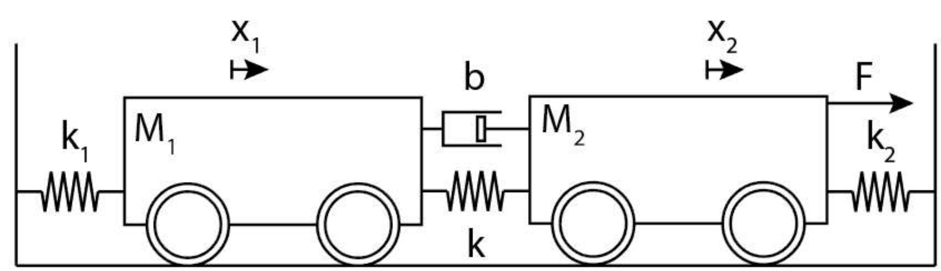
$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1x_1 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) \\ M_1\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

(Se omiten los tildes por claridad)



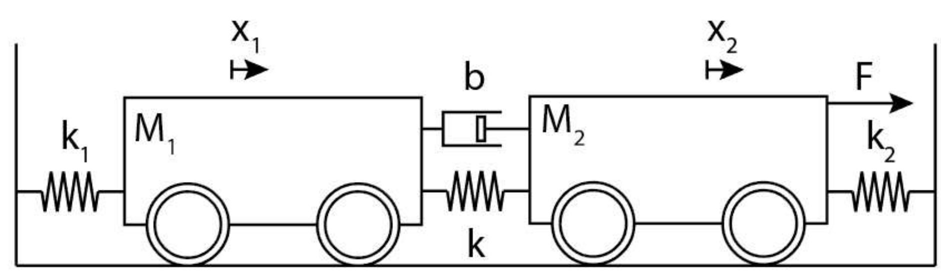
Hoja 2. Ejercicio 6.a

- ¿Es necesario este cambio de variable “caprichoso”?
  - No, lo podemos resolver pensando
  - El problema surge de una asunción equivocada: En el estado de reposo, los resortes no necesariamente ejercen fuerza nula
  - Reposo: $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

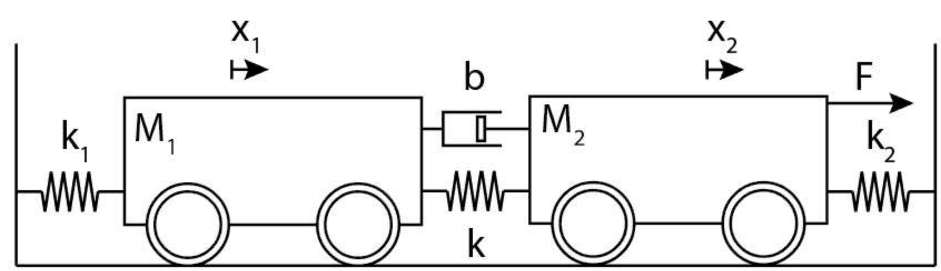
Sustituyendo, $\begin{cases} k_1 l_0^1 = \ k(l_0^1 - l_0^2) \\ k(l_0^1 - l_0^2) = k_2 l_0^2 \end{cases}$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) \\ M_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 + \mathrm{F_{ext}} \end{cases}$$

Llevemos esta expresión a la forma $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} - \frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{b}{M_1} \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} - \frac{k_2}{M_2} & \frac{b}{M_2} & -\frac{b}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{M_1} x_1 - \frac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \frac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \frac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k_2}{M_2} x_2 + \frac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$y = Cx + Du$

Por letra, sabemos que $y = x$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f(t)]$$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

b) Deduzca la matriz de transferencia **H(s)** para condiciones iniciales nulas.

Hoja 2. Ejercicio 6.b

- Dos formas de calcular $H(s)$
  - $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$
  - Aplicando propiedades de Laplace → Vamos a usar esta

- ¿Qué debemos hallar?
  - $H(s) = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} \\ \frac{\dot{X}_1(s)}{F(s)} \\ \frac{\dot{X}_2(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} \\ \frac{X_1(s).s}{F(s)} \\ \frac{X_2(s).s}{F(s)} \end{bmatrix}$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1x_1 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) \\ M_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 + \mathrm{F_{ext}} \end{cases}$$

Transformo

$$\mathcal{L}\big(x(t)\big) = X(s)$$

$$\mathcal{L}\big(\dot{x}(t)\big) = s.X(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\big(\ddot{x}(t)\big) = s.\dot{X}(s) - \dot{x}(0) = s.[s.X(s) - x(0)] - \dot{x}(0)$$

Considerando que la función de transferencia se define para cond. Iniciales nulas, sustituyo

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$\begin{cases} M_1X_1s^2 = -k_1X_1 - bs(X_1 - X_2) - k(X_1 - X_2) \\ M_2X_2s^2 = k(X_1 - X_2) + bs(X_1 - X_2) - k_2X_2 + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

$$X_1(M_1s^2 + bs + k_1 + k) = (bs + k)X_2$$

$$X_1 = \frac{(bs+k)}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}X_2$$

$$M_2X_2s^2 = k(X_1 - X_2) + bs(X_1 - X_2) - k_2X_2 + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}}$$

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = X_1(bs + k) + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}}$$

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = \frac{(bs+k)^2X_2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)} + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = \frac{(bs+k)^2 X_2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)} + \mathrm{F_{ext}}$$

$$X_2\left[(M_2s^2 + bs + k + k_2) - \frac{(bs+k)^2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}\right] = \mathrm{F_{ext}}$$

$$\frac{X_2}{\mathrm{F_{ext}}} = \frac{1}{\left[(M_2s^2+bs+k+k_2)-\frac{(bs+k)^2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}\right]}$$

Sustituyendo hacia atrás obtenemos $\frac{X_1}{F_{ext}}$ y sus derivadas