

Comunicaciones Inalámbricas
Notas del Curso sobre Phase Locked Loop
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Pablo Belzarena

24 de agosto de 2023

0.1. Introducción

El problema que se pretende solucionar es que el receptor no conoce la fase con que le llegan los símbolos del transmisor, ya que el receptor y el transmisor no están sincronizados. Además, el canal introduce una fase que también es desconocida. Por otra parte, la frecuencia portadora en receptor y transmisor nunca son exactamente la misma por diferencias en el hardware de ambos equipos. La consecuencia es que si no se soluciona esta situación, no será posible obtener los símbolos enviados o se cometerán muchos errores al tratar de recuperar los símbolos. La constelación recibida puede estar rotada por una fase desconocida o aún peor, por la diferencia entre las frecuencias portadoras, la constelación puede estar girando continuamente a un frecuencia igual a la diferencia de ambas portadoras.

La idea con el PLL es poder estimar esta fase desconocida para luego poder desrotar la constelación con esa fase estimada.

Si bien en general se utilizará el modelo linealizado del PLL en el curso, en esta sección se analiza cual es el comportamiento comportamiento no-lineal del PLL. Los PLLs son no lineales y algunos fenómenos que ocurren en el modelo no-lineal no son fáciles de comprender una vez que se linealiza.

El diagrama general del PLL a analizar en las próximas secciones se muestra en la figura 1.

El PLL es un sistema realimentado que consta de 3 bloques principales:

1. El detector de error que generará una salida que será función del error de fase.
2. El filtro de bucle, que es el controlador que se diseñará.
3. El Voltage Controlled Oscillator (VCO), que genera un señal tipo coseno de una frecuencia angular de referencia w_c y una estimación de la fase de la señal de entrada al PLL. La fase estimada será una función de la señal de entrada al bloque $c(t)$. En particular verifica:

$$\dot{\hat{\phi}}(t) = k_1 c(t)$$

En la fase $\phi(t)$ de la sinusoide de entrada al sistema, se incluye diferencias de fase constantes entre transmisor y receptor así como diferencias en la frecuencia w_c entre transmisor y receptor. Por eso asumiremos el siguiente modelo para $\phi(t) = \Delta wt + \phi_0$.

0.2. PLL de primer orden

La entrada al PLL es una señal de la forma:

$$r(t) = \sin(w_c t + \phi(t)) \quad (1)$$

esta señal se multiplica por la salida del VCO:

$$u(t) = \cos(w_c t + \hat{\phi}(t)) \quad (2)$$

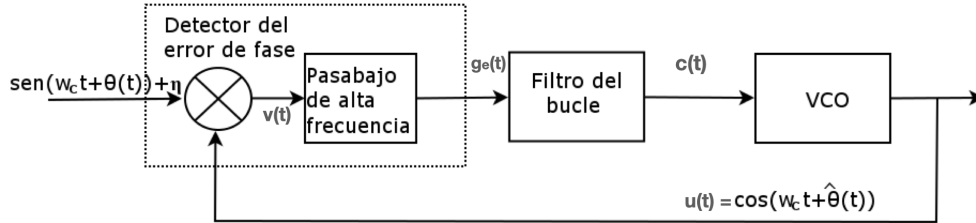


Figura 1: Diagrama general del PLL

obteniendo,

$$v(t) = \sin(w_c t + \phi(t)) \cos(w_c t + \hat{\phi}(t))$$

Operando con igualdades trigonométricas conocidas,

$$v(t) = \sin(2w_c t + \phi(t) + \hat{\phi}(t)) + \sin(\phi(t) - \hat{\phi}(t)) \quad (3)$$

A la salida del multiplicador, el detector de error tiene un filtro pasabajo, que elimina el primer término de la ecuación 3 que se encuentra a frecuencia $2w_c$.

Por lo tanto, la señal de error no lineal es en este caso:

$$g_e(t) = k_p \sin(\phi(t) - \hat{\phi}(t)) \quad (4)$$

$$\phi_e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(t) - \hat{\phi}(t) \quad (5)$$

$$g_e(t) = k_p \sin(\phi_e(t)) \quad (6)$$

donde k_p es una constante multiplicativa del bloque de detección de error.

En el caso de un PLL de primer orden, la salida del filtro de bucle será una señal proporcional a la señal de error:

$$c(t) = k_0 g_e(t) \quad (7)$$

El VCO genera un coseno de frecuencia w_c y la fase verifica la siguiente ecuación:

$$\dot{\hat{\phi}}(t) = k_1 c(t) \quad (8)$$

siendo k_1 la constante de proporcionalidad. Por lo tanto, podemos escribir que:

$$\hat{\phi}(t) = k_1 \int_0^t c(\tau) d\tau \quad (9)$$

$$\hat{\phi}(t) = \int_0^t k_1 k_0 k_p \sin(\phi_e(\tau)) d\tau \quad (10)$$

Por lo tanto,

$$\phi_e(t) = \phi(t) - \hat{\phi}(t) = \phi(t) - \int_0^t k_1 k_0 k_p \sin(\phi_e(\tau)) d\tau \quad (11)$$

Si suponemos que la fase corresponde a un error de frecuencia portadora mas un error de fase constante, es decir:

$$\phi(t) = \Delta w_c t + \phi_0 \quad (12)$$

obtenemos la siguiente ecuación que verifica el PLL

$$\phi_e(t) = \Delta w_c t + \phi_0 - \int_0^t k_1 k_0 k_p \sin(\phi_e(\tau)) d\tau \quad (13)$$

de donde, derivando obtenemos:

$$\dot{\phi}_e(t) = \Delta w_c - k_1 k_0 k_p \sin(\phi_e(t)) \quad (14)$$

La ecuación 14 es la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del PLL.

Para analizar el comportamiento de este PLL de primer orden podemos graficar lo que se denomina el plano de fase de la ecuación diferencial. Se grafica $\dot{\phi}_e(t)$ como función de $\phi_e(t)$. En la gráfica de la figura 2 se muestra el plano de fase. Para hacer más fácil el análisis se grafica $\dot{\phi}_e(t)/K$, siendo $K = k_0 k_1 k_p$.

Cada gráfica de la figura 2 corresponde a un valor diferente de $\Delta w_c/K$. Se debe observar que si bien Δw_c es un error en la frecuencia portadora, la constante K la podemos controlar nosotros por ejemplo a través de ajustar la ganancia de bucle.

Los puntos de equilibrio ϕ_e^* de la ecuación diferencial son aquellos donde $\dot{\phi}_e = 0$

$$\dot{\phi}_e/K = \Delta w_c/K - \sin(\phi_e^*) = 0 \quad (15)$$

Por lo tanto, para que existan puntos de equilibrio y logremos que el PLL no oscile y vaya a un punto de equilibrio es necesario que $|\Delta w_c/K| < 1$. Observar que el punto de equilibrio verifica que:

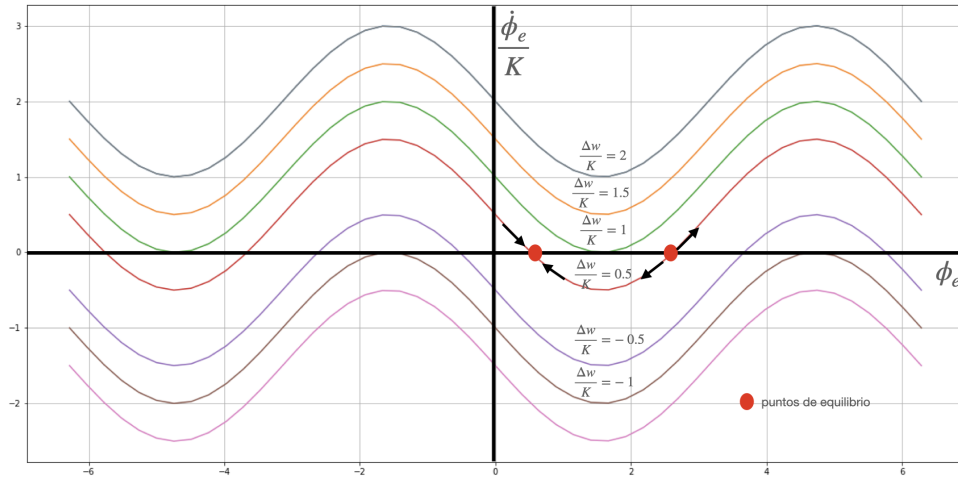


Figura 2: Plano de fase del pll no lineal de orden 1

$$\sin(\phi_e^*) = \Delta w_c/K \quad (16)$$

Se debe observar que cuando el PLL de primer orden tiene un punto de equilibrio, siempre tiene un error constante $\phi_e^* \neq 0$. Si bien agrandando K se puede hacer disminuir ese error, siempre existe error. Por esta razón, se verá en la próxima sección el PLL de segundo orden, que es el que habitualmente se utiliza y que no va a tener este problema.

Antes de analizar el PLL de segundo orden es importante caracterizar los puntos de equilibrio. En la figura 2, para el caso $\Delta w/K = 0,5$, se observan dos puntos de equilibrio entre $[-\pi, \pi]$ que se indican en la figura con dos puntos rojos. Estos dos puntos verifican la ecuación 16. La pregunta natural es, ¿el PLL puede funcionar en ambos puntos de equilibrio?. Para contestar esta pregunta, es necesario analizar si estos puntos de equilibrio son o no puntos de equilibrio estables. Si bien se puede analizar la estabilidad de manera formal, aquí interesa observar el comportamiento del sistema cualitativamente. Se analizará en primer lugar, el punto de equilibrio más cercano al origen. Se observa que si se perturba el sistema y se lo saca del equilibrio, pueden suceder dos cosas con el comportamiento del sistema. Si la perturbación hace crecer ϕ_e , el sistema se mueve por una trayectoria que tiene $\dot{\phi}_e < 0$ y por lo tanto tiende a disminuir ϕ_e y volver hacia el punto de equilibrio. Si en cambio, la perturbación disminuye ϕ_e , entonces la trayectoria del sistema lo lleva a una zona donde $\dot{\phi}_e > 0$ y por lo tanto aumenta ϕ_e , retornando al punto de equilibrio. Este análisis cualitativo permite concluir que ese punto de equilibrio es estable. En cambio, si se analiza el segundo punto de equilibrio, el más alejado del origen, se puede concluir que ese punto de equilibrio es inestable. Se debe observar que cualquier perturbación del punto de equilibrio lo conduce a una zona donde $\dot{\phi}_e$ hace que el punto perturbado

se aleje aún más del punto de equilibrio.

Este análisis de estabilidad del punto de equilibrio, permite concluir que el PLL de primer orden, si bien tiene dos puntos de equilibrio (cuando existen puntos de equilibrio), solo uno es estable y por lo tanto el PLL se funcionará en este punto.

0.3. PLL de segundo orden

La diferencia entre el PLL de primer orden y el de segundo orden, se encuentra en la relación entrada/salida del filtro de bucle. En este caso se tiene que la ecuación 7, se sustituye por la siguiente:

$$c(t) = k_0(g_e(t) + a \int_0^t g_e(s)ds) \quad (17)$$

Es decir, que a la salida se tiene un termino proporcional a la entrada y otro proporcional a la integral de la entrada. Se agrega una nueva constante multiplicativa, a , al término integral.

Sustituyendo esta ecuación, en la ecuación del VCO, ecuación 9, y en la ecuación de g_e , ecuación 6, se obtiene:

$$\phi_e(t) = \Delta w_c t + \phi_0 - k_1 k_0 k_p \int_0^t (\sin(\phi_e(\tau)) + a \int_0^\tau \sin(\phi_e(s))ds)d\tau \quad (18)$$

si se deriva dos veces esta ecuación se obtiene:

$$\ddot{\phi}_e(t) = -k_1 k_0 k_p (\dot{\phi}_e(t) \cos(\phi_e(t)) + a \sin(\phi_e(t))) \quad (19)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden. Para analizar, el tipo de soluciones, los puntos de equilibrio y la estabilidad de los mismos, se puede hacer una diagrama de plano de fase, es decir graficar $\dot{\phi}_e$ en función de ϕ_e . Como la ecuación es de segundo orden una forma habitual de hacer esto es transformar la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de de ecuaciones diferenciales de primer orden usando el cambio de variables:

$$x = \phi_e \quad (20)$$

$$y = \dot{\phi}_e \quad (21)$$

La ecuación diferencial de segundo orden la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k_1 k_0 k_p (y \cos(x) + a \sin(x)) \end{cases} \quad (22)$$

Los puntos de equilibrio del sistema se encuentran donde se cumpla que:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_e = \dot{x} = y = 0 \\ \ddot{\phi}_e = \dot{y} = -k_1 k_0 k_p (y \cos(x) + a \sin(x)) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

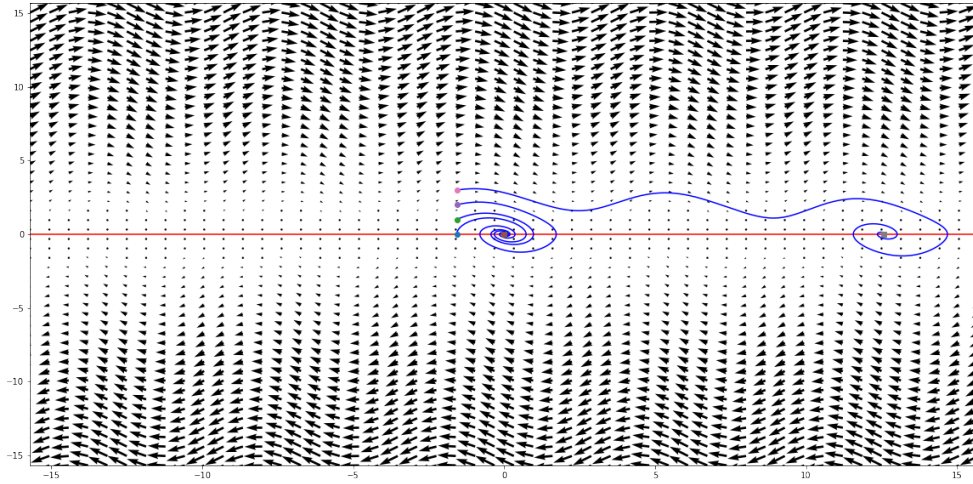


Figura 3: Plano de fase del PLL de segundo orden

Sustituyendo en la segunda ecuación, la condición para ser punto de equilibrio de la primera ecuación, $y^* = 0$, se obtiene la condición $\sin(x^*) = 0$. Los puntos de equilibrio son $(x^*, y^*) = (k\pi, 0)$ con k entero, $k \in (-\infty, \infty)$.

Esto significa que el sistema tiene el $(0, 0)$ como punto de equilibrio y por tanto el PLL de segundo orden converge a un punto con error nulo, $\phi_e = 0$. También tiene, por ejemplo, como punto de equilibrio a $\phi_e = \pi$. Sin embargo, se puede probar que los múltiplos impares de π son puntos de equilibrio inestables.

A los efectos de analizar como son las trayectorias en el plano de fase cualitativamente, se puede observar como es el vector de velocidad en cada punto, conocido como vector del campo. Es decir, si sabemos la dirección del vector (\dot{x}, \dot{y}) , se sabe en qué dirección se moverá una trayectoria cuando se encuentre en ese punto.

En la figura 3, se observa el plano de fase y la dirección de los vectores del campo en cada punto. En los puntos cercanos al eje x , y en particular en torno al punto de equilibrio $(0, 0)$, la magnitud del campo disminuye y su dirección apunta al punto de equilibrio. Sin embargo, si nos alejamos del eje x , se observa que el vector del campo parece sugerir trayectorias oscilatorias.

Efectivamente, en la figura 3, se observan cuatro posibles trayectorias del sistema partiendo de diferentes condiciones iniciales (x_0, y_0) . Se observa que las primeras tres trayectorias convergen al punto de equilibrio en el origen. Sin embargo, la trayectoria que tiene un y_0 mayor, en lugar de converger al origen, tiene varias oscilaciones y termina yendo a otro punto de equilibrio en $(4\pi, 0)$. Si se eligiera una condición inicial con un y_0 aún mayor, probablemente demorara más en converger y terminara yendo a un punto de equilibrio aún más alejado del origen. Es importante notar que este comportamiento oscilatorio es diferente del PLL de primer orden. El PLL de primer orden también tenía oscilaciones cuando no había punto de equilibrio. Pero en el caso del PLL de primer orden, las oscilaciones no se amortiguaban y ϕ_e nunca convergía a un valor sino que los puntos de la constelación quedan siempre rotando. En cambio en este caso, los puntos de la constelación pueden rotar durante un tiempo pero cada vez

lo harán a menor velocidad aproximándose a un valor fijo de ϕ_e que será un múltiplo par de π .

Este comportamiento oscilatorio para valores grandes de y se puede observar también de la ecuación diferencial 22. Si y es grande, en particular mucho mayor que a , de los dos términos de la ecuación en \ddot{y} prevalece el término $y \cos(x)$. Es decir, que el campo en la componente y se aproximaría a un coseno. Eso explica el comportamiento oscilatorio, con un análisis más detallado se puede observar que esas oscilaciones a su vez van acercándose al eje x .

En el resto del capítulo, y del curso se estudiarán PLLs para diferentes aplicaciones y con diferentes bloques de detección de error. Para poder hacer un análisis cuantitativo más detallado se linealizará la función $g_e(\phi_e)$ en un entorno de $\phi_e = 0$. Esta transformación en un sistema lineal, permitirá analizar el PLL usando las técnicas conocidas como la respuesta al impulso, transferencia, la transformada de Laplace o la Transformada Z. Sin embargo, al linealizar no se debe olvidar, que ese sistema lineal es válido solo para valores de ϕ_e cercanos a $\phi_e = 0$. Si el sistema se aleja de $\phi_e = 0$, el sistema lineal deja de ser válido. Si en la práctica aparecen comportamientos diferentes, como las oscilaciones por ejemplo, se deben a que en realidad a que el sistema es no lineal.

Bibliografía

- [1] Phase Lock Loops and Frequency Synthesis V.F. Kroupa 2003 John Wiley and Sons, Ltd ISBN: 0-470-84866-9.