

Comunicaciones Inalámbricas
Notas del Curso sobre modelos estadísticos del canal inalámbrico
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Pablo Belzarena

23 de agosto de 2022

Capítulo 1

Modelos estadísticos del canal inalámbrico

1.1. Introducción

En el modelado determinístico del canal inalámbrico visto antes, se asume que se conocen todos los caminos que recorre la señal entre transmisor y receptor. Esto quiere decir que se conoce totalmente el escenario, edificaciones, alturas, accidentes geográficos, etc. Con toda esta información física del escenario, hay que determinar para la ubicación del receptor y transmisor, todos los posibles rayos con todas las posibles reflexiones, difracciones, etc. Este modelado es muy difícil de realizar salvo para escenarios muy simples. En casos más complejos, para utilizar estos métodos determinísticos de trazado de rayos, existen simuladores del canal. Estos simuladores no resuelven el modelo analíticamente sino que utilizando una cantidad limitada de rayos y modelos 3D simplificados del escenario, buscan los principales rayos entre transmisor y receptor, obtienen las características de estos rayos y luego los introducen en las ecuaciones.

Para tener una caracterización del canal en escenarios complejos y dinámicos, se han desarrollado métodos estadísticos. En estos métodos se obtiene una cierta distribución estadística del comportamiento canal. Estas distribuciones depende de ciertos parámetros. Luego en un escenario concreto para obtener el modelo, se ajustan los parámetros de dicha distribución con medidas realizadas en campo.

1.2. Modelo de Rayleigh del canal inalámbrico

En este caso, el campo recibido en el receptor, cuando el transmisor envía una señal sinusoidal es:

$$E_r = \mathbf{Re} \left[\sum_{i=0}^{M-1} a_i(t) e^{j(\omega t - \phi_i(t))} \right] \quad (1.1)$$

Ahora a diferencia de los modelos determinísticos vistos antes, a_i y ϕ_i no son valores fijos de la ganancia y la fase de cada camino, sino que son variables aleatorias con cierta distribución.

En particular es común asumir que como $\phi_i(t) = 2\pi d_i(t)/\lambda$ y d_i es mucho mayor que λ , no existe un rango de valores mas o menos probables de ϕ_i y se asume que tiene distribución uniforme en $[0, 2\pi]$.

La ecuación 1.2, se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$E_r = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \cos(\omega t - \phi_i)$$

$$E_r = \sum_{i=0}^{M-1} a_i (\cos(\omega t) \cos(\phi_i) - \sin(\omega t) \sin(\phi_i))$$

Definiendo $I = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \cos(\phi_i)$ y $Q = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \sin(\phi_i)$, se puede escribir la ecuación del campo:

$$E_r = I \cos(\omega t) - Q \sin(\omega t) = \mathbf{Re} \left[r e^{j(\omega t - \theta)} \right] \quad (1.2)$$

donde $I = r \cos(\theta)$ y $Q = r \sin(\theta)$.

Lo que interesa analizar es cuál es la distribución del r que se denomina la envolvente del campo. El valor medio del campo será el valor esperado de r y el valor medio de la potencia recibida será el valor esperado de r^2 .

Para analizar la distribución de r se analiza primero la distribución de I y Q . Se asumirá que los a_i son variables aleatorias independientes entre los diferentes caminos e independientes de los ϕ_i , que se asumen con distribución uniforme en $[0, 2\pi]$.

Por lo tanto, tanto I como Q son la suma de variables aleatorias independientes y por el Teorema Central del Límite convergen, cuando la cantidad de caminos tiende a infinito, a variables con distribución Normal de media nula y varianza σ_r^2 . Que la media es nula se debe a que el $\sin(\phi)$ y $\cos(\phi_i)$ tienen media nula al tener ϕ_i distribución uniforme en $[0, 2\pi]$.

Por otra parte, se cumple que $I^2 + Q^2 = r^2$. Se prueba que r , al ser la raíz cuadrada de la suma al cuadrado de dos variables aleatorias con distribución normal, tiene distribución de Rayleigh, cuya densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}$$

Un parámetro importante de esta distribución es $\mathbf{E}(r^2) = 2\sigma_r^2$ ya que representa el valor medio de la potencia recibida por todos los caminos.

1.3. Modelo de Rice del canal inalámbrico

En el modelo de Rayleigh se asumió que todos los caminos tenían ganancia y fase aleatorias. Sin embargo, si hay línea de vista, LOS, este camino tiene una ganancia y

una fase fija. Por lo tanto, la ecuación 1.2 se transforma en :

$$E_r = (I + A) \cos(wt) - Q \sin(wt) = \mathbf{Re} \left[r e^{j(wt-\theta)} \right]$$

donde A es la ganancia del camino con LOS y se asume que este camino tiene fase cero, o lo que es equivalente, que se restó esta fase fija a todas las fases aleatorias de los demás caminos.

En este caso se cumple que $(I + A)^2 + Q^2 = r^2$. Las variables aleatorias I y Q continúan teniendo en el límite distribución normal de media nula y varianza σ_r^2 . Se prueba que r en este caso tiene distribución de Rice, cuya densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} e^{-\frac{r^2+A^2}{2\sigma_r^2}} \mathbf{I}_0\left(\frac{rA}{\sigma_r^2}\right)$$

donde \mathbf{I}_0 es la función de Bessel. Esta densidad se puede reescribir cambiando las variables A y σ_r por los siguientes dos parámetros que tienen una interpretación física :

$$K = \frac{A^2}{2\sigma_r^2}$$

$$\hat{P}_r = A^2 + 2\sigma_r^2$$

La interpretación de estos parámetros es la siguiente. A^2 es la potencia media que se recibe por el rayo LOS y $2\sigma_r^2$ es la potencia recibida por todos los demás rayos. Por lo tanto, K es la relación entre la potencia recibida por el rayo principal, LOS, y la recibida por todos los demás rayos. En tanto, \hat{P}_r es la potencia total recibida.

En función de estos dos parámetros, la densidad de Rice se puede reescribir de la siguiente forma:

$$f(r) = \frac{2r(K+1)}{\hat{P}_r} e^{-K-\frac{r^2(K+1)}{\hat{P}_r}} \mathbf{I}_0\left(2r\sqrt{\frac{K(K+1)}{\hat{P}_r}}\right)$$

1.4. Correlación en función de la diferencia de tiempo y frecuencia

Suponemos que tenemos dos señales que arriban al receptor. Estas señales arriban en tiempos diferentes t_1 y t_2 y corresponden a señales sinusoidales enviadas del receptor con dos frecuencias diferentes w_1 y w_2 . Supondremos que no hay L.O.S. y por lo tanto, todos los caminos que llevan del transmisor al receptor tienen una ganancia y una fase que asumiremos aleatoria como se vio para el modelo de Rayleigh. Las señales pueden recorrer caminos muy similares o muy diferentes. Por ejemplo, si suponemos que ambas señales salen del transmisor en tiempos muy cercanos, es razonable asumir que la mayoría de los caminos serán los mismos mientras que si lo hacen en tiempos mas distantes los caminos podrán tener diferencias importantes.

Los campos recibidos para cada una de esas dos señales las podemos escribir de la siguiente forma:

$$E_{r_1} = \mathbf{Re} \left[\sum_{i=0}^{M-1} a_i(t) e^{jw_1(t-t_1) - jw_1\tau_i(t)} \right] = \mathbf{Re} [r_1 e^{-j\phi_1} e^{jw_1 t}]$$

$$E_{r_2} = \mathbf{Re} \left[\sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) e^{jw_2(t-t_2) - jw_2\tau_k(t)} \right] = \mathbf{Re} [r_2 e^{-j\phi_2} e^{jw_2 t}]$$

Como se vio antes, r_1 y r_2 , que se denominan las envolventes del campo, tienen distribución de Rayleigh. Además, se asume que las fases ϕ_1 y ϕ_2 tienen distribución uniforme entre 0 y 2π .

Las variables aleatorias r_1 y r_2 dependen de $\Delta w = w_1 - w_2$ y de $\Delta t = t_1 - t_2$. Lo que se analizará en esta sección, es la correlación de estas variables. En particular, interesa saber para que valores, o en qué rangos, de Δt y Δw estas variables están poco o muy correlacionadas. Si por ejemplo, a partir de cierto Δt las variables están poco correlacionadas, quiere decir que si se envía la misma señal dos veces, pero separada ese tiempo, si una de ellas sufre un deep fading la otra no tendrá por qué sufrirlo y es muy probable que una de las dos llegue correctamente al receptor. Esto se denomina diversidad en el tiempo. Lo mismo sucede en frecuencia, dando lugar a la diversidad en frecuencia.

Lo que se busca calcular es la correlación normalizada, esto es:

$$\rho_{r_1, r_2} = \frac{\mathbf{E}(r_1 r_2) - \mathbf{E}(r_1)\mathbf{E}(r_2)}{\sqrt{\mathbf{Var}(r_1)}\sqrt{\mathbf{Var}(r_2)}}$$

Las varianzas y el valor esperado de r_1 y r_2 no ofrecen dificultad porque al tener distribución de Rayleigh son conocidos. La dificultad está en el cálculo de la densidad de probabilidad conjunta de r_1 y r_2 . Estos cálculos son bastante tediosos y solo se presentará el resultado final que es lo que nos interesa analizar.

$$\rho_{r_1, r_2}(\Delta t, \Delta w) = \frac{\mathbf{I}_0(w_{max}\Delta t)}{1 + (\Delta w \hat{T})^2} \quad (1.3)$$

donde \mathbf{I}_0 es la función de Bessel, \hat{T} es el valor medio de los delays (τ_i) de los diferentes caminos, y w_{max} es la frecuencia máxima del Doppler, es decir, $w_{max} = 2\pi f_{max} = 2\pi \frac{v}{\lambda}$.

En la Figura 1.1, se muestra el comportamiento de la función de Bessel. De la ecuación 1.3 y del comportamiento de la función de Bessel, se pueden observar dos cosas:

- Para Δw fijo, cuando Δt aumenta la función de Bessel decrece hasta 0 y luego tiene oscilaciones que se van amortiguando. Esto significa que a medida que se separa las señales en el tiempo, éstas van teniendo una menor correlación.
- Para Δt fijo, cuando Δw aumenta, el denominador de la ecuación 1.3 crece y por tanto la correlación disminuye.

Estas observaciones se corresponden con lo esperado intuitivamente. Como se mencionó antes, cuanto más se separan la señales, ya sea en el tiempo o en la frecuencia, la respuesta del canal, es razonable que tenga un comportamiento cada vez más diferente.

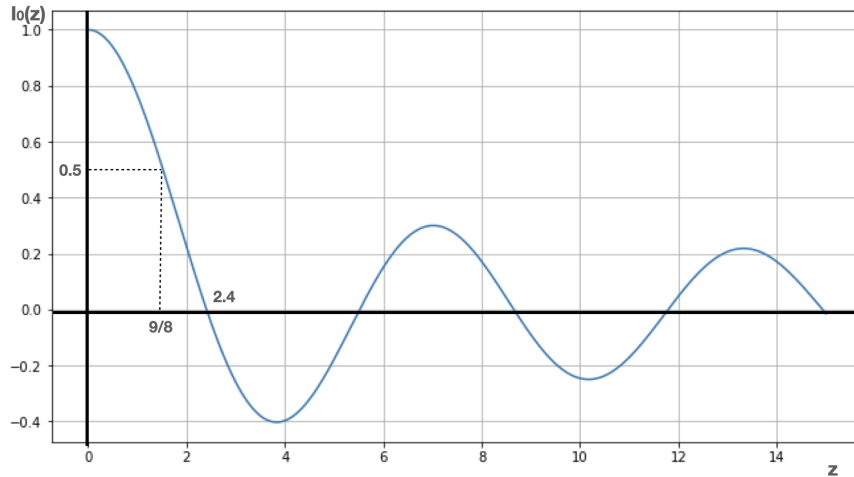


Figura 1.1: Función de Bessel

1.4.1. Tiempo de coherencia del canal

La idea del tiempo de coherencia se vio utilizando modelos determinísticos. Dicho tiempo era un valor que indicaba que en un tiempo mucho menor que el tiempo de coherencia la respuesta del canal no variaba sustancialmente. En cambio, para tiempos del orden o mayores que el tiempo de coherencia la respuesta del canal podía tener variaciones importantes.

Ahora veremos una interpretación del tiempo de coherencia pero con el modelo estadístico del canal. La idea es definir el tiempo de coherencia de la siguiente forma. En tiempos mucho menores que el tiempo de coherencia, el canal tiene respuestas fuertemente correlacionadas, en cambio, para tiempos del orden o mayores que el tiempo de coherencia, las respuestas del canal tienen baja correlación.

Algunos autores toman como 'baja correlación', cuando la correlación de la señales es menor a 0,5, y otros cuando la correlación es 0.

Para definir el tiempo de coherencia, analizaremos la función de correlación de la ecuación 1.3 asumiendo que $\Delta w = 0$, es decir que las dos señales arriban en tiempos diferentes pero tienen la misma frecuencia. En este caso nos queda que:

$$\rho_{r_1, r_2}(\Delta t, 0) = \mathbf{I}_0(w_{max}\Delta t) \quad (1.4)$$

De la ecuación 1.4 se ve que la correlación en este caso tiene como respuesta la función de Bessel de parámetro $w_{max}\Delta t$. Si se entiende que las señales dejan de estar correlacionada cuando su correlación es menor a 0,5, como $\mathbf{I}_0(z) = 0,5$ se da para $z = 9/8$, entonces el tiempo de coherencia se define como:

$$\begin{aligned} \rho_{r_1, r_2}(T_{coh}, 0) &= \mathbf{I}_0(w_{max}T_{coh}) = 0,5 \\ w_{max}T_{coh} &= 9/8 \\ T_{coh} &= \frac{9/8}{2\pi f_{max}} \approx \frac{0,18}{f_{max}} \end{aligned}$$

donde $f_{max} = v/\lambda$ es la frecuencia máxima de Doppler. Si se definiera que las señales no están correlacionadas cuando su correlación es 0, entonces como $\mathbf{I}_0(z) = 0$ se da por primera vez para $z = 2,4$, entonces:

$$T_{coh} = \frac{0,3}{f_{max}} \quad (1.5)$$

1.4.2. Distancia de coherencia del canal

Si se asume que el receptor se mueve a velocidad v , la pregunta es, a qué distancia las señales dejan de estar correlacionadas. Esa distancia, denominada distancia de coherencia $D_{coh} = vT_{coh}$. Por lo tanto, tomando la definición de tiempo de coherencia de la ecuación 1.5, se obtiene:

$$D_{coh} = 0,3\lambda \quad (1.6)$$

Habitualmente es usual decir que para distancias de media longitud de onda o mayores las señales no están correlacionadas.

1.4.3. Ancho de banda de coherencia del canal

La idea es similar a la definición del tiempo de coherencia pero en este caso se analiza la correlación para $\Delta t = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} \rho_{r_1, r_2}(0, 2\pi B_{coh}) &= \frac{1}{1 + (2\pi B_{coh} \hat{T})^2} = 0,5 \\ 2\pi B_{coh} \hat{T} &= 1 \\ B_{coh} &= \frac{1}{2\pi \hat{T}} \end{aligned}$$

Además de estas interpretaciones de T_{coh} , D_{coh} , B_{coh} , se pueden analizar otras propiedades del fading con estos modelos como el tiempo medio de fading. Es decir cuanto dura en media una situación de deep fading por ejemplo.

Bibliografía

- [1] SCHWARTZ, Mischa. Mobile wireless communications. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [2] Wireless Communications, Andrea Goldsmith, Cambridge University Press; 1 edition , 2005.
- [3] Fundamentals of Wireless Communication, David Tse, Pramod Viswanath, Cambridge University Press; 1 edition , 2005.
- [4] Principles of Digital Communication, Gallager, R. G., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.