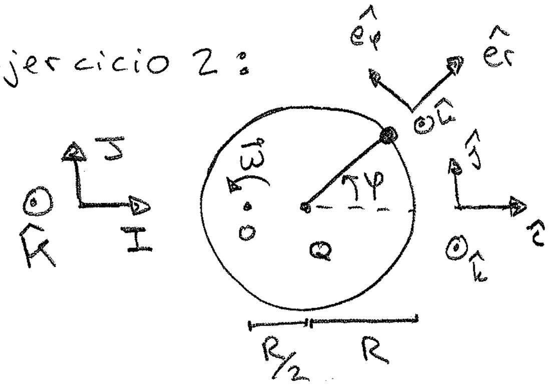
# Problemas de Clase: Práctico 1

Ejercicio 1. Ver OpenFing clase 2 desde el minuto 14:
Notas sección 1.2.2 (pág 8)

Ejercicio 2:




Selecciono el/los sistemas de referencia

$S\{O, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ fijo/absoluto

$S_1\{Q, \hat{\imath}, \hat{j}, \hat{k}\}$

$S_2\{Q, \hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$

Uso THs Roverbal y Coriolis $\rightarrow$ Asigno Roles a $S_1$ y $S_2$

$S_1$ sistema relativo
$S_2$ sistema auxiliar

obs: Hay otras posibilidades para los roles de sist. relativo y auxiliar

$\vec{\omega}$? es la velocidad angular de $S_1$ respecto de $S$

$\rightarrow \vec{\omega} = \omega \hat{k}$

En $S_1$ la partícula describe un movimiento circular.

$\vec{r}' = R\,\hat{e}_r$

$\vec{v}' = R\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$

$\vec{a}' = -R\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_r + R\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$

obs. podría usar la base $\hat{\imath}, \hat{j}$ pero es más sencillo usar la base $\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi$ debo tener cuidado con $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$

Movimiento del centro (punto Q). Describe movimiento circular

$\vec{r}_Q = \frac{R}{2}\hat{\imath}$ $\quad \vec{v}_Q = \frac{R}{2}\omega\hat{j}$ $\quad \vec{a}_Q = -\frac{R}{2}\omega^2\hat{\imath}$

Términos de transporte: $\vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \omega\hat{k} \wedge R\hat{e}_r = \omega R\,\hat{e}_\varphi$

$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \omega\hat{k} \wedge \omega R\,\hat{e}_\varphi = -\omega^2 R\,\hat{e}_r$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$ pues $\omega$ cte y $\hat{k}$ pertenece al sistema absoluto

coriolis. $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2\omega\hat{k} \wedge R\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = -2\omega R\dot{\varphi}\,\hat{e}_r$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_T = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{R}{2}\omega\hat{j} + \omega R\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_T + \vec{a}_c = -R\dot{\varphi}^2\hat{e}_r + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \frac{R}{2}\omega^2\hat{i} - R\omega^2\hat{e}_r - 2\omega R\dot{\varphi}\hat{e}_r$$

simplificando $\rightarrow \boxed{\vec{a} = R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \frac{R}{2}\omega^2\hat{i} - R(\omega+\dot{\varphi})^2\hat{e}_r}$

Otra opción posible es derivar directamente el vector posición.

$\vec{\omega}_{s_1} = \omega\hat{k}$

$$\vec{r} = \frac{R}{2}\hat{i} + R\hat{e}_r \qquad \vec{v} = \frac{R}{2}\dot{\hat{i}} + R\dot{\hat{e}}_r$$

$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega}_{s_1} \wedge \hat{i} = \omega\hat{j}$

$\dot{\hat{j}} = \vec{\omega}_{s_1} \wedge \hat{j} = -\omega\hat{i}$

$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega}_{s_2} \wedge \hat{e}_r = (\omega+\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi$

$\dot{\hat{e}}_\varphi = \vec{\omega}_{s_2} \wedge \hat{e}_\varphi = -(\omega+\dot{\varphi})\hat{e}_r$

$\vec{\omega}_{s_2} = \vec{\omega}_{s_1} + \vec{\omega}_{s_2 s_1}$

Adición de vel angulares

$\vec{\omega}_{s_1} = \omega\hat{k}$

$\vec{\omega}_{s_2 s_1} = \dot{\varphi}\hat{k}$

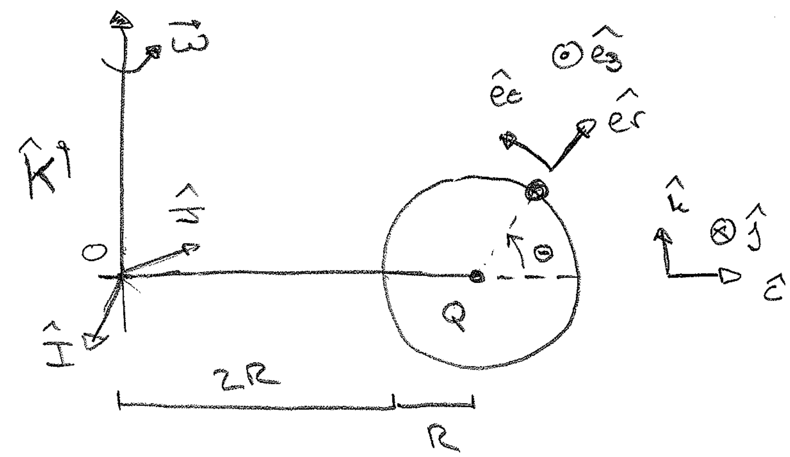
vel angular de $s_2$ respecto a $s_1$

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{R}{2}\omega\hat{j} + R(\omega+\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{R}{2}\omega\dot{\hat{j}} + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + R(\omega+\dot{\varphi})\dot{\hat{e}}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{R}{2}\omega^2\hat{i} + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - R(\omega+\dot{\varphi})^2\hat{e}_r}$$

Ejercicio 3




Sistemas de referencia. La partícula se mueve en la guía circular y acompaña el movimiento de la guía

$S \{O, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ fijo $\qquad$ obs. $\hat{K} \equiv \hat{k}$

$S_1 \{O, \hat{c}, \hat{j}, \hat{k}\}$ relativo $\rightarrow \vec{\omega}_{S_1} = \omega \hat{K}$

$S_2 \{Q, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_3\}$ auxiliar $\quad \vec{\omega}_{S_2} = \vec{\omega}_{S_1} + \vec{\omega}_{S_2 S_1} = \omega \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_3$

$\vec{\omega}_{S_2 S_1} = \dot{\theta} \hat{e}_3$

$\hookrightarrow$ vel. angular de $S_2$ respecto a $S_1$

Roverbal y Coriolis:

$\vec{r}\,' = 3R \hat{c} + R \hat{e}_r$ $\quad$ (uso la base auxiliar pero $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ se mueven en el sistema relativo)

$\vec{v}\,' = R \dot{\theta} \hat{e}_\theta$ $\quad \rightarrow \hat{c}$ es fijo en el sistema relativo

$\vec{a}\,' = R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \hat{e}_r$

Transporte $\quad$ O es el origen de S y $S_1$ $\rightarrow \vec{r}_O = \vec{\emptyset}$ vector nulo.

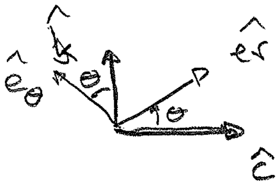
$\vec{v}_O = \vec{\emptyset}$

$\vec{a}_O = \vec{\emptyset}$

$\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,' = \vec{\omega}_{S_1} \wedge \vec{r}\,' = \omega \hat{K} \wedge (3R\hat{c} + R\hat{e}_r)$

uso $S_1$ como sistema relativo

Para ayudarme en el cálculo proyecto $\hat{e}_r$ (y $\hat{e}_\theta$) en la base $S_1$




$\hat{e}_r = \cos\theta\, \hat{c} + \sin\theta\, \hat{k}$ $\quad \omega \hat{K} \wedge (3R\hat{c} + R(\cos\theta\, \hat{c} + \sin\theta\, \hat{k}))$

$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\, \hat{c} + \cos\theta\, \hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \omega \underset{\hat{k}}{\overset{\text{"}}{\hat{k}}} \wedge \left(R(3+\cos\theta)\hat{i} + R\sin\theta\hat{k}\right) = \omega R\left((3+\cos\theta)\hat{j}\right)$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \omega\hat{k} \wedge \omega R\left((3+\cos\theta)\hat{j}\right) = -\omega^2 R(3+\cos\theta)\hat{i}$$

$$\mathring{\vec{\omega}} = \mathring{\vec{\omega}}_{s_1} = \vec{\emptyset} \quad \text{por letra}$$

$$\text{Coriolis} \rightarrow \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2\,\vec{\omega}_{s_1} \wedge R\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$= 2\omega\hat{k} \wedge R\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{k}\right)$$

$$= 2\omega\dot{\theta}R\left(-\sin\theta\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \omega R(3+\cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r - \omega^2 R(3+\cos\theta)\hat{i}$$

$$- 2\omega\dot{\theta}R\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r - \omega^2 R(3+\cos\theta)\hat{i} - 2\omega\dot{\theta}R\sin\theta\,\hat{j}$$

Derivo directamente.

$$\vec{r} = 3R\,\hat{i} + R\,\hat{e}_r$$

$$\vec{v} = 3R\mathring{\hat{i}} + R\mathring{\hat{e}}_r$$

$$\vec{v} = 3R\omega\hat{j} + R\left(\omega\cos\theta\,\hat{j} + \dot{\theta}\hat{e}_\theta\right)$$

$$\mathring{\hat{i}} = \vec{\omega}_{s_1} \wedge \hat{i} = \omega\hat{k} \wedge \hat{i} = \omega\hat{j}$$

$$\mathring{\hat{j}} = \vec{\omega}_{s_1} \wedge \hat{j} = \omega\hat{k} \wedge \hat{j} = -\omega\hat{i}$$

$$\mathring{\hat{e}}_r = \vec{\omega}_{s_2} \wedge \hat{e}_r = \left(\omega\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_3\right) \wedge \hat{e}_r$$

Uso la proyección de $\hat{e}_r$

$$\mathring{\hat{e}}_r = \omega\cos\theta\,\hat{j} + \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\mathring{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega}_{s_2} \wedge \hat{e}_\theta = -\omega\sin\theta\,\hat{j} - \dot{\theta}\hat{e}_r$$

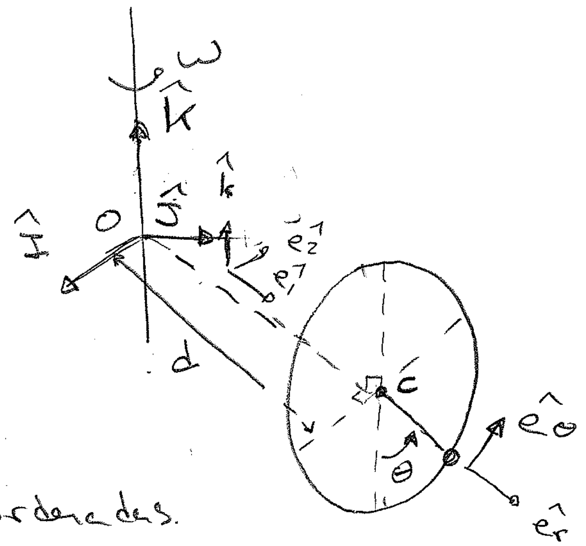
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3R\omega \dot{\hat{j}} + R(-\omega\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} + \omega\cos\theta\,\dot{\hat{j}} + \ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\theta)$$

$$\vec{a} = -3R\omega^2\hat{i} - R\omega\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} - R\omega^2\cos\theta\,\hat{i} + R\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}(\omega\sin\theta\,\hat{j} + \dot{\theta}\,\hat{e}_r)$$

$$\vec{a} = -R\omega^2(3+\cos\theta)\,\hat{i} - 2R\omega\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} + R\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$$

---

Ejercicio 4.




Sistemas de coordenadas.

$S\{O, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ absoluto

$S_1\{O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}\}$ auxiliar

$S_2\{C, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_1\}$ relativo

En $S_2$ la partícula <u>NO</u> tiene movimiento $\hat{e}_r$ sigue a la partícula.

$\vec{r}' = R\hat{e}_r$

$\vec{v}' = \emptyset$

$\vec{a}' = \emptyset$

C describe una circunferencia

$\vec{r}_C = d\,\hat{e}_1$

$\vec{v}_C = d\omega\,\hat{e}_2$

$\vec{a}_C = -d\omega^2\,\hat{e}_1$

$\vec{\omega}_{S1} = \omega\hat{k}$ Obs $\hat{K}$ y $\hat{k}$ coinciden

$\vec{\omega}_{S2} = \vec{\omega}_{S1} + \vec{\omega}_{S2S1}$ $\quad \vec{\omega}_{S2S1} = \dot{\theta}\,\hat{e}_1$

$\vec{\omega}_{S2} = \omega\hat{k} + \dot{\theta}\,\hat{e}_1$

Obs. cuidado porque $\vec{\omega}_{S2}$ está expresado en 2 bases diferentes.

puedo: - descomponer $\hat{e}_1$ a la base S

- reconocer q' $\hat{e}_1$ es móvil y calcular $\dot{\hat{e}}_1$

$$\dot{\vec{\omega}}_{S2} = \underbrace{\dot{\omega}}_{\substack{= \\ 0 \text{ x letra}}}\hat{k} + \omega\underbrace{\dot{\hat{k}}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{versor de la base absoluta}}} + \ddot{\theta}\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_1$$

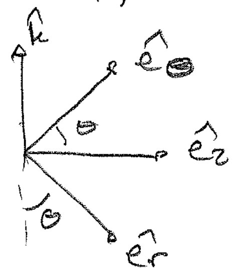
$$\rightarrow \dot{\vec{\omega}}_{S2} = \ddot{\theta}\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega}_{S1} \wedge \hat{e}_1 = \omega\,\hat{e}_2$$

$$\rightarrow \dot{\vec{\omega}}_{S2} = \ddot{\theta}\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\omega\,\hat{e}_2$$

$\vec{\omega}\wedge\vec{r}' = \vec{\omega}_{S2}\wedge\vec{r}' = (\omega\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_1)\wedge R\hat{e_r}$

proyecto $\hat{e_r}$ y $\hat{e_\varphi}$



$\hat{e_r} = -\cos\theta\,\hat{k} + \sin\theta\,\hat{e_2}$

$\hat{e_\theta} = \sin\theta\,\hat{k} + \cos\theta\,\hat{e_2}$

$$\vec{\omega}_{S2}\wedge\vec{r}' = (\omega\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_1)\wedge R(-\cos\theta\hat{k} + \sin\theta\,\hat{e}_2)$$

$$= -\omega R\sin\theta\,\hat{e}_1 + R\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{k}$$

$$= -\omega R\sin\theta\,\hat{e}_1 + R\dot{\theta}\,\hat{e_\theta}$$

$$\vec{\omega}_{S2}\wedge(\vec{\omega}_{S2}\wedge\vec{r}') = (\omega\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_1)\wedge(-\omega R\sin\theta\,\hat{e}_1 + R\dot{\theta}\,\hat{e_\theta})$$

$$= -\omega^2 R\sin\theta\,\hat{e}_2 - R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 - R\dot{\theta}^2\,\hat{e_r}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{S2}\wedge\vec{r}' = (\ddot{\theta}\,\hat{e}_1 + \omega\dot{\theta}\,\hat{e}_2)\wedge R(-\cos\theta\hat{k} + \sin\theta\,\hat{e}_2)$$

$$= +R\ddot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_2 + R\ddot{\theta}\sin\theta\,\hat{k} - \omega\dot{\theta}R\cos\theta\,\hat{e}_1$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_{S2}\wedge\vec{v}' = \emptyset$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T = d\omega\,\hat{e}_2 + R\dot{\theta}\,\hat{e_\theta} - \omega R\sin\theta\,\hat{e}_1$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C = -d\omega^2\,\hat{e}_1 - \omega^2 R\sin\theta\,\hat{e}_2 - R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 - R\dot{\theta}^2\,\hat{e_r}$$

$$+R\ddot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_2 + R\ddot{\theta}\sin\theta\,\hat{k} - \omega\dot{\theta}R\cos\theta\,\hat{e}_1$$

$$\vec{a} = -d\omega^2\,\hat{e}_1 + R\ddot{\theta}\,\hat{e_\theta} - 2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 - R\dot{\theta}^2\,\hat{e_r} - \omega^2 R\sin\theta\,\hat{e}_2$$

Derivo directamente:

$\vec{r} = d\hat{e}_1 + R\,\hat{e_r}$

$\vec{v} = d\dot{\hat{e}}_1 + R\,\dot{\hat{e_r}}$

$\vec{v} = d\omega\hat{e}_2 + R(-\omega\sin\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\,\hat{e_\theta})$

$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega}_{S1}\wedge\hat{e}_1 = \omega\,\hat{e}_2$

$\dot{\hat{e}}_2 = \vec{\omega}_{S1}\wedge\hat{e}_2 = -\omega\,\hat{e}_1$

$\dot{\hat{e_r}} = \vec{\omega}_{S2}\wedge\hat{e_r} = (\omega\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_1)\wedge\hat{e_r}$

$= -\omega\sin\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\,\hat{e_\theta}$

$\dot{\hat{e_\theta}} = (\omega\hat{k} + \dot{\theta}\,\hat{e}_1)\wedge\hat{e_\theta}$

$= -\omega\cos\theta\,\hat{e}_1 - \dot{\theta}\,\hat{e_r}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = d\omega\,\dot{\hat{e}}_2 + R\left(-\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 - \omega\sin\theta\,\dot{\hat{e}}_1 + \ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\theta\right)$$ VII

$$\vec{a} = -d\omega^2\hat{e}_1 - R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 + R\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - R\omega\sin\theta\left(\omega\hat{e}_2\right) \ldots$$

$$+R\dot{\theta}\left(-\omega\cos\theta\,\hat{e}_1 - \dot{\theta}\,\hat{e}_r\right)$$

$$\vec{a} = -d\omega^2\hat{e}_1 - 2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 + R\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - R\omega^2\sin\theta\,\hat{e}_2 - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$