

TÉCNICAS EXPERIMENTALES DE ULTRASONIDO

Laboratorio 3

Caracterización de materiales estructurales

1. Introducción y antecedentes

1.1. Sólidos elástico-lineales

Los materiales sólidos homogéneos e isotrópicos, cuando se ven sometidos a pequeñas tensiones-deformaciones, su comportamiento puede ser modelable de forma elástica-lineal. Esto quiere decir que existe una relación lineal entre la tensión aplicada y la deformación experimentada, y que al aplicar la carga y al liberarla, los efectos ocurridos son idénticos. Bajo estas hipótesis, cuando a una barra alargada de un material se le aplica una tensión σ en su sentido longitudinal, empleamos la Ley de Hooke, que dice

$$\sigma = E\varepsilon$$

donde ε es la deformación en el mismo sentido que σ , E es el módulo elástico de Young, que vincula de forma proporcional tensiones y deformaciones en un estado uniaxial (tensión axial preponderante). Es preciso notar que, en este estado tensional, si la tensión longitudinal es de tracción entonces la deformación longitudinal será también de tracción, pero existirá una deformación transversal de valor igual a $-\nu\varepsilon$, donde ν es el coeficiente de Poisson (para hormigón $\nu \cong 0.2$).

Los materiales homogéneos, isotrópicos y elástico-lineales pueden presentar movimientos (deformaciones) que quedan completamente determinados con dos constantes elásticas independientes, E y ν , que se denominan “constantes elásticas de ingeniería”. Otras veces se usan otros pares de constantes elásticas, como las constantes de Lamé, λ y μ , o el módulo de corte G , pero siempre solo dos de ellas son independientes (en sólidos isotrópicos).

Conocer las constantes elásticas de los materiales estructurales puede ser de interés como control de calidad de las estructuras construidas, en donde se prescribe un mínimo módulo elástico, o a la hora de realizar inspecciones en estructuras existentes en donde se desee evaluar la calidad material. Además, es conocido que existe una relación positiva entre el módulo de Young y la resistencia a rotura, de algunos materiales, por ejemplo, el hormigón [1].

1.2. Propagación de ondas elásticas

Las ondas mecánicas son pulsos de tensión-deformación que se transmiten por un medio, en donde existe transmisión de energía, pero no de masa. Pensar en una onda que viaja por una cuerda tensa dispuesta horizontalmente: cuando se excita uno de los extremos, por ejemplo, el extremo izquierdo, la onda avanza de izquierda a derecha, pero los puntos materiales de la cuerda solo se mueven (oscilan) verticalmente mientras la onda pasa, y no se mueven horizontalmente.

Una de las formas de propagación más simples es la de una onda plana sinusoidal. En este caso hay una dirección definida de propagación y la perturbación que se propaga puede expresarse como

$$u(x, t) = A \sin(\gamma x - \omega t), \quad (1)$$

donde u es el desplazamiento de la partícula al pasar la perturbación según algún sentido predefinido, dado en la coordenada x y tiempo t , A es la máxima amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular, con $\omega = 2\pi f$ (f siendo la frecuencia) y γ es el número de onda, con $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ siendo la longitud de onda).

Las ondas tienen tres parámetros característicos fundamentales: f , la frecuencia a la cual oscilan (vibran) las partículas del sólido cuando la onda pasa, λ , la longitud de onda, definida como la distancia entre dos picos consecutivos de la onda para un instante de tiempo, y v , la velocidad de propagación de la onda (también llamada velocidad de fase). Estas se relacionan mediante

$$v = \lambda f. \quad (2)$$

La ecuación 2 se puede deducir estudiando el argumento del seno de la ecuación 1. Ver Apéndice 2.

En este laboratorio, las ondas mecánicas se pueden generar con transductores de banda angosta, que implica una sola frecuencia f . Luego, como se explica en los próximos párrafos, la velocidad solamente depende del tipo de onda que se esté propagando y de las propiedades materiales del sólido, por lo que λ queda determinada con la ecuación 2 a partir de v y f . Es importante considerar el valor de λ , ya que de esta depende el tipo de onda que se genera, como se verá luego. Además, específicamente en el caso de hormigón, es necesario que $\lambda > TAM$ (tamaño máximo del agregado) para que el medio pueda ser considerado homogéneo frente a la onda. En caso contrario, la onda “ve” al hormigón como un conglomerado heterogéneo de matriz cementicia y agregado grueso. Por esto, en hormigón en general se utilizan transductores centrados en frecuencias de entre 50 kHz y 100 kHz.

En un medio sólido infinito, se puede deducir que solamente pueden existir dos modos de propagación de ondas elásticas [2]. Estas son las ondas de compresión: “ondas primarias” u “ondas P”, y las ondas de corte: “ondas secundarias” u “ondas S”. En una onda P, la polarización de las partículas (el desplazamiento vibratorio producto del paso de la onda) es paralela a la dirección de propagación, y su velocidad, v_p , se obtiene de

$$(v_p)^2 = \frac{E}{\rho} \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (3)$$

donde ρ es la densidad del medio. En una onda S, la polarización de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación, y su velocidad, v_s , se obtiene de

$$(v_s)^2 = \frac{G}{\rho}, \quad (4)$$

donde $G = E/(2(1 + \nu))$.

En la realidad, no existen medios sólidos infinitos. Sin embargo, cuando la longitud de onda λ de una onda es mucho menor que las dimensiones del medio, dicha hipótesis es válida.

Por otra parte, las ondas de barra son aquellas que se propagan en sólidos alargados en donde también se cumpla que $\lambda \gg a$, siendo a : la dimensión transversal de la barra. En ese caso, la velocidad de la onda de barra es v_B , dada por

$$(v_B)^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (5)$$

La norma ASTM A C597 estandariza los ensayos para obtener la velocidad de pulsos ultrasónicos (ondas P) en estructuras de hormigón.

1.3. Vibración por resonancia

Se dice que un elemento sólido elástico-lineal se encuentra en vibración cuando presenta un estado de tensión-deformación que varía con el tiempo. Si tomamos un elemento y le aplicamos una fuerza externa $F(t)$ variable en el tiempo, se dice que el elemento está forzado y su estado de tensión-deformación dinámico va a estar determinado casi exclusivamente por dicha fuerza. Por otro lado, cuando se aplica una fuerza por un instante de tiempo y luego se libera al sistema a que vibre, hablamos de una vibración libre (sin aplicación de fuerzas externas). En este último caso, el sistema tiende a vibrar en ciertas frecuencias que le son más naturales. Dichas frecuencias se llaman frecuencias naturales o frecuencias de resonancia. A su vez, cuando una fuerza dinámica externa, coincide en frecuencia con (o está cerca de) la frecuencia de resonancia del elemento, los desplazamientos que el elemento experimenta se amplifican significativamente, pudiendo llevar a la falla al material o estructural.

Para una barra sólida y homogénea, de densidad ρ , elástica-lineal de módulo E , de largo L y sección constante A , con $L^2 \gg A$, la ecuación que describe el movimiento de una vibración axial es

$$\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2u(x,t)}{dt^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (6)$$

con u siendo los desplazamientos en sentido longitudinal, o lo que es lo mismo

$$u'' = \frac{E}{\rho} \ddot{u}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (7)$$

Las ecuaciones 6 y 7 son la ecuación de movimiento de la barra vibrando axialmente. Ver la deducción de la ecuación de movimiento en el Apéndice 3.

Buscamos soluciones del tipo

$$u(x,t) = U_x(x)V_t(t), \quad (8)$$

donde U_x es una función que solamente depende de la posición x en la barra y V_t solo depende del tiempo t . Utilizamos la ecuación 8, derivamos u dos veces respecto a x y por otro lado dos veces respecto a t , para encontrar $u''(x,t) = U_x''(x)V_t(t)$ y $\ddot{u}(x,t) = U_x(x)\ddot{V}_t(t)$, respectivamente. Luego sustituyendo estas expresiones en la ecuación 7 obtenemos

$$\frac{U_x''}{U_x} = \frac{1}{v_B^2} \frac{\ddot{V}_t}{V_t} = -\gamma^2, \quad (9)$$

donde $v_B^2 = E/\rho$. El término a la izquierda de la primera igualdad en la expresión 9 depende solamente de x , y el término al centro depende solo de t , y como son iguales entre sí, deben entonces ser iguales a una constante, que si se analiza, esta debe ser negativa. Por lo tanto, se define la constante positiva γ que se denomina: número de onda, y se debe hallar dependiendo de las condiciones del fenómeno de vibración. Podemos entonces buscar soluciones armónicas por separado para U_x y para V_t , puesto que $\frac{U_x''}{U_x} = -\gamma^2$ y $\frac{\ddot{V}_t}{V_t} = -\omega^2$ en donde $\omega^2 = v_B^2 \gamma^2$, donde ω es la frecuencia

angular, que también deberá hallarse dependiendo de las condiciones de la vibración. La solución general a la ecuación 7 es entonces

$$u(x, t) = \underbrace{[A_1 \sin(\gamma x) + A_2 \cos(\gamma x)]}_{U_x(x)} \underbrace{[B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)]}_{V_t(t)}, \quad (10)$$

donde las constantes A_1 y A_2 dependen de las condiciones de borde de la barra, usualmente determinadas en $x = 0$ y en $x = L$, y B_1 y B_2 dependen de las condiciones iniciales.

Por ejemplo, supongamos que la barra está libre en ambos extremos. Esto implica que $U'(x) = 0$, en $x = 0$ y en $x = L$. Al sustituir estas condiciones en $U(x)$ de la ecuación 10 se llega a que

$$A_1 = 0$$

$$-A_2 \gamma \sin(\gamma L) \Rightarrow \sin(\gamma L) = 0 \Rightarrow \gamma_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Lo que implica que A_2 queda indeterminada y que existe una familia de γ_n que verifica la solución, por lo que

$$U_{x,n}(x) = A_2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (11)$$

La ecuación 11 establece una familia de funciones que se denomina: modos de vibración. El modo fundamental corresponde a $n = 1$, y se puede observar gráficamente su desplazamiento para un A_2 arbitrario. Los modos 2 y 3 corresponde a utilizar $n = 2$ y $n = 3$ en la ecuación 11. Ver Figura 1.

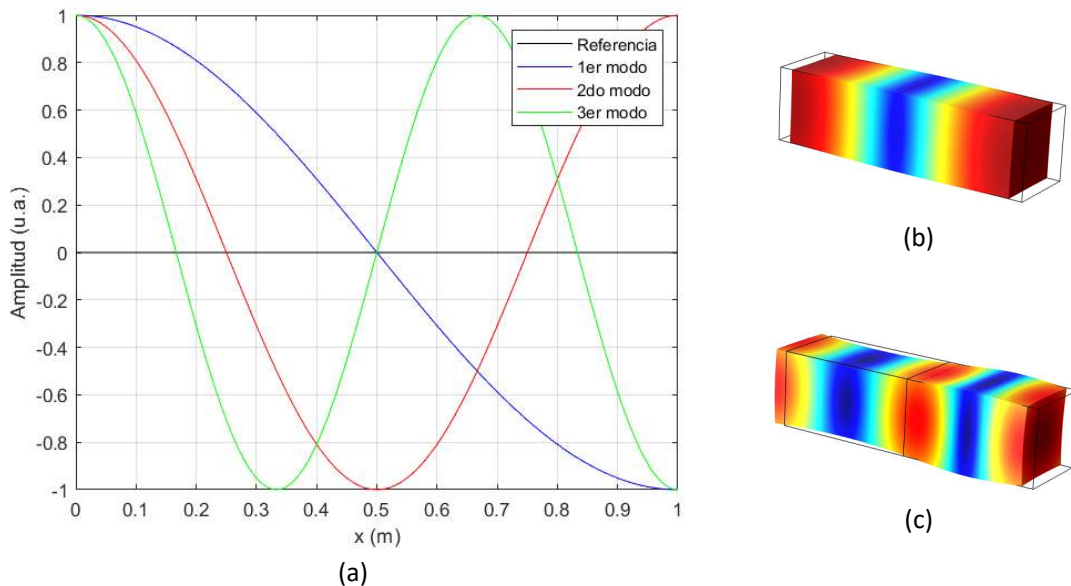


Figura 1: (a) Esquema gráfico 2D de tres primeros modos de vibración axial de una barra de largo 1 m. (b) Esquema gráfico 3D del 1er modo axial. (c) Esquema gráfico del 2do modo axial. Colores fríos implican desplazamientos menores y colores cálidos desplazamientos mayores.

La amplitud de la oscilación queda modulada por la envolvente de la Figura 1. Se llama nodo a los puntos de cero amplitud y antinodos a los puntos de oscilación máxima. La solución de la ecuación simplificada no permite obtener la amplitud real de los nodos, esta depende de la atenuación que

presente el medio. En la Figura 1a se observa que el 1er modo presenta un nodo en el centro de la luz de la barra, es decir, en $x = 0.5$ m, mientras que en ese mismo punto, el 2do modo presenta un antinodo. Estas observaciones son importantes a la hora de excitar un prisma verdadero y a la hora de colocar los sensores, los cuales no queremos ubicarlos cerca de los nodos de los modos que queremos evaluar, pero sí en los nodos de aquellos modos que no queremos que aparezcan en nuestras señales.

Además, para cada modo, es decir para cada valor de γ_n , existe una frecuencia ω_n (por definición), que en este caso vale

$$\omega_n = v_B \left(\frac{n\pi}{L} \right), \quad (12)$$

por lo que cada modo vibra a una frecuencia distinta (a veces, dos modos simétricos pueden tener la misma frecuencia). La frecuencia más baja corresponde a la frecuencia fundamental, con $n = 1$.

En ingeniería, usualmente no utilizamos la frecuencia angular ω , que presenta unidades de rad/s, sino que utilizamos la frecuencia f en Hz, que se obtiene de la relación $\omega = 2\pi f$.

Para el ejemplo mostrado en la Figura 1, y sabiendo que $E = 30$ GPa y $\rho = 2400$ kg/m³, las tres primeras frecuencias de vibración, correspondientes a $n = 1,2,3$, se obtienen usando la ecuación 12, y valen

$$f_1 = 1767 \text{ Hz}, \quad f_2 = 3535 \text{ Hz}, \quad \text{y } f_3 = 5303 \text{ Hz}.$$

En el caso de barras vibrando libremente a torsión y con condiciones de borde libres, sus frecuencias de vibración vienen dadas por

$$\omega_n = v_T \left(\frac{n\pi}{L} \right), \quad (13)$$

con $(v_T)^2 = \frac{GJ}{\rho I_p}$, con G siendo el módulo elástico de corte, J la rigidez torsional, e I_p la inercia polar. Ver el modo de vibración en la Figura 2a.

En el caso de barras vibrando transversalmente libremente (considerando la viga de Bernoulli, suficientemente larga) obtenemos

$$(\omega_n)^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{\rho A}, \quad (14)$$

con I siendo la inercia de la sección, y la vibración con condiciones de borde libres. La misma barra, con condiciones de borde de articulación en ambos extremos (puede girar pero no desplazarse), la frecuencia fundamental vale

$$(\omega_1)^2 \cong \left(\frac{4.730}{L} \right)^4 \left(\frac{EI}{\rho A} \right). \quad (15)$$

La Figura 2b muestra una representación 3D del modo flexional de una barra libre.

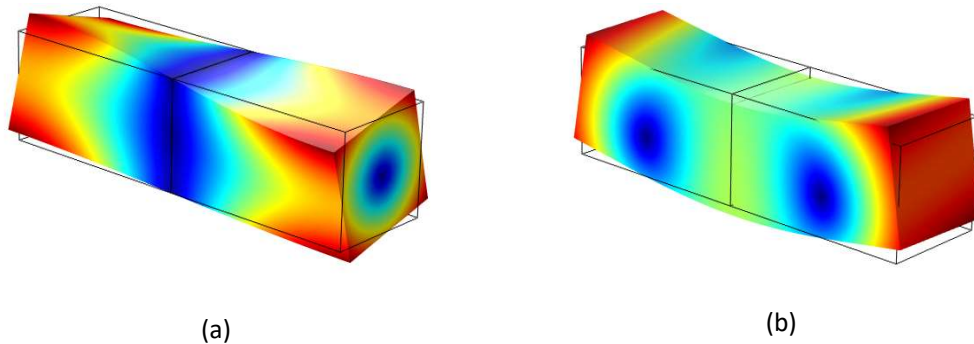


Figura 2: Representación 3D de (a) el primer modo torsional y (b) el primer modo flexional. Ambos casos son barras vibrando en condiciones libres. Colores fríos implican desplazamientos menores y colores cálidos desplazamientos mayores.

La norma ASTM C215 normaliza los ensayos para obtener las frecuencias naturales de vibración, de los modos longitudinales, flexionales y torsionales, de prismas de hormigón.

2. Objetivos

El principal objetivo de este laboratorio es familiarizarse con las técnicas de ensayos no destructivos, basadas en ultrasonido y resonancia, para la caracterización de materiales sólidos como hormigón y madera.

En este laboratorio se presentan dos técnicas: la técnica de ultrasonido directo y la de vibración por resonancia. El objetivo específico es caracterizar una probeta prismática de hormigón antes y después de un ensayo de carga. Para ello, se medirá la velocidad de pulsos ultrasónicos y la frecuencia de resonancia, para calcular el módulo elástico dinámico. Luego se realizará un ensayo de carga axial a compresión, durante el cual se medirán tensiones y deformaciones para obtener el módulo elástico cuasi-estático. Finalmente se volverá a medir el módulo elástico dinámico con ambas técnicas (ultrasonido y resonancia). En una primera instancia se realizará una demostración de los ensayos y luego los estudiantes deberán replicar los ensayos y procesamientos por sí mismos.

Opcional: caracterizar las constantes elásticas de un elemento de madera estructural usando las técnicas mencionadas.

3. Materiales y equipos

- Probeta de hormigón y probeta de madera
- Equipo Pundit para la generación y recepción de ultrasonido
- Equipo Fakopp para la generación y recepción de ultrasonido en madera
- Transductores de ondas P de 54 kHz
- Acelerómetros PCB de diferentes sensibilidades y rangos de frecuencia
- Acondicionador de señales PCB
- Adquisidor y digitalizador NI
- Galgas extensométricas
- Prensa universal de ensayos de carga
- Osciloscopio

4. Procedimientos

4.1. Caracterización previa

Medir las dimensiones geométricas y masa de las probetas.

4.2. Ultrasonido

Realizar el ensayo de pulsos ultrasónicos. Para ello deberá conectar los transductores de onda P de 54 kHz al Pundit, y calibrar el equipo. Luego colocar los transductores sobre dos caras opuestas de la probeta. El contacto entre el transductor y el hormigón debe ser través de un gel acoplante viscoso, como cera o alcohol en gel. Medir el tiempo de vuelo usando el Pundit. Ver también que la amplitud recibida sea apropiada. Calcular la velocidad de propagación de la onda usando el tiempo de vuelo y la dimensión geométrica apropiada. Calcular el módulo elástico dinámico usando la expresión para la velocidad de la onda.

Repetir ensayo en probetas con inclusiones internas y dimensiones desconocidas. Observar las variaciones en los tiempos de vuelo y amplitudes. Discutir y extraer conclusiones.

Opcional 1: Conectar el osciloscopio para ver la onda enviada y recibida (**ATENCIÓN: cuidado con la señal del pundit y lo que se entra al osciloscopio, que está limitado en voltaje**). Discutir cómo determinar el tiempo de vuelo usando la onda recibida ¿Por qué no se puede, o es muy difícil, emplear las técnicas vistas en el Laboratorio 1 para determinar el tiempo de vuelo en probetas de hormigón?

Opcional 2: Usar equipo de ultrasonido Fakopp en probetas de madera.

4.3. Resonancia

Pensar cómo son los principales modos de vibración de una barra prismática con condiciones de borde libre. Ver los modos de vibración en un programa de elementos finitos (COMSOL) provisto por los docentes. Para los modos fundamentales: longitudinal, flexional y torsional, decidir dónde colocar acelerómetros y dónde realizar el impacto.

Ir a la Norma ASTM C215 para revisar donde sugiere colocar los acelerómetros y donde sugiere realizar los impactos para medir la frecuencia de vibración fundamental para cada modo. Discutir similitudes y diferencias.

Utilizar las mediciones y resultados de ultrasonido, y el marco teórico, para estimar las frecuencias fundamentales de resonancia de los tres modos. Seleccionar los acelerómetros a utilizar y la frecuencia de adquisición mínima necesaria. Adherir los acelerómetros a la probeta usando cera. Conectar uno o más acelerómetros al acondicionador de señales con cables coaxiales BNC. Conectar el acondicionador al adquisidor NI con cables coaxiales BNC y el adquisidor a la PC vía USB. Adquirir datos utilizando el programa Signal Express proporcionado por los docentes. Tomar medidas de vibración dándole un pequeño impacto en la probeta, con un impactador esférico, según el modo que se esté midiendo. Ver las señales en tiempo y en frecuencia provistas en tiempo real, discutir y extraer conclusiones probando diferentes posiciones de los acelerómetros y puntos de impacto. Guardar las señales para el post-proceso.

4.4. Ensayo de carga

Los docentes realizarán un ensayo de carga en la prensa universal de ensayos de carga, durante el cual se tomarán medidas cuasi-estáticas de deformaciones y tensiones. Luego, tomar la probeta utilizada en el ensayo de carga y repetir procedimientos de medición de pulsos ultrasónicos y de resonancia. Comparar los nuevos resultados de velocidad de pulsos ultrasónicos y de frecuencia de resonancia con aquellos obtenidos previamente y discutir.

5. Postproceso y cálculos

5.1. Ultrasonido

Para las probetas ensayadas, calcular los parámetros de la onda y discutir qué modo de onda se propagó por el sólido.

Calcular el módulo elástico dinámico a partir de las mediciones de velocidad de propagación del ultrasonido. Comparar los resultados de velocidad del ultrasonido antes y después del ensayo de carga. Extraer conclusiones.

5.2. Resonancia

Tomar las señales temporales medidas y pasarlas al espectro de frecuencia, utilizando la transformada de Fourier. En MatLab, eso se hace utilizando función $abs(fft(x))$, donde x es la señal temporal adquirida. Construir el vector de frecuencias sabiendo que el paso de frecuencias $df = 1/T$, con T siendo el total de tiempo de la señal temporal. Los picos de frecuencia corresponden a las frecuencias de vibración de los modos excitados. Seleccionar el modo deseado y registrar dicha frecuencia. La amplitud a la cual se da el pico no importa. Con dicha frecuencia, calcular el módulo de elasticidad dinámico. Comparar el módulo de elasticidad dinámico obtenido en resonancia con el obtenido con la técnica de ultrasonido. Comparar el módulo de elasticidad dinámico obtenido con la técnica de resonancia, antes y después del ensayo de carga.

6. Referencias

1. EHE-08 Instrucción de Hormigón Estructural, España, 2008.
2. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications Inc. New York, 1975.
3. Malhotra V.M. y Carino N.J., Handbook on Nondestructive Testing of Concrete, CRC Press Second Edition, 2003.

Apéndice 1: Descripción de los equipos a utilizar

Pundit

Este equipo marca Proceq, modelo Pundit Lab con 2 transductores de 54 kHz, uno para la transmisión y otro para la recepción del pulso de ultrasonido, una unidad de procesamiento central, cables, una barra de calibración y un acoplante.



Figura A1.1. Vista del PUNDIT con sus dos transductores de ultrasonido.

La unidad de control inicia un circuito de tiempo y manda una señal eléctrica al transductor que, mediante un cristal piezoeléctrico, convierte la energía eléctrica en una onda mecánica de baja energía y alta frecuencia. Los transductores son unidos al material mediante un acoplante (silicona, gel o cera) para eliminar el aire y maximizar la transmisión de energía. La onda viaja, se propaga a través del material hasta el transductor receptor, que convierte la señal mecánica en energía eléctrica. El tiempo de transmisión es mostrado en la pantalla de la unidad de control. Como la distancia entre sensores es conocida o se puede establecer, se calcula la velocidad de la onda de compresión, como el cociente entre la distancia entre los sensores y el tiempo que le lleva a la onda viajar desde el emisor al receptor.

Fakkop

Este equipo mide el tiempo de propagación de la onda acústica (o mecánica) en la madera, generada por el impacto de un martillo sobre uno de los sensores (marcado con un anillo de color rojo), siendo recibida por el otro sensor. Conociendo la distancia entre los dos se calcula la velocidad de propagación de la onda.



Figura A1.2. Vista del Fakkop o *Microsecond Timer* con sus dos sensores.



Figura A1.3. Ejemplo de uso del Fakopp.

Acelerómetros

Los acelerómetros miden variación o la aceleración del movimiento de una estructura. La onda propagada a través de la estructura incide con una fuerza sobre el acelerómetro, constituido por un piezoeléctrico que transforma la energía mecánica que recibe, en energía eléctrica. Así mediante soft se recibe en la PC una señal temporal que puede ser analizada posteriormente.

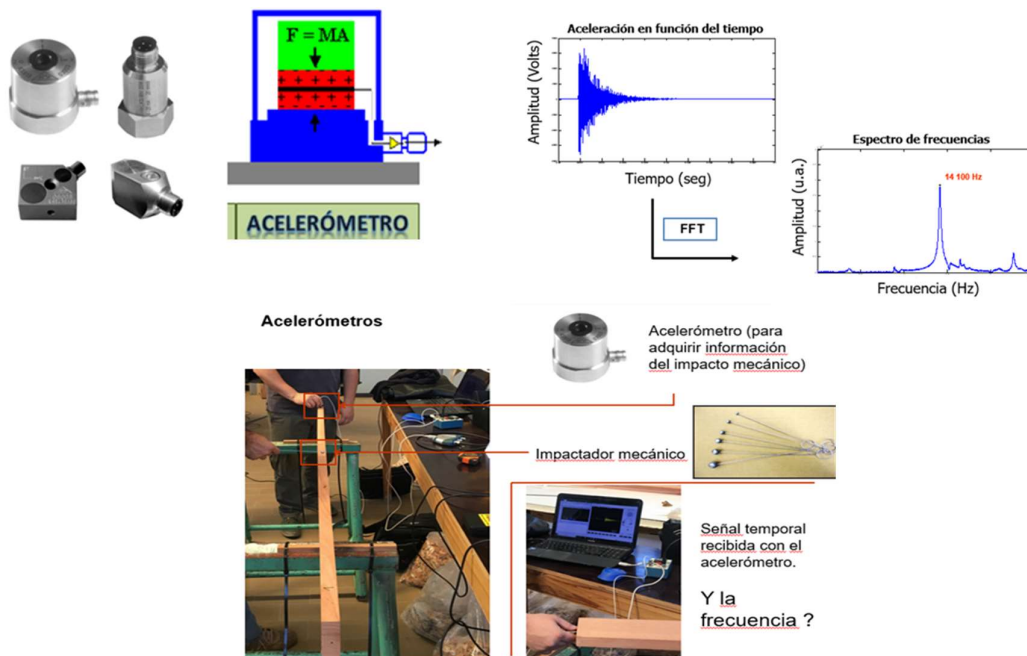
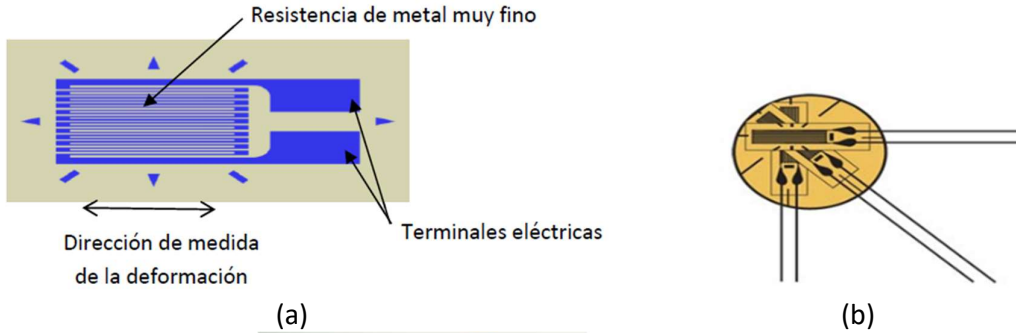


Figura A1.4: Acelerómetros

Galgas extensométricas

Las galgas son resistencias variables (elementos piezo-resistivos) cuyo parámetro característico varía con la deformación producida sobre ella. El circuito eléctrico comúnmente utilizado para trabajar con galgas es el puente de Wheatstone, en sus tres variantes: con una, dos o cuatro galgas.



Model P3 Strain Indicator and Recorder
 Instrumento usado para conectar las galgas extensométricas y obtener los valores de las deformaciones a las que están sujetas.
 Este equipo específico consta de CUATRO puentes de Wheatstone.

(c)

Figura A1.5: (a) Galga extensométrica unidireccional. (b) Tres galgas extensométricas (roseta) midiendo en tres direcciones distintas. (c) Puente de Wheatstone para conectar las galgas y transformar a mediciones de deformaciones.

Un tipo especial de galgas extensométricas son las denominadas rosetas. Una roseta es un grupo de tres galgas fabricadas y diseñadas para formar ángulos fijos entre sí con gran precisión y cuidado en este aspecto. Este hecho hace que sea posible obtener el estado de deformaciones en el plano a través de las medidas de deformación en tres direcciones conocidas con los ángulos dados por sus fabricantes.

Apéndice 2: Deducción de relación entre parámetros de onda

Tenemos la ecuación de propagación de una onda plana sinusoidal dada por

$$u(x, t) = A \sin(\gamma x - \omega t). \quad (\text{A2.1})$$

Llamémosle ϕ al argumento del seno, es decir $\phi = \gamma x - \omega t$. Decir que una onda “se propaga” implica decir que el pulso que ocurre en un x_1, t_1 es idéntico al que ocurre en un x_2, t_2 . Esto es lo mismo a decir que $\phi_1 = \phi_2$, por lo que

$$\gamma x_1 - \omega t_1 = \gamma x_2 - \omega t_2 \Rightarrow$$

$$\gamma(x_1 - x_2) = \omega(t_1 - t_2) \Rightarrow$$

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Reconociendo que $\Delta x/\Delta t$ es una velocidad v , nos queda

$$v = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f.$$

Apéndice 3: Ecuación de movimiento de una barra vibrando axialmente

Estudiamos la vibración axial de una barra fina de sección de área A , largo L y densidad ρ . Tomamos un trozo diferencial de la barra de masa dm y largo dx y estudiamos su equilibrio dinámico (2da Ley de Newton). Como muestra la Figura A3.1, actúan fuerzas F y $F + dF$ de cada lado del trozo diferencial.

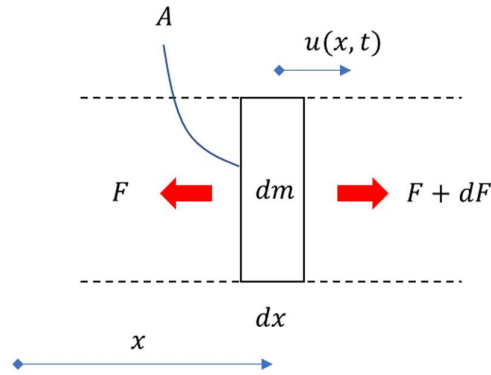


Figura A3.1: Equilibrio dinámico de un trozo diferencial de una barra fina.

$$F + dF - F = dm \ddot{u} \Rightarrow dF = dm \ddot{u}, \quad (\text{A3.1})$$

con $\ddot{u} = d^2u/dt^2$. Observar que $dF = A d\sigma$ (fuerza igual a tensión por área transversal) y que $dm = \rho A dx, \Rightarrow A d\sigma = \rho A dx \ddot{u}, \Rightarrow$

$$d\sigma = \rho dx \ddot{u}. \quad (\text{A3.2})$$

Pero aplicando la Ley Hooke, $d\sigma = d(E\varepsilon) \Rightarrow$

$$E \frac{d\varepsilon}{dx} = \rho \ddot{u}. \quad (\text{A3.3})$$

Recordar que $\varepsilon = du/dx$, entonces obtenemos la llamada ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{A3.4})$$

o lo que es lo mismo

$$u'' = \frac{E}{\rho} \ddot{u}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (\text{A3.5})$$