

CAPÍTULO 17

ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

La mayor parte de la materia puede ser convenientemente descrita clasificándola dentro de una de las tres fases: sólida, líquida, o gaseosa. Los sólidos y los líquidos (llamados también materia condensada) tienen cierto grupo de propiedades en común; por ejemplo, son relativamente incompresibles a la vez que su densidad permanece relativamente constante cuando varía su temperatura (manteniendo también otras propiedades, como la presión, constantes). Por otra parte, los gases son fácilmente compresibles y su densidad cambia de manera sustancial con la temperatura cuando la presión se mantiene constante.

Desde una perspectiva diferente, podemos agrupar en forma conjunta a los gases y a los líquidos bajo la denominación común de fluidos. La palabra "fluido" proviene del latín fluere, que significa "fluir o manar". Los fluidos fluyen, por ejemplo, para adquirir la forma del recipiente que los contenga; los sólidos no comparten esta propiedad. En el sólido, los átomos permanecen relativamente fijos en su ordenamiento; en el fluido, los átomos pueden moverse entre sí.

En este capítulo consideraremos las propiedades de los fluidos en reposo y las leyes por las que se rigen. En el capítulo siguiente estudiaremos las propiedades dinámicas de los fluidos en movimiento.

17-1 FLUIDOS Y SÓLIDOS

En nuestra experiencia cotidiana tenemos una idea clara de la distinción entre fluidos y sólidos pero, como suele suceder en la ciencia, las experiencias cotidianas se obtienen dentro de circunstancias muy limitadas, y extrapolarlas demasiado lejos puede conducir a conclusiones incorrectas. Por ejemplo, partiendo de la experiencia cotidiana podemos proponer la distinción siguiente: el sólido conserva su forma pero el fluido fluye para adoptar la forma de su recipiente. Por otra parte, ciertas sustancias no pueden ser clasificadas con tanta facilidad. Por ejemplo, el vidrio debería clasificarse como fluido; aunque parece que mantiene su forma, el vidrio fluye durante un periodo grande de tiempo. Las ventanas de vidrio que han permanecido durante muchos años son, si las medimos más gruesas en la parte inferior que en la parte superior.

Otra forma un tanto intermedia es la sustancia plástica, la cual puede moldearse o dársele forma. Consideremos, por ejemplo, la arcilla. Mantiene su forma relativamente bien, y nos resistiríamos a clasificarla como un fluido, pero al aplicar *presión* sobre ella podemos forzarla a

adoptar la forma de su recipiente. Puede hacerse que otras sustancias, a las que podríamos identificar como sólidas en la experiencia ordinaria, fluyan bajo una presión lo bastante elevada.

Por supuesto, estamos familiarizados con el cambio de estado de la materia al cambiar su temperatura, que podría fundir o evaporar esa materia. Pero estamos menos familiarizados con el cambio de estado de la materia cuando cambia la presión sobre ella, en parte porque el intervalo de presiones necesarias está, generalmente, más allá de nuestra experiencia normal. Por ejemplo, el aluminio puede estirarse para hacer de él alambre si lo hacemos pasar a través de un orificio pequeño y puede moldearse de formas diversas sometiéndolo en un troquel, a la acción de una presión elevada. Las capas de roca en plegamientos profundos que vemos a menudo en las carreteras que cruzan una montaña, son evidencia de que la "roca sólida" llega a fluir también bajo una presión suficientemente elevada.

Existe aún otra fase de la materia que no puede fácilmente clasificarse como sólido, líquido, o gas. Un *plasma* es un gas en el que los átomos están ionizados, de modo que forman una mezcla eléctricamente neutra que con-

tiene números iguales de iones cargados positivamente y electrones cargados negativamente. Las fuertes interacciones eléctricas que se dan con el entorno y entre los átomos hacen que su comportamiento sea bastante diferente al de un gas ordinario. El gas que hay dentro de una lámpara fluorescente se convierte en plasma cuando la lámpara se enciende. En una escala mucho más grande, el Sol y las demás estrellas son bolas de plasma y, así, mucha de la materia del Universo existe en esta forma. Crear y confinar plasmas de tamaño suficiente en el laboratorio son los obstáculos principales que encaran los investigadores que buscan maneras de aprovechar las reacciones de la fusión controlada para generar energía eléctrica.

Microscópicamente, ¿cómo difieren estas formas de materia unas de otras? Los sólidos son capaces de soportar una variedad de esfuerzos, como ya hemos visto en el capítulo 14. Estos esfuerzos incluyen la tensión, la compresión y el corte, entre otros. Los sólidos pueden soportar y transmitir tales esfuerzos debido a que existen fuerzas relativamente fuertes entre sus moléculas y porque tienen un *orden de largo alcance*, es decir, sus moléculas están dispuestas de manera ordenada, como los tabiques en una pared, de modo que no se puede desplazar a un átomo fácilmente de un lugar sin desplazar también a muchos otros átomos.

En los líquidos, las distancias intermoleculares son generalmente más grandes que en los sólidos; de aquí que las fuerzas intermoleculares, que varían fuertemente con la distancia, tiendan a ser más débiles en los líquidos que en los sólidos. Muchos líquidos son, como los sólidos, relativamente incompresibles, de modo que los líquidos soportan y transmiten esfuerzos de compresión; como lo veremos más adelante en este capítulo, los sistemas hidráulicos dependen de esta propiedad de los fluidos. Hasta un grado limitado, los líquidos pueden soportar también esfuerzos de tensión, lo cual estudiaremos en la sección 17-6. Sin embargo, los líquidos no pueden soportar esfuerzos cortantes porque las capas del líquido se deslizan entre sí con gran facilidad.

En los gases, las moléculas interactúan sólo débilmente, por lo que son incapaces de transmitir esfuerzos estáticos de tensión o de corte; así, son por lo general mucho más compresibles que los sólidos o los líquidos. Sin embargo, en un plasma existen fuerzas electromagnéticas de largo alcance entre las partículas. Por lo tanto, si bien un plasma parece hallarse en estado gaseoso tiene mayor similitud con un líquido en su capacidad para transmitir esfuerzos.

Hemos desarrollado un grupo de leyes mecánicas que nos permiten analizar la dinámica de partículas individuales, y hemos desarrollado también otro grupo similar de leyes que nos permiten analizar la dinámica de conjuntos de partículas en sólidos rígidos. Es importante observar que lo hicimos aun sin una teoría que explicase las fuerzas entre las partículas de que está compuesto un sólido. Aun

para el caso de los sólidos que no pueden ser considerados como perfectamente rígidos, tenemos una teoría de la elasticidad (véase el capítulo 14).

La mecánica de los fluidos adquiere un planteamiento similar. Al igual que la mecánica de los cuerpos rígidos, la primera se deriva de las leyes de Newton. Para los fluidos, como para los sólidos, es conveniente desarrollar una formulación especial de estas leyes.

17-2 PRESIÓN Y DENSIDAD

Presión

A un sólido podemos aplicarle una fuerza a un ángulo arbitrario con su superficie. En la sección 14-5 hemos considerado el efecto del esfuerzo cortante sobre un sólido, donde la fuerza actúa en el plano de un elemento de área de la superficie. La capacidad de fluir hace que el fluido sea incapaz de soportar un esfuerzo cortante, y en condiciones estáticas la única componente de la fuerza que debe tomarse en cuenta es la que actúa en forma *normal* o *perpendicular* a la superficie del fluido. Sin importar cuál sea la forma del fluido, las fuerzas entre el interior y el exterior actúan en todas partes en ángulo recto con las capas frontera del fluido.

La magnitud de la fuerza normal por unidad de área superficial se llama *presión*. La presión es una cantidad escalar; no tiene propiedades direccionales. Por ejemplo, cuando nadamos bajo el agua ésta ejerce una presión sobre nuestro cuerpo en todas direcciones. Incluso si la presión es producida por una fuerza que tiene propiedades direccionales y es un vector, la presión es, en sí misma, un escalar.

Microscópicamente, la presión ejercida por un fluido sobre una superficie en contacto con él es causada por colisiones de moléculas del fluido con la superficie. Como resultado de una colisión, la componente del ímpetu de una molécula perpendicular a la superficie se invierte. La superficie debe ejercer una fuerza impulsiva sobre la molécula y, según la tercera ley de Newton, las moléculas ejercen una fuerza igual perpendicular a la superficie. El resultado neto de la fuerza de reacción ejercida por muchas moléculas sobre la superficie da origen a la presión en la superficie. En el capítulo 23 desarrollaremos este cuadro más cuantitativamente para el caso de los gases.

Un fluido sometido a presión ejerce una fuerza hacia afuera sobre cualquier superficie que esté en contacto con él. Consideremos una superficie cerrada que contenga a un fluido, como en la figura 1. El fluido que está dentro de la superficie empuja al entorno. Un elemento pequeño de la superficie puede estar representado por el vector ΔA , cuya magnitud es numéricamente igual al elemento de

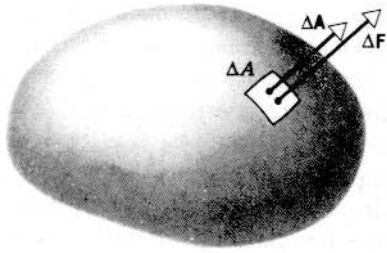


Figura 1 Un elemento de superficie ΔA puede ser representado por un vector $\Delta \mathbf{A}$ de longitud igual a la magnitud del área del elemento y dirección perpendicular al elemento. El fluido encerrado por la superficie ejerce una fuerza $\Delta \mathbf{F}$ contra el elemento. La fuerza es perpendicular al elemento y por lo tanto paralela a $\Delta \mathbf{A}$.

área y cuya dirección es a lo largo de la normal a la superficie hacia afuera. La fuerza $\Delta \mathbf{F}$ ejercida por el fluido contra esta superficie depende de la presión p de acuerdo con

$$\Delta \mathbf{F} = p \Delta \mathbf{A}. \quad (1)$$

Puesto que los vectores que representan a la fuerza y al área son paralelos, podemos escribir la presión en términos de la relación escalar

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (2)$$

Tomamos al elemento ΔA como lo suficientemente pequeño para que la presión p definida según la ecuación 2 sea independiente del tamaño del elemento. En general, la presión puede variar de un punto a otro de la superficie.

La presión tiene las dimensiones de fuerza dividida por área, y una unidad común para la presión es N/m^2 . Esta unidad se denomina *pascal* (abreviatura Pa; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) en el SI. Puede encontrarse una amplia variedad de otras unidades. En Estados Unidos los medidores de la presión en las llantas de los vehículos dan una lectura en lb/in^2 . La presión ejercida por la atmósfera de la Tierra al nivel del mar se designa como 1 atmósfera (atm; $1 \text{ atm} = 14.7 \text{ lb/in}^2 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$, exactamente). Debido a que el pascal es una unidad pequeña ($1 \text{ Pa} \approx 10^{-5} \text{ atm}$), los pronosticadores del tiempo usan a menudo la unidad bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, o 1 atm aproximadamente) para expresar la presión atmosférica. Otra unidad común se basa en la presión ejercida en su base por una columna vertical de mercurio de una altura específica; una columna de 760 mm de altura a una temperatura de 0°C en una localidad donde $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ ejerce una presión igual a la de la atmósfera, y así tenemos la equivalencia de $760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm}$. La altura de esta columna en pulgadas es de 29.9 in; en Estados Unidos, los barómetros comunes (y los pronosticadores del tiempo en la TV) dan la presión atmosférica en pulgadas de mercurio. Las lecturas de

presión en el laboratorio se expresan a menudo en la unidad *torr*, que es la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura bajo las condiciones especificadas.

La tabla 1 da algunas presiones representativas en unidades pascal. El término “sobrepresión” indica un valor excesivo de la presión atmosférica normal. Obsérvese que en el laboratorio podemos producir presiones que varían dentro de 22 órdenes de magnitud. En el apéndice G el lector hallará los factores de conversión necesarios para convertir las mediciones de la presión de un grupo de unidades a otro.

Densidad

La densidad ρ de un elemento pequeño de cualquier material es la masa Δm del elemento dividida entre su volumen ΔV :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (3)$$

La densidad en un punto es el valor límite de esta razón cuando el elemento de volumen se hace pequeño. La densidad no tiene propiedades direccionales y es un escalar.

Si la densidad de un objeto tiene el mismo valor en todos los puntos, la densidad del objeto es igual a la masa de todo el objeto dividida por su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (4)$$

La densidad de un material en general depende de factores ambientales, incluyendo la presión y la temperatura. En los líquidos y en los sólidos, la variación de la densidad es muy pequeña dentro de intervalos grandes de presión y de temperatura, y en muchas aplicaciones podemos considerar a la densidad como una constante. La

TABLA 1 ALGUNAS PRESIONES

Sistema	Presión (Pa)
Centro del Sol	2×10^{16}
Centro de la Tierra	4×10^{11}
Mayor presión sostenida en el laboratorio	1.5×10^{10}
La fosa oceánica más profunda	1.1×10^8
Tacones puntiagudos sobre una pista de baile	2×10^7
Llanta de automóvil (sobrepresión)	2×10^5
Atmósfera al nivel del mar	1.0×10^5
Presión normal de la sangre [†]	1.6×10^4
El sonido más fuerte tolerable [‡]	30
El sonido más débil detectable [‡]	3×10^{-5}
El mejor vacío en el laboratorio	10^{-12}

[†] La sobrepresión sistólica, correspondiente a 120 mm Hg en el esfigmomanómetro del médico.

[‡] Sobrepresión en el tímpano del oído, a 1000 Hz.

TABLA 2 ALGUNAS DENSIDADES

Material u objeto	Densidad (kg/m ³)
Espacio interestelar	10 ⁻²⁰
El mejor vacío en el laboratorio	10 ⁻¹⁷
Aire: 20° C y 1 atm	1.21
20° C y 50 atm	60.5
Espuma de estireno	1 × 10 ²
Hielo	0.917 × 10 ³
Agua: 20° C y 1 atm	0.998 × 10 ³
20° C y 50 atm	1.000 × 10 ³
Agua de mar: 20° C y 1 atm	1.024 × 10 ³
Sangre entera	1.060 × 10 ³
Hierro	7.8 × 10 ³
Mercurio	13.6 × 10 ³
La Tierra: promedio	5.5 × 10 ³
núcleo	9.5 × 10 ³
corteza	2.8 × 10 ³
El Sol: promedio	1.4 × 10 ³
núcleo	1.6 × 10 ⁵
Estrella enana blanca (núcleo)	10 ¹⁰
Núcleo del uranio	3 × 10 ¹⁷
Estrella de neutrones (núcleo)	10 ¹⁸
Hoyo negro (1 masa solar)	10 ¹⁹

tabla 2 presenta algunas densidades representativas, que varían en alrededor de 21 órdenes de magnitud en el laboratorio y en casi 40 órdenes de magnitud desde los objetos más densos del Universo (un hoyo negro hipotético) hasta el casi vacío del espacio mismo.

En analogía con la exposición del concepto esfuerzo contra deformación unitaria de la sección 14-5, un cambio Δp en la presión aplicada a cualquier material es un esfuerzo. La deformación unitaria correspondiente es un cambio de volumen, el cual escribimos como: $\Delta V/V$. La relación entre esfuerzo y deformación unitaria se llama **módulo volumétrico B**:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (5)$$

En esta definición se inserta el signo menos para que B sea una cantidad positiva, porque Δp y ΔV tienen signos opuestos. Esto es, un *aumento* de presión ($\Delta p > 0$) causa una *disminución* de volumen ($\Delta V < 0$). Obsérvese que B tiene la misma dimensión que la presión, porque $\Delta V/V$ es una cantidad sin dimensión.

Si el módulo volumétrico de un material es grande, entonces (según la Ec. 5) un cambio grande de presión Δp produce únicamente un cambio pequeño en su volumen. En este caso, podemos considerar al material como si fuese prácticamente incompresible. El módulo volumétrico del agua, por ejemplo, es de $2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. A la presión en el fondo del Océano Pacífico ($4.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, alrededor de 400 atm), el cambio relativo de volumen causado por la presión es de sólo 1.8%. Los sólidos tienen por lo general módulos volumétricos más elevados que los líquidos, a causa del acoplamiento mayor de los átomos en los

sólidos. Una presión dada produce entonces un cambio más pequeño en el volumen de un sólido que en el de un líquido. En circunstancias ordinarias, podemos por tanto considerar como incompresibles tanto a los sólidos como a los líquidos.

Si B es pequeño, el volumen puede ser cambiado por un cambio de presión modesto, y se dice que el material es compresible. Los gases típicos tienen módulos volumétricos de alrededor de 10^5 N/m^2 . Un pequeño cambio de presión de 0.1 atm puede cambiar el volumen de un gas en un 10%. Así, los gases son fácilmente compresibles.

17-3 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO EN REPOSO

Si un fluido está en equilibrio, cada porción del fluido está en equilibrio. Es decir, tanto la fuerza neta como la torca neta sobre cada elemento del fluido debe ser cero. Consideremos un pequeño elemento de volumen del fluido sumergido dentro del cuerpo del fluido. Consideremos que este elemento tenga la forma de un disco delgado y esté a una distancia y y arriba de algún nivel de referencia, como se muestra en la figura 2a. El espesor del disco es dy y cada cara tiene un área A . La masa de este elemento es $dm = \rho dV = \rho A dy$, y su peso es $(dm)g = \rho g A dy$. Las fuerzas ejercidas sobre el elemento por el fluido que lo rodea son perpendiculares a su superficie en cada punto (Fig. 2b).

La fuerza horizontal resultante es cero porque el elemento no tiene aceleración horizontal. Las fuerzas horizontales se deben únicamente a la presión del fluido, y por simetría la presión debe ser la misma en todos los puntos comprendidos en un plano horizontal en y .

El elemento de fluido no estará acelerado en dirección vertical, de modo que la fuerza vertical resultante sobre él debe ser cero. En la figura 2c se muestra un diagrama de cuerpo libre del elemento de fluido. Las fuerzas verticales son debidas no sólo a la presión del fluido que lo rodea en sus caras, sino también al peso del elemento. Si tomamos a p como la presión en la cara inferior y $p + dp$ como la presión en su cara superior, la fuerza hacia arriba es pA , y las fuerzas hacia abajo son $(p + dp)A$ y el peso del elemento $(dm)g = \rho g A dy$. De aquí que, para el equilibrio vertical,

$$\sum F_y = pA - (p + dp)A - \rho g A dy = 0,$$

de donde obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \quad (6)$$

Esta ecuación nos dice cómo varía la presión con la elevación sobre cierto nivel de referencia en un fluido en

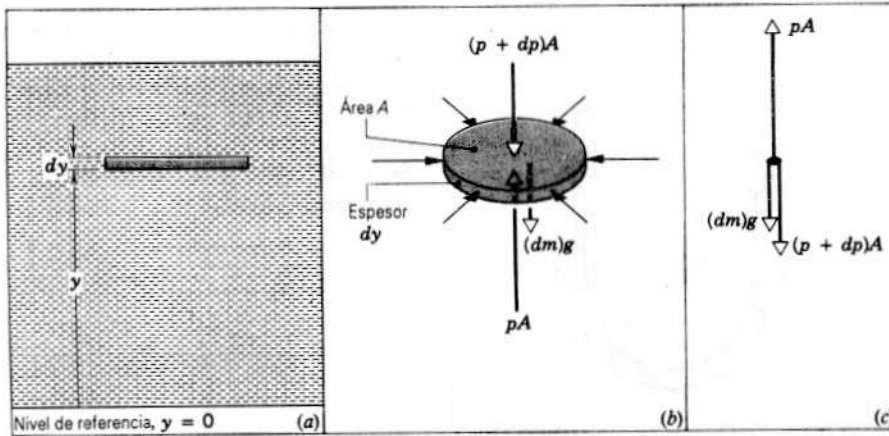


Figura 2 (a) Un pequeño elemento de volumen del fluido en reposo. (b) Las fuerzas sobre el elemento. (c) Diagrama de cuerpo libre del elemento.

equilibrio estático. Al aumentar la elevación (dy positiva), la presión disminuye (dp negativa). La causa de la variación de esta presión es el peso por unidad de área de la sección transversal de las capas de fluido que están entre los puntos cuya diferencia de presión está siendo medida.

La cantidad ρg suele llamarse *peso específico* del fluido; y es el peso por unidad de volumen del fluido. Por ejemplo, para el agua, el peso específico es $9800 \text{ N/m}^3 = 62.4 \text{ lb/ft}^3$.

Si p_1 es la presión en la elevación y_1 , y p_2 es la presión en la elevación y_2 sobre algún nivel de referencia, la integración de la ecuación 6 da

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

o sea

$$p_2 - p_1 = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy. \quad (7)$$

En los líquidos, que son casi incompresibles, ρ es prácticamente constante, y las diferencias de nivel raramente son tan grandes que haya de considerarse algún cambio en g . Así pues, tomando a ρ y a g como constantes, obtenemos

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad (8)$$

para un líquido homogéneo.

Si un líquido tiene una superficie libre, ésta es el nivel natural desde el cual se miden las distancias (Fig. 3). Sea y_2 la elevación de la superficie, en cuyo punto la presión p_2 que actúa sobre el fluido es usualmente la ejercida por la atmósfera de la Tierra p_0 . Consideramos que y_1 está en cualquier nivel del fluido, y representamos a la presión de ese lugar como p . Entonces,

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Pero $y_2 - y_1$ es la profundidad h bajo la superficie a la cual la presión es p (véase la Fig. 3), de modo que

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (9)$$

Esto demuestra claramente que en un líquido la presión aumenta con la profundidad, pero es la misma en todos los puntos situados a la misma profundidad. El segundo término a la derecha de la ecuación 9 da la contribución a la presión en un punto del líquido debida al peso del fluido de altura h sobre ese punto.

La ecuación 8 da la relación entre las presiones en dos puntos cualesquiera de un fluido, sin que importe la forma de la vasija que lo contiene. Al no importar la forma de la vasija que lo contiene, dos puntos del fluido pueden estar unidos por una trayectoria hecha de etapas verticales y horizontales. Por ejemplo, consideremos los puntos A y B en el líquido homogéneo contenido en el tubo en forma de U de la figura 4a. A lo largo de la trayectoria en zigzag de A a B existe una diferencia de presión $\rho g y'$ en cada segmento vertical de longitud y' , mientras que a lo largo de cada segmento horizontal no existe un cambio de presión. De aquí que la diferencia de presión $p_B - p_A$ sea ρg veces la suma algebraica de los segmentos verticales desde A hasta B , o $\rho g(y_2 - y_1)$.

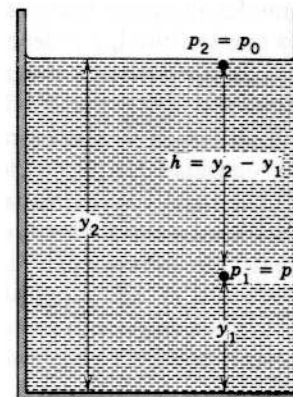


Figura 3 Un recipiente contiene un líquido cuya superficie superior está abierta a la atmósfera. La presión en cualquier punto del líquido depende de la profundidad h .

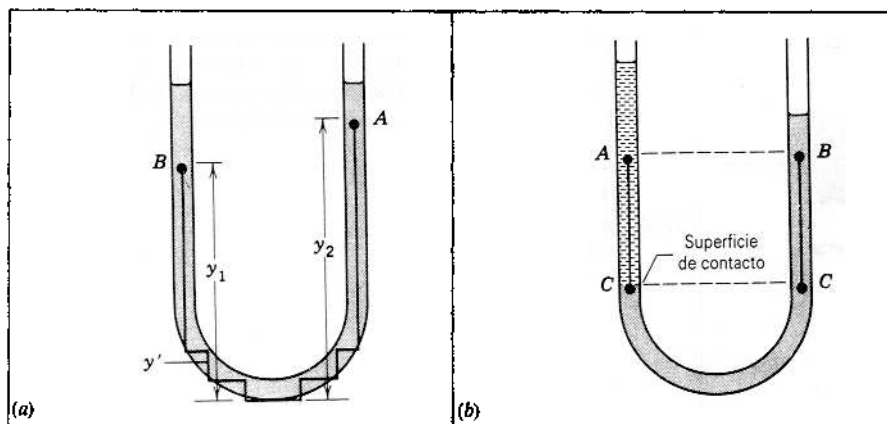


Figura 4 (a) La diferencia de presión entre dos puntos A y B de un líquido homogéneo depende únicamente de su diferencia en altura $y_2 - y_1$. (b) Dos puntos A y B a la misma altura pueden estar a diferentes presiones si ahí las densidades difieren.

Si el tubo en U contiene líquidos inmiscibles diferentes, digamos, un líquido denso en el tubo de la derecha y otro menos denso en el tubo de la izquierda, como se muestra en la figura 4b, la presión puede ser diferente en un mismo nivel (puntos A y B) en lados diferentes. El líquido bajo la línea CC está en equilibrio, entonces, la fuerza ejercida por la columna de la izquierda sobre C debe ser igual a la fuerza ejercida por la columna de la derecha sobre C. La presión en C es la misma en ambos lados, pero la presión decae menos desde C hasta A que desde C hasta B, porque el líquido a la izquierda es menos denso que el líquido a la derecha. Entonces, la presión en A es mayor que en B.

Variación de la presión en la atmósfera

Para los gases, ρ es comparativamente pequeña y la diferencia de presión entre dos puntos vecinos suele ser despreciable (véase la Ec. 8). Entonces en una vasija razonablemente pequeña que contenga un gas, la presión puede ser considerada como la misma en cualquier parte. Sin embargo, éste no es el caso cuando $y_2 - y_1$ es muy grande. La presión del aire varía notablemente cuando ascendemos a grandes alturas en la atmósfera. Además, la densidad ρ varía con la altitud, y ρ debe ser conocida en función de y antes de que podamos integrar la ecuación 7.

Podemos obtener una idea razonable de la variación de la presión con la altitud en la atmósfera de la Tierra si suponemos que la densidad ρ es proporcional a la presión. Esto sería así de manera muy aproximada (de acuerdo con la ley del gas ideal, la cual estudiaremos en el capítulo 23) si la temperatura del aire permaneciese igual en todas las altitudes. Haciendo uso de esta hipótesis, y suponiendo también que la variación de g con la altitud sea despreciable, podemos hallar la presión p a cualquier altitud y sobre el nivel del mar.

Partiendo de la ecuación 6 tenemos que

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Puesto que ρ es proporcional a p , tenemos

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}, \quad (10)$$

donde ρ_0 y p_0 son los valores de la densidad y de la presión al nivel del mar. Entonces,

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0},$$

de modo que

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} dy. \quad (11)$$

Integrando la ecuación 11 desde la presión p_0 a una altitud $y = 0$ (nivel del mar) hasta la presión p a una altitud y , obtenemos

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^y \frac{g\rho_0}{p_0} dy,$$

lo cual da

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0} y$$

o sea

$$p = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)y}. \quad (12)$$

Usando los valores $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$ (a 20°C), y $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, obtenemos

$$\frac{g\rho_0}{p_0} = 1.17 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 0.117 \text{ km}^{-1}.$$

De aquí que

$$p = p_0 e^{-y/a} \quad (13)$$

donde $1/a = g\rho_0/p_0 = 0.117 \text{ km}^{-1}$ o $a = 8.55 \text{ km}$. La constante a da el cambio de altitud para el cual la presión decae por un factor de e . O, lo que es lo mismo, la presión atmosférica decae por un factor de 10 cuando la altitud cambia en $a \ln 10 = 2.30a \approx 20 \text{ km}$. A una altitud de $h = 20 \text{ km}$ sobre el nivel del mar, la presión atmosférica sería

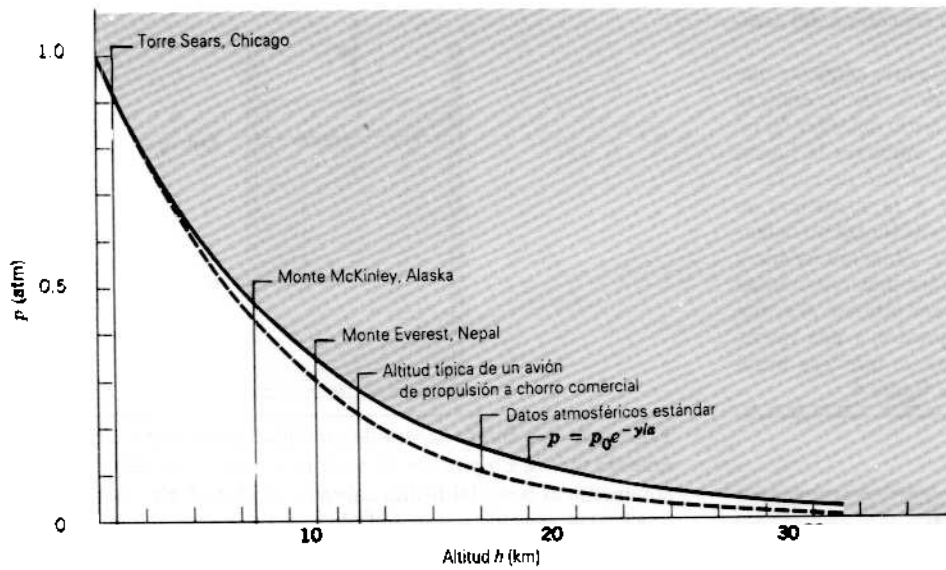


Figura 5 Comparación entre los datos de la presión atmosférica estándar (línea de puntos) con las predicciones de la ecuación 13 (línea continua). Las dos curvas difieren porque nuestro cálculo despreció la variación de la densidad con la temperatura al aumentar la altitud.

entonces 0.1 atm; en $h = 40$ km sobre el nivel del mar, sería 0.01 atm. La figura 5 muestra una comparación entre la variación de la presión con la altitud predicha por la ecuación 13 y la medida para la atmósfera.

Para los gases a una temperatura uniforme la densidad ρ de cualquier capa es proporcional a la presión p en esa capa. Sin embargo, los líquidos son casi incompresibles, de modo que las capas más bajas no resultan notablemente comprimidas por el peso de las capas más altas superpuestas a ellas, y la densidad ρ es prácticamente constante en todos los niveles. La variación de la presión con la distancia sobre el fondo del fluido en un gas es diferente de la de un líquido, como lo indica la ecuación 9 para un líquido y la ecuación 13 para un gas.

es la densidad del aceite, desconocida. Igualando las presiones en el punto C de cada lado, obtenemos

$$p_0 + \rho_w g 2a = p_0 + \rho g(2a + d)$$

y así

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_w \frac{2a}{2a + d} \\ &= (1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \frac{2(67.5 \text{ mm})}{2(67.5 \text{ mm}) + 12.3 \text{ mm}} \\ &= 916 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

La razón de la densidad de una sustancia a la densidad del agua se llama *densidad relativa* (o *gravedad específica*)

Problema muestra 1 Un tubo en U, en el cual ambos extremos están abiertos a la atmósfera, contiene cierta cantidad de agua. En el otro lado se vierte aceite, sustancia que no se mezcla con el agua, hasta que llega a una distancia $d = 12.3$ mm sobre el nivel del agua, del otro lado, nivel que se ha elevado mientras tanto a una distancia $a = 67.5$ mm desde su nivel original (Fig. 6). Halle la densidad del aceite.

Solución En la figura 6 los puntos C están a la misma presión. (Si esto no fuera así, entonces el elemento de fluido en forma de U que está abajo del nivel CC experimentaría una fuerza neta no balanceada y se aceleraría, violando la hipótesis estática que hacemos en este problema.) La caída de presión desde C hasta la superficie del lado del agua es $\rho_w g 2a$, donde $2a$ es la altura de la columna de agua que está sobre C. La caída de presión en el otro lado desde C hasta la superficie es $\rho g(2a + d)$, donde ρ

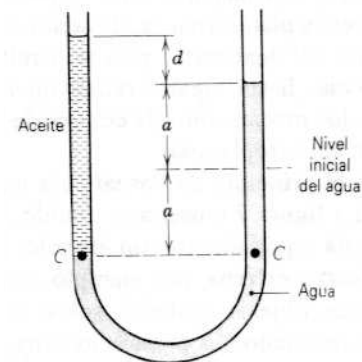


Figura 6 Problema muestra 1 Un tubo en U se llena parcialmente de agua y parcialmente de aceite de densidad desconocida.

de esa sustancia. En este caso la gravedad específica del aceite es 0.916.

Obsérvese que al resolver este problema hemos supuesto que la presión es continua sobre la superficie de contacto entre el aceite y el agua en el punto C del lado izquierdo del tubo. Si no fuera así y las presiones fueran diferentes, entonces la fuerza ejercida por el fluido en un lado de la superficie de contacto diferiría de la del fluido en el otro lado, y la superficie de contacto se aceleraría bajo la influencia de una fuerza no balanceada. Puesto que estamos suponiendo una situación estática, no puede haber movimiento y por lo tanto las presiones deben ser las mismas. Sin embargo, cuando vertemos primero el aceite en el tubo puede haber una diferencia de presión y una fuerza no balanceada que causaría que el sistema se moviese hasta llegar a la situación estática mostrada en la figura 6.

17-4 PRINCIPIO DE PASCAL Y PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Cuando oprimimos un tubo de pasta dental, la pasta fluye hacia afuera por la abertura del tubo. Esto demuestra la acción del *principio de Pascal*. Cuando se aplica presión en cualquier lugar del tubo, ésta se resiente en cualquier lugar del tubo obligando a la pasta dental a salir de él. He aquí el postulado del principio de Pascal, quien lo presentó por vez primera en 1652:

La presión aplicada a un fluido confinado se transmite íntegramente a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.

Es decir, si aumentamos en un lugar la presión sobre un fluido en una cantidad Δp , cualquier otra parte del fluido experimenta el mismo aumento de presión.

El principio de Pascal es la base de la operación de todos los mecanismos transmisores de fuerza hidráulica, tales como los que podrían encontrarse en la maquinaria para el movimiento de tierras o en el sistema de frenos de un automóvil. Ello nos permite amplificar una fuerza aplicada relativamente pequeña para elevar un peso mucho más grande (como en la plataforma de elevación de automóviles o en la silla del dentista) y para transmitir fuerzas a grandes distancias hasta lugares relativamente inaccesibles (como en los mecanismos de control de los alerones que se usan en los aeroplanos).

Probaremos el principio de Pascal para un líquido incompresible. La figura 7 muestra al líquido dentro de un cilindro que está equipado con un émbolo. Se aplica al émbolo una fuerza externa, por ejemplo, por medio del peso de algunos objetos apilados sobre él. La fuerza externa da por resultado una presión externa p_{ext} aplicada al líquido que se halla inmediatamente debajo del émbolo. Si el líquido tiene una densidad ρ , entonces, según la ecuación 9, podemos escribir la presión en un punto arbitrario P a una distancia h bajo la superficie:

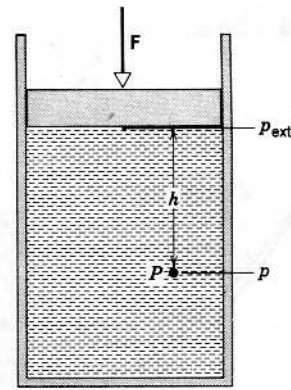


Figura 7 Un fluido dentro de un cilindro equipado con un émbolo móvil. La presión en cualquier punto P se debe no solamente al peso del fluido sobre el nivel de P sino también a la fuerza ejercida por el émbolo.

$$p = p_{ext} + \rho gh. \quad (14)$$

Supongamos ahora que la presión externa aumenta en una cantidad Δp_{ext} , quizá por haber añadido algo de más peso sobre el émbolo. ¿Cómo cambia la presión p en el fluido como resultado de este cambio en la presión externa? Suponemos que el líquido es incompresible, de modo que la densidad ρ permanece constante. El cambio en la presión externa da por resultado un cambio en la presión del fluido que se deduce de la ecuación 14:

$$\Delta p = \Delta p_{ext} + \Delta(\rho gh). \quad (15)$$

Puesto que el líquido es incompresible, la densidad es constante, y el segundo término a la derecha en la ecuación 15 es igual a cero. En este caso, obtenemos

$$\Delta p = \Delta p_{ext}. \quad (16)$$

El cambio de presión en cualquier punto del fluido es sencillamente igual al cambio de la presión externa aplicada. Este resultado confirma el principio de Pascal y demuestra que se deduce directamente de nuestra consideración previa de la presión estática en un fluido. Por lo tanto, no es un principio independiente sino una consecuencia directa de nuestra formulación de la estática de los fluidos.

Si bien hemos derivado el resultado anterior para los líquidos incompresibles, el principio de Pascal se cumple en todos los casos de fluidos reales (compresibles), ya sean gases o líquidos. El cambio en la presión externa causa un cambio en la densidad que se propaga en el fluido como una onda a la velocidad del sonido, pero una vez que la perturbación termina y se establece el equilibrio, se encuentra que el principio de Pascal permanece válido.

La palanca hidráulica

La figura 8 muestra un dispositivo que se usa a menudo para levantar un objeto pesado, como un automóvil. Sobre un pistón de área A_i se ejerce una fuerza externa F_i . El objeto que va a ser levantado ejerce una fuerza Mg sobre el émbolo grande de área A_o . En equilibrio, la magnitud de la fuerza hacia arriba F_o ejercida por el fluido sobre el émbolo grande debe ser igual a la de la fuerza hacia abajo Mg del peso del objeto (despreciando el peso del propio émbolo). Deseamos hallar la relación entre la fuerza aplicada F_i y la "fuerza de salida" F_o que el sistema puede ejercer sobre el émbolo grande.

La presión sobre el fluido en el émbolo pequeño, debida a nuestra fuerza externa aplicada, es $p_i = F_i/A_i$. De acuerdo con el principio de Pascal, esta presión de "entrada" debe ser igual a la presión de "salida" $p_o = F_o/A_o$, que el fluido ejerce sobre el émbolo grande. Entonces $p_i = p_o$, y entonces

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o},$$

o sea

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_o} = Mg \frac{A_i}{A_o}. \quad (17)$$

La razón A_i/A_o es generalmente mucho menor de 1, y entonces la fuerza aplicada puede ser mucho menor que el peso Mg que está siendo levantado.

El movimiento hacia abajo del émbolo pequeño a lo largo de una distancia d_i desplaza un volumen de fluido $V = d_i A_i$. Si el fluido es incompresible, entonces este volumen debe ser igual al volumen desplazado por el movimiento hacia arriba del émbolo grande:

$$V = d_i A_i = d_o A_o,$$

o

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}. \quad (18)$$

Si A_i/A_o es un número pequeño, entonces la distancia a la que se desplaza el émbolo grande es mucho más pequeña que la distancia a la que se desplaza el émbolo pequeño

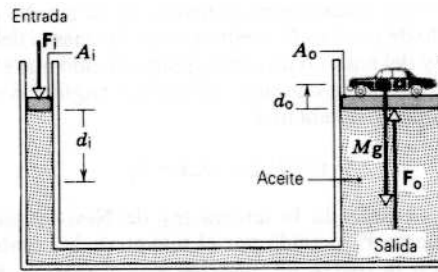


Figura 8 La palanca hidráulica. Una fuerza F_i aplicada al émbolo pequeño puede producir una fuerza F_o mucho mayor sobre el émbolo grande, que pueda levantar un peso Mg .

a causa de la fuerza aplicada. El precio que pagamos por la posibilidad de levantar una carga grande es el de perder la posibilidad de trasladarla muy lejos.

Al combinar las ecuaciones 17 y 18 vemos que $F_i d_i = F_o d_o$, lo cual demuestra que el trabajo efectuado por la fuerza externa sobre el émbolo pequeño es igual al trabajo efectuado por el fluido sobre el émbolo grande. Entonces, (despreciando la fricción y otras fuerzas disipativas) no existe una ganancia (o pérdida) neta de energía al usar este sistema hidráulico.

Problema muestra 2 La figura 9 muestra una vista esquemática de un gato hidráulico empleado para elevar un automóvil. El fluido hidráulico es aceite (densidad = 812 kg/m^3). Se emplea una bomba de mano, con la cual se aplica una fuerza de magnitud F_i al émbolo menor (de 2.2 cm de diámetro) cuando la mano aplica una fuerza de magnitud F_h al extremo del mango de la bomba. La masa combinada del automóvil que va a ser elevado y la plataforma de elevación es de $M = 1980 \text{ kg}$, y el émbolo grande tiene un diámetro de 16.4 cm. La longitud L del mango de la bomba es de 36 cm, y la distancia x desde el pivote hasta el émbolo es de 9.4 cm. (a) ¿Cuál es la fuerza aplicada F_h necesaria para elevar el automóvil? (b) Por cada carrera hacia abajo de la bomba, en la que la mano se mueve una distancia vertical de 28 cm, ¿a qué altura se eleva el automóvil?

Solución (a) Partiendo de la ecuación 17,

$$F_i = Mg \frac{A_i}{A_o} = (1980 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{\pi(1.1 \text{ cm})^2}{\pi(8.2 \text{ cm})^2} = 349 \text{ N}.$$

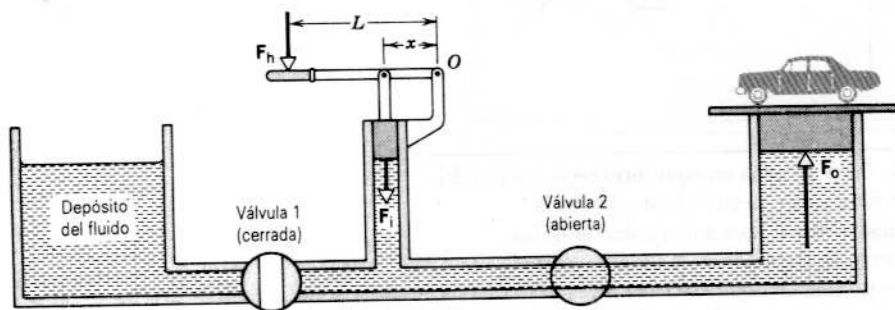


Figura 9 Problema muestra 2. Se emplea una bomba hidráulica para elevar un automóvil. En la carrera hacia abajo, se cierra la válvula 1 y se abre la válvula 2. Durante la carrera hacia arriba, se abre la válvula 1 y se cierra la válvula 2, permitiendo que se transfiera fluido adicional a la cámara hidráulica.

Considerando las torcas sobre el mango de la bomba con respecto al punto de pivoteo O , despreciando las masas del mango de la bomba y del émbolo pequeño, y suponiendo que el mango de la bomba se mueva con una aceleración angular despreciablemente pequeña, obtenemos

$$\sum \tau = F_b L - F_1 x = 0,$$

donde hemos empleado la tercera ley de Newton para relacionar a la fuerza F_1 ejercida por el mango de la bomba sobre el émbolo con la fuerza $-F_1$ ejercida por el émbolo sobre el mango de la bomba. Resolviendo para F_b , hallamos que

$$F_b = F_1 \frac{x}{L} = (349 \text{ N}) \frac{9.4 \text{ cm}}{36 \text{ cm}} = 91 \text{ N}.$$

Tal fuerza, alrededor de 20 lb, puede ser aplicada fácilmente a mano.

(b) Cuando la mano se mueve a lo largo de una distancia vertical h , el émbolo pequeño se moverá a lo largo de la distancia

$$d_i = h \frac{x}{L} = (28 \text{ cm}) \frac{9.4 \text{ cm}}{36 \text{ cm}} = 7.3 \text{ cm}.$$

La ecuación 18 da entonces la distancia recorrida por el émbolo grande:

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o} = (7.3 \text{ cm}) \frac{\pi(1.1 \text{ cm})^2}{\pi(8.2 \text{ cm})^2} = 0.13 \text{ cm} = 1.3 \text{ mm}.$$

Elevar el automóvil sólo a una distancia tan corta es el precio que pagamos por ejercer una fuerza tan pequeña para elevarlo. Por supuesto, si queremos un aparato que sea útil debemos poder elevar el automóvil a una distancia más grande, lo cual se consigue por medio de muchas carreras de la bomba. Para evitar que el automóvil descienda durante la carrera hacia arriba de la bomba, se emplea el dispositivo de válvulas mostrado en la figura 9. Durante la carrera hacia abajo, las válvulas están en la posición mostrada en la figura 9, y el automóvil se eleva a una distancia d_o . Durante la carrera de retorno se cierra la válvula 2, atrapando al fluido del lado derecho de la cámara y manteniendo el automóvil a una altura fija; luego, se abre la válvula 1, de modo que la carrera de retorno reciba fluido adicional del depósito del lado izquierdo de la cámara. En la siguiente carrera hacia abajo, las válvulas retornan a la posición mostrada en la figura, y el automóvil es elevado en otro incre-

mento d_o . En efecto, el volumen de fluido hidráulico recibido del lado izquierdo de la cámara durante la carrera hacia arriba se bombea hacia el lado derecho de la cámara durante la carrera hacia abajo. Cuando se completa el proceso, el automóvil descenderá abriendo ambas válvulas y permitiendo que el fluido se drene directamente al depósito.

¿Cómo cambia la operación del gato hidráulico cuando el automóvil es levantado y la altura del fluido en la columna derecha aumenta? Haga un cálculo numérico.

Principio de Arquímedes

La figura 10a muestra cierto volumen de agua contenida en una bolsa de plástico delgado situada bajo el agua. El agua de la bolsa está en equilibrio estático. Por lo tanto, su peso debe estar equilibrado por una fuerza hacia arriba de igual magnitud. Esta fuerza hacia arriba es la suma vectorial de todas las fuerzas hacia adentro ejercidas por el fluido que rodea a la bolsa. Las flechas de la figura 10a representan a las fuerzas ejercidas sobre el volumen de líquido como resultado de la presión del fluido que lo rodea. Nótese que las fuerzas hacia arriba sobre el fondo de la bolsa son más grandes que las fuerzas hacia abajo sobre la parte superior, debido a que la presión aumenta con la profundidad. La fuerza neta hacia arriba que resulta de esta diferencia de presiones se denomina *fuerza de flotación o empuje*.

La presión ejercida sobre un objeto sumergido por el líquido que lo rodea ciertamente no depende del material del cual está hecho el objeto. Por lo tanto, podríamos sustituir la bolsa de agua por un trozo de madera del mismo tamaño y forma exactas, y la fuerza de flotación no cambiaría. La fuerza hacia arriba sigue siendo igual al peso del volumen original de agua. Esto nos conduce al principio de Arquímedes:

Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido sufre un empuje de abajo arriba por una fuerza de magnitud igual al del peso del fluido que desaloja.

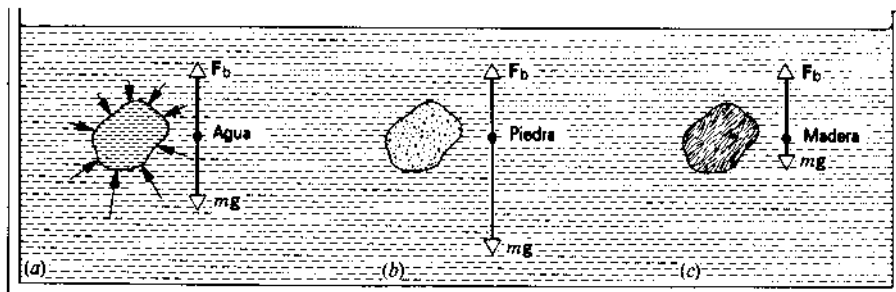


Figura 10 (a) Una bolsa de plástico delgado llena de agua en equilibrio bajo el agua. El agua que rodea a la bolsa ejerce fuerzas de presión sobre su superficie, siendo la resultante una fuerza de rotación o empuje hacia arriba F_b que actúa sobre la bolsa. (b) Para una piedra del mismo volumen, la fuerza de flotación es la misma, pero el peso excede a la fuerza de flotación, y así, la piedra no está en equilibrio. (c) En el caso de una pieza de madera del mismo volumen, el peso es menor que la fuerza de flotación.

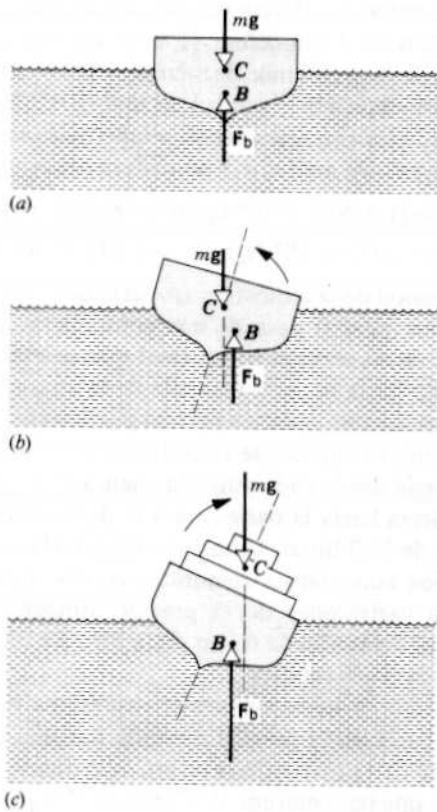


Figura 11 (a) Una sección transversal de un barco que flota en posición normal. La fuerza de flotación F_b actúa en el centro de flotación B , y el peso actúa en el centro de gravedad C . El barco está en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas. (b) Cuando el barco se ladea, el centro de flotación puede ya no estar situado en la misma línea vertical que el centro de gravedad, y puede actuar una torca neta sobre el barco. Aquí, la torca con respecto a C actúa para regresar al barco a la posición normal. (c) Aquí, el centro de gravedad está situado más arriba, de modo que la torca respecto a C debido a la fuerza de flotación tiende a ladear al barco aun más.

Un objeto de mayor densidad que el agua (Fig. 10b) desaloja un volumen de agua cuyo peso es menor que el peso del objeto. Por lo tanto, el objeto se hunde en el agua, porque la fuerza del empuje es menor que el peso del objeto. Si tratamos de elevar al objeto mientras esté bajo el agua, encontramos que exige menos fuerza que el peso normal del objeto, siendo la diferencia la fuerza del empuje. Los objetos sumergidos parecen pesar menos de lo que pesan normalmente. Los astronautas se preparan para sus viajes practicando tareas en grandes tanques bajo el agua, para simular un tanto la condición ingravidez en el espacio.

Un objeto de densidad menor que el agua (Fig. 10c) experimenta una fuerza neta hacia arriba cuando está completamente sumergido, porque el peso del agua des-

alojada es mayor que el peso del objeto. Por lo tanto, el objeto se eleva hasta subir a la superficie, y continúa elevándose hasta que la parte de él que quede sumergida sea del volumen necesario para desalojar al agua cuyo peso es igual al peso total del objeto. En esa situación el objeto flota en equilibrio.

La fuerza de flotación puede verse como si actuase en el centro de gravedad del fluido desalojado por la parte sumergida de un objeto flotante. Este punto se conoce como *centro de flotación*. El peso actúa en el centro de gravedad de todo el objeto. Estos dos puntos no son en general los mismos (Fig. 11a). Si los dos puntos están situados en la misma línea vertical, entonces el objeto puede flotar en equilibrio: tanto la fuerza neta como la torca neta son nulas. Si el objeto flotante se ladea ligeramente sacándolo de su posición de equilibrio, entonces la forma total del fluido desalojado cambia, y el *centro de flotación* cambia su posición con respecto al centro de gravedad del objeto flotante. Así pues, sobre el objeto flotante actúa una torca que podría inclinar al objeto nuevamente hacia su posición de equilibrio (Fig. 11b), o podría actuar en la otra dirección para volcarlo completamente (Fig. 11c).

Problema muestra 3 ¿Qué fracción del volumen total de un iceberg queda expuesta?

Solución El peso del iceberg es

$$W_i = \rho_i V_i g,$$

donde V_i es el volumen del iceberg. El peso del volumen V_w del agua de mar desalojada (o, lo que es lo mismo, del volumen de la parte sumergida del iceberg) es la fuerza de flotación

$$F_b = \rho_w V_w g.$$

Pero F_b es igual a W_i , porque el iceberg está en equilibrio, de modo que

$$\rho_w V_w g = \rho_i V_i g,$$

y, usando las densidades de la tabla 2,

$$\frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1024 \text{ kg/m}^3} = 0.896 = 89.6\%.$$

El volumen del agua desalojada V_w es el volumen de la porción sumergida del iceberg, de modo que el 10.4% del iceberg se halla expuesto sobre la superficie.

17-5 MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

La presión ejercida por un fluido puede medirse usando técnicas ya sea estáticas o dinámicas. Los métodos dinámicos se basan en la velocidad del flujo de un fluido en movimiento y se estudian en el capítulo 18. En esta

sección trataremos los métodos estáticos para medir la presión.

La mayoría de los aparatos de medición de la presión usan la presión atmosférica como nivel de referencia y miden la diferencia entre la presión real y la presión atmosférica, llamada *presión manométrica*. La presión real en un punto de un fluido se llama *presión absoluta*, que es entonces la presión atmosférica más la presión manométrica. La presión manométrica se da ya sea arriba o abajo de la presión atmosférica y puede entonces ser positiva o negativa; la presión absoluta, por su parte, siempre es positiva.

El barómetro de mercurio es un tubo largo de vidrio, lleno con mercurio y luego invertido dentro de una cubeta que contiene el mismo metal, como se muestra en la figura 12. El espacio sobre la columna de mercurio es, en efecto, un vacío que contiene únicamente vapor de mercurio, cuya presión p_2 es tan pequeña a las temperaturas ordinarias que puede ser despreciada. La presión p_1 sobre la superficie de la cubeta de mercurio es la presión desconocida p que deseamos medir. Partiendo de la ecuación 8, obtenemos

$$p_2 - p_1 = 0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho gh,$$

$$p = \rho gh.$$

Midiendo la altura de la columna sobre la superficie de la cubeta nos da entonces la presión.

El barómetro de mercurio se utiliza para medir la presión de la atmósfera, p_0 . La columna de mercurio del barómetro tiene una altura de unos 760 mm al nivel

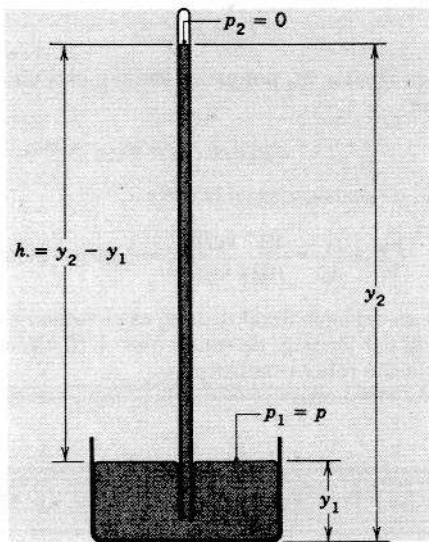


Figura 12 Barómetro de mercurio. El mercurio que está en la cubeta se halla en equilibrio bajo la influencia de la presión atmosférica y del peso del mercurio contenido en la columna vertical.

del mar, variando de acuerdo con la presión atmosférica. La presión de 1 atmósfera (1 atm) es equivalente a la ejercida por una columna de mercurio de 760 mm de altura a 0° C sometida a la gravedad normal ($g = 9.80665 \text{ m/s}^2$). La densidad del mercurio a esta temperatura es de $1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. De aquí que 1 atmósfera sea equivalente a

$$1 \text{ atm} = (1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m}) \\ = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (= 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}).$$

La presión de la atmósfera en cualquier punto es numéricamente igual al peso de una columna de aire de área unitaria en su sección transversal que se extienda desde ese punto hasta la parte más alta de la atmósfera. Puesto que la presión atmosférica normal puede expresarse como 14.7 lb/in^2 , sabemos que la columna vertical de aire que se extiende desde cada pulgada cuadrada de la superficie de la Tierra hasta la parte más alta de la atmósfera tiene un peso de 14.7 libras. Como ya vimos en la sección 17-3, la presión atmosférica disminuye con la altitud. Existen también variaciones de la presión atmosférica en una localidad determinada de un día a otro a causa de que la atmósfera no es estática.

Las lecturas del barómetro se expresan a veces en torr, donde 1 torr es la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura en un lugar donde $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ y a una temperatura (0° C) a la cual el mercurio tiene una densidad de $1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. Entonces,

$$1 \text{ torr} = (1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.001 \text{ m}) \\ = 133.326 \text{ Pa}.$$

El manómetro de tubo abierto (Fig. 13) mide la presión manométrica. Consta de un tubo en forma de U lleno de líquido, el tubo está abierto por un extremo a la atmósfera y conectado en el otro extremo al sistema (tanque) cuya presión p deseamos medir. Partiendo de la ecuación 9 obtenemos

$$p - p_0 = \rho gh.$$

Entonces, la presión manométrica, $p - p_0$, es proporcional a la diferencia de altura en las columnas de líquido del tubo en U. Si el recipiente contiene gas a una presión elevada, se emplea en el tubo un líquido más denso como el mercurio; cuando se manejan presiones bajas, puede utilizarse agua.

Problema muestra 4 La columna de mercurio de un barómetro tiene una altura h de 740.35 mm. La temperatura es de -5.0° C , a cuya temperatura la densidad del mercurio es de $1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. La aceleración en caída libre g en el sitio del barómetro es de 9.7835 m/s^2 . ¿Cuál es la presión atmosférica?

Solución Partiendo de la ecuación 8 tenemos

$$p_0 = \rho gh \\ = (1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.7835 \text{ m/s}^2)(0.74035 \text{ m}) \\ = 9.8566 \times 10^4 \text{ Pa} = 739.29 \text{ torr}.$$

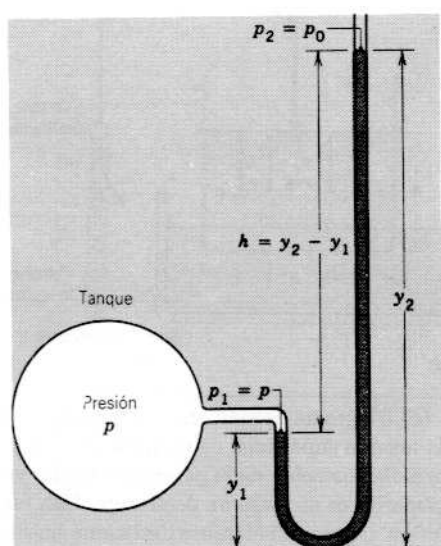


Figura 13 Un manómetro de tubo abierto, que puede utilizarse para medir la presión de un fluido en un tanque.

Nótese que el valor de la presión en torr (739.29 torr) es numéricamente cercano al valor de la altura h de la columna de mercurio expresada en mm (740.35 mm). Estas dos cantidades serán numéricamente iguales sólo si el barómetro está localizado en un sitio donde g tenga su valor normal y cuando la temperatura del mercurio sea 0°C .

Otra manera de expresar el resultado de este problema muestra sería como 0.98566 bar o 985.66 milibar, donde $1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$.

Notas históricas (Opcional)

El barómetro de mercurio fue inventado por el italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), en memoria de quien ha sido nombrada la unidad torr. Torricelli describió en 1644 sus experimentos con el barómetro de mercurio en cartas a su amigo Michelangelo Ricci, de Roma. Le explicaba a Ricci que el propósito de su investigación era “no simplemente producir un vacío, sino fabricar un instrumento que mostrase las mutaciones del aire, ora más pesado y denso, ora más ligero y tenue”. Al oír de los experimentos del italiano, Blás Pascal, en Francia, dedujo que si la columna de mercurio se mantenía simplemente por la acción de la presión del aire, la columna debería ser más corta si se encontraba a una altitud elevada. Realizó la prueba en el campanario de una iglesia de París, pero, como deseara resultados más contundentes, le escribió a su cuñado para que ensayase el experimento en la Puy de Dôme, una alta montaña de Auvernia. La diferencia medida en la altura del mercurio fue de 8 cm, resultado “que nos llenó de admiración y asombro”. El propio Pascal construyó un barómetro usando vino tinto y un tubo de vidrio de 14 m de longitud.

El principal significado de estos experimentos en aquel tiempo consiste en que ofrecieron una prueba fehaciente de que podía crearse un espacio evacuado. Aristóteles creía que no podía existir un vacío y, muchos años después, el propio filósofo Descartes mantenía el mismo punto de vista. Durante 2000 años los filósofos hablaron del “horror” que la naturaleza sentía por un espacio vacío: el *horror vacui*. Se decía que la naturaleza impedía la formación de un vacío abrazándose a todo lo cercano

y con ello llenando cualquier espacio evacuado. De aquí que el mercurio o el vino deberían llenar el tubo invertido a causa de que “la naturaleza aborrecía al vacío”. Los experimentos de Torricelli y de Pascal demostraron que existían limitaciones a la habilidad de la naturaleza para impedir el vacío. Causaron una conmoción en aquellos tiempos. La meta de producir un vacío se convirtió en una realidad práctica gracias a la invención de las bombas por Otto von Guericke en Alemania alrededor de 1650 y por Robert Boyle en Inglaterra alrededor de 1660. Aun cuando estas bombas fueron relativamente primitivas, proporcionaron una herramienta para la experimentación. Con una bomba y un cántaro de agua, pudo habilitarse un espacio experimental en el cual estudiar cómo resultan afectadas las propiedades del calor, la luz, el sonido, y más tarde la electricidad y el magnetismo por una atmósfera cada vez progresivamente enrarecida. Si bien incluso hoy día no puede hacerse desaparecer completamente todo rastro de gas de un recipiente cerrado, estos sabios del siglo XVII liberaron a la ciencia del falso principio del *horror vacui* y estimularon los esfuerzos para crear sistemas de alto vacío.

En el curso de varias décadas del siglo XVII se desarrollaron no menos de seis instrumentos importantes. Éstos son el barómetro, la bomba de aire, el reloj de péndulo, el telescopio, el microscopio, y el termómetro. Todos ellos suscitaron gran asombro y curiosidad. ■

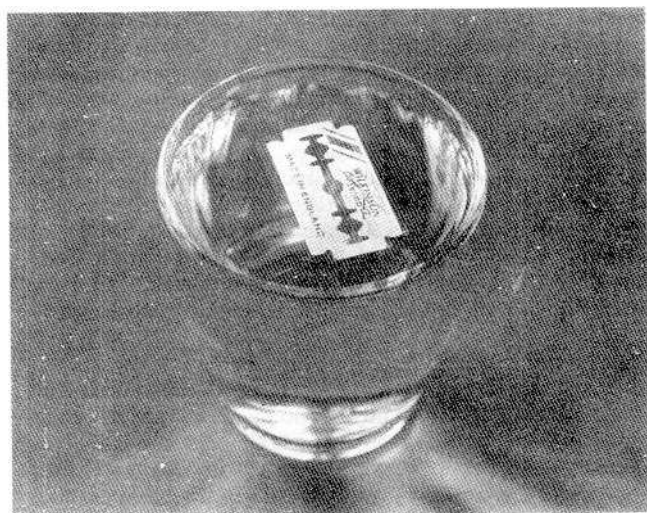
17-6 TENSIÓN SUPERFICIAL (Opcional)

Con frecuencia podemos observar a las hojas y a los insectos flotar sobre la *superficie* de un cuerpo de agua (Fig. 14a). *No se hallan parcialmente sumergidos y por lo tanto no reciben el empuje según enuncia el principio de Arquímedes*. En este caso el objeto está en la superficie por completo y nada de él se halla sumergido.

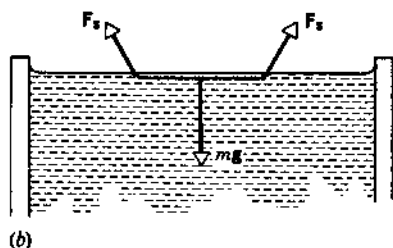
El objeto se mantiene a flote a causa de la *tensión superficial* del líquido. Podemos demostrar la tensión superficial del agua haciendo flotar con cuidado una aguja de acero o una hoja de afeitar. Por supuesto, no existe manera de que el acero flote según el principio de Arquímedes, puesto que su densidad es mayor que la del agua. Si sumergimos a la aguja o a la hoja de afeitar, éstas quedarán hundidas tal como lo enuncia el principio de Arquímedes. Solamente podrán flotar cuando estén enteramente en la superficie. Si añadimos al agua un producto químico, llamado agente tensoactivo o surfactante, éste reduce la tensión superficial (al reducir la fuerza de cohesión entre las moléculas), impidiendo así que el objeto flote. Los detergentes son surfactantes comunes. Si introducimos cuidadosamente detergente en el agua sobre la que esté flotando una hoja de afeitar, la tensión superficial disminuye súbitamente y la hoja de afeitar se hunde hasta el fondo.

Un objeto flotante, como el que se muestra en la figura 14a, causa una ligera depresión en la capa superficial del líquido (Fig. 14b), estirándola, y por lo tanto tiende a aumentar su energía potencial. Como la red de acrobacia en un circo, la superficie estirada ejerce una fuerza de restitución, cuya componente vertical puede mantener el equilibrio con el peso del objeto. Sin embargo, pronto veremos que esta analogía del comportamiento de la capa superficial no es del todo correcta.

La figura 15 muestra una manera de medir la tensión superficial de un líquido. Se dobla un alambre delgado para formar tres de los cuatro lados de un rectángulo y como cuarto lado se coloca un alambre deslizante. Si una película del líquido cubre las dos esquinas de la parte inferior (introduciendo esta parte en



(a)



(b)

Figura 14 (a) Una hoja de afeitar flota sobre la superficie del agua, soportada únicamente por la tensión superficial. (b) La superficie se halla distorsionada por el objeto flotante, el cual se mantiene a flote a causa de las componentes verticales de la fuerza superficial F_s .

un recipiente con el líquido), la tensión superficial tenderá a jalar hacia abajo al alambre deslizante que queda arriba. Aplicamos una fuerza externa hacia arriba P necesaria para mantener al alambre deslizante en equilibrio. Esta fuerza hacia arriba debe equilibrar a la fuerza total hacia abajo que actúa sobre el alambre deslizante, y que es igual a su peso más la fuerza F debida a la tensión superficial.

Por experimentación hallamos que la fuerza F depende de la longitud d del alambre deslizante y que no depende en absoluto de la altura h del rectángulo. Si bien podríamos pensar que la capa superficial es como una especie de tela elástica estirada sobre el líquido, esta observación nos demuestra que tal imagen es incorrecta. Imaginemos a la película de la figura 15 cortada en un número grande N de franjas verticales angostas de longitud h y anchura $\Delta d = d/N$. Si la película se comportase como una tela elástica, cada franja se comportaría como un resorte, y así la fuerza total dependería tanto del número de franjas a modo de resorte (y por tanto de d) como de la longitud h de cada franja. Puesto que la tensión superficial depende únicamente de d y no de h , la analogía de la tela elástica no es correcta.

La tensión superficial y se define como la fuerza superficial F por unidad de longitud L sobre la cual actúa, es decir,

$$\gamma = \frac{F}{L}. \quad (19)$$

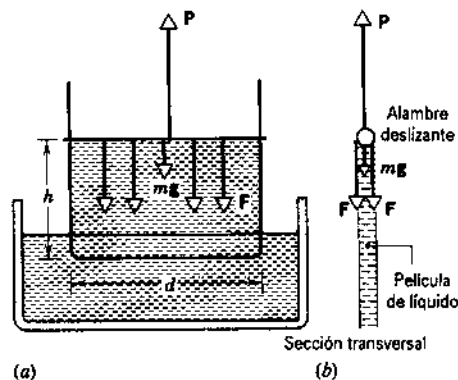


Figura 15 (a) Diagrama esquemático de un experimento para medir la tensión superficial de un líquido. Una película de líquido se halla sostenida en la parte rectangular vertical, cuyo borde superior es un alambre deslizante. Una fuerza externa equilibra al peso del alambre deslizante más la fuerza total hacia abajo F de la tensión superficial. (b) Diagrama de la sección transversal de la película, donde se muestra que la tensión superficial actúa sobre dos superficies.

Nótese que la tensión superficial no es una fuerza sino una fuerza por unidad de longitud. Nuestro uso previo del término *tensión* siempre ha servido para indicar la presencia de una fuerza, pero aquí el uso es un poco diferente.

En la película de la figura 15, la fuerza actúa a lo largo de una longitud L de $2d$, a causa de que existen *dos* capas superficiales de longitud d cada una. Por lo tanto, la tensión superficial en el arreglo experimental mostrado en la figura 15 sería

$$\gamma = \frac{F}{2d}.$$

Para el agua a la temperatura ambiente, el valor de la tensión superficial es de $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$. La adición de jabón reduce la tensión superficial a 0.025 N/m . Los líquidos orgánicos y las soluciones acuosas tienen típicamente tensiones superficiales dentro de este intervalo. La tensión superficial de los metales líquidos es típicamente de un orden de magnitud mayor que la del agua. Por ejemplo, el mercurio líquido a la temperatura ambiente tiene una tensión superficial de 0.487 N/m . (Esta tensión superficial más elevada de los metales se debe a que las fuerzas entre las moléculas están típicamente dentro de un orden de magnitud mayor en los metales que en el agua. Por esta misma razón, los puntos de ebullición de los metales son mucho más elevados que los del agua.)

Podemos también analizar a la tensión superficial desde el punto de vista de la energía. Si movemos al alambre deslizante de la figura 15 a lo largo de un desplazamiento Δx , el trabajo efectuado por la fuerza de la tensión superficial es igual a $F \Delta x$ y es positivo o negativo según Δx tenga el sentido de la fuerza superficial o el sentido opuesto. La fuerza superficial satisface nuestra definición de fuerza conservativa, de la que hablamos en el capítulo 8, y por tanto podemos asociar un cambio en la energía potencial ΔU con la acción de la fuerza superficial, de modo que

$$\Delta U = F \Delta x = \gamma L \Delta x, \quad (20)$$

donde L es la longitud de la capa superficial. El producto $L \Delta x$ es justamente el cambio en el área ΔA de la superficie que tiene



Figura 16 Las gotas que flotan libremente adquieren de manera natural una forma esférica. Aquí el astronauta Dr. Joseph P. Allen, en órbita alrededor de la Tierra a bordo del transbordador *Columbia*, observa una bola de jugo de naranja que él formó usando su distribuidor especial de bebida.

lugar cuando la estiramos. Por lo tanto, podemos expresar a la tensión superficial como:

$$\gamma = \frac{\Delta U}{\Delta A} \quad (21)$$

Esto nos proporciona otra interpretación de la tensión superficial en términos de la *energía potencial superficial por unidad de área de la superficie*.

La tensión superficial causa que gotas suspendidas de un líquido adquieran forma esférica (Fig. 16). Para una gota de una masa o volumen dados, la energía superficial (igual a γ veces el área superficial) es menor cuando el área es más pequeña, y una esfera tiene la razón de superficie/volumen más pequeña de todas las formas geométricas. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre la gota, ésta adoptará naturalmente una superficie esférica. En el equilibrio, la tensión superficial produce una fuerza neta hacia adentro sobre un elemento de superficie, la cual es equilibrada por una fuerza igual hacia afuera debida a la presión del líquido contenido en la gota. En una burbuja de jabón (la cual tiene dos superficies y por lo tanto el doble de la tensión superficial de una gota de líquido de igual tamaño), la pre-

sión manométrica del gas confinado dentro de la burbuja proporciona la fuerza hacia afuera necesaria para el equilibrio.

Al igual que las moléculas de una gota de líquido, los protones y los neutrones de un núcleo experimentan fuerzas de corto alcance ejercidas por sus vecinos. El núcleo experimenta una tensión superficial similar a la de una gota de líquido. En el caso del núcleo, la fuerza hacia afuera tiene su origen en la repulsión electrostática de los protones cargados. En muchos núcleos, la forma de equilibrio se determina por el balance entre las fuerzas superficial y electrostática, y por lo tanto no debería sorprendernos que la forma preferida de los núcleos sea la esférica. El cálculo de la energía de amarre, también llamada de descarga, de los núcleos debe incluir un término que corresponda a la energía superficial, la cual típicamente es responsable del 30% de la energía total de amarre.

El hecho de considerar que el núcleo se comporta como una gota de líquido cargada nos proporciona una visión muy clara para entender muchas de las propiedades del núcleo, especialmente de la fisión nuclear, donde el núcleo se divide en dos partes de tamaño comparable. Tal procedimiento se denomina *modelaje*, mediante el cual tratamos de entender a un sistema complejo, cuyas propiedades no pueden a menudo ser calculadas o entendidas directamente, sobre la base de un sistema físico más sencillo de un comportamiento relativamente similar y cuyas propiedades puedan ser calculadas y luego probadas por medio de la experimentación. El *modelo de la gota de agua del núcleo* ha jugado un papel importante en nuestro entendimiento de los núcleos atómicos, como lo estudiaremos en los capítulos 54 y 55 del texto ampliado.

Problema muestra 5 En el experimento que se muestra en la figura 15a, se encuentra que el alambre móvil está en equilibrio cuando la fuerza hacia arriba P es de 3.45×10^{-3} N. El alambre tiene una longitud d de 4.85 cm y una densidad de masa lineal μ de 1.75×10^{-3} kg/m. Halle la tensión superficial del líquido.

Solución A partir de la condición de equilibrio de la figura 15b, tenemos

$$\sum F_y = P - F - mg = 0,$$

o

$$F = P - mg.$$

Siendo $F = 2d\gamma$ y $m = \mu d$, obtenemos

$$2d\gamma = P - \mu dg$$

o sea que

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{P - \mu dg}{2d} \\ &= \frac{3.45 \times 10^{-3} \text{ N} - (1.75 \times 10^{-3} \text{ kg/m})(0.0485 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}{2(0.0485 \text{ m})} \\ &= 0.027 \text{ N/m. } \blacksquare \end{aligned}$$

PREGUNTAS

1. Explique cómo es posible que la presión sea una cantidad escalar cuando las fuerzas, que son vectores, pueden producirse por la acción de las presiones.
2. Haga una estimación de la densidad promedio de nuestro cuerpo. Explique un modo por el cual podríamos obtener un valor preciso usando las ideas de este capítulo.

3. En el capítulo 20 aprenderemos que una sobrepresión de sólo 20 PA corresponde al umbral de la sensación de dolor debida a un sonido intenso. Sin embargo, un buceador a 2 m bajo la superficie del agua experimenta una presión mucho mayor que ésta (¿de cuánto?) y no siente dolor. ¿Por qué esta diferencia?
4. Las personas confinadas a una cama tienen menos probabilidades de desarrollar llagas en su cuerpo si usan una cama de agua en lugar de un colchón ordinario. Explique.
5. Explique por qué una persona podría estar sobre una cama de clavos sin sentir dolor.
6. Explique la aseveración "el agua busca su propio nivel".
7. Se vierte agua hasta el mismo nivel en cada uno de los recipientes mostrados en la figura, todos los cuales tienen la misma área en su base (Fig. 17). Si la presión es la misma en el fondo de cada recipiente, la fuerza experimentada por la base de cada recipiente es la misma. ¿Entonces por qué dan los tres recipientes pesos diferentes cuando se les pone en una báscula? Este resultado aparentemente contradictorio es conocido comúnmente como *paradoja hidrostática*.

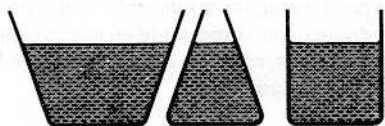


Figura 17 Pregunta 7.

8. ¿Se cumple el principio de Arquímedes en una vasija en caída libre o en un satélite que se mueva en órbita circular?
9. Una bola esférica hecha de corcho flota medio sumergida en una martinita de té en reposo sobre la Tierra. ¿Flotará, o se hundirá el corcho, a bordo de un navío espacial que (a) se desplace libremente en el espacio y (b) que se encuentre sobre la superficie de Marte?
10. ¿Cómo trabaja una ventosa (copa de succión)?
11. ¿Tiene la fuerza de flotación sobre un submarino sumergido la misma intensidad a cualquier profundidad?
12. Explique cómo asciende un submarino, cómo se sumerge, y cómo se mantiene a una profundidad fija. ¿Emplean los peces los mismos principios? (Véase "The Buoyancy of Marine Animals", por Eric Denton, *Scientific American*, julio de 1960, pág. 118, y "Submarine Physics", por G. P. Harnwell, *American Journal of Physics*, marzo de 1948, pág. 127).
13. Un trozo de madera flota en una palangana de agua dentro de un elevador. Cuando el elevador parte del reposo y acelera hacia abajo, ¿flotará el trozo de madera más arriba sobre la superficie del agua?
14. Dos cubetas iguales se llenan hasta el borde con agua, pero una tiene un trozo de madera que flota. ¿Cuál de las dos cubetas (acaso) pesa más?
15. Calcule con cierto cuidado la fuerza de flotación que ejerce la atmósfera sobre usted.
16. De acuerdo con el problema muestra 3, el 89.6% de un iceberg se halla sumergido. Sin embargo, ocasionalmente los icebergs se vuelcan, con resultados posiblemente desastrosos sobre un navío cercano. ¿Cómo puede esto suceder considerando que la mayor parte de su masa está bajo el nivel del mar?
17. ¿Podemos hundir a un barco de hierro sifoneando agua de mar hacia dentro de él?
18. Se les advierte a los buceadores con tanques de aire que no contengan la respiración al nadar hacia arriba. ¿Por qué?
19. Una vasija está completamente llena de agua líquida en el punto de congelación y tiene un cubo de hielo que flota, también en el punto de congelación. Al fundirse el cubo, ¿qué le sucede al nivel de agua en estos tres casos: (a) el cubo es hielo sólido; (b) el cubo contiene algunos granos de arena; y (c) el cubo contiene algunas burbujas?
20. Aunque se supone que los paracaídas frenan la caída, suelen diseñarse con un agujero en la parte superior. Explique por qué.
21. Una pelota flota sobre la superficie del agua en un recipiente expuesto a la atmósfera. ¿Permanecerá sumergida la pelota a su profundidad anterior o se hundirá o elevará un poco si (a) se tapa el recipiente y se le retira el aire o (b) si se tapa el recipiente y se comprime el aire?
22. Explique por qué un globo inflado sólo se elevará hasta una altura limitada una vez que comienza a elevarse, mientras que un submarino se hundirá hasta el lecho mismo del océano una vez que haya comenzado a hundirse, a no ser que se lleve a cabo algún cambio.
23. ¿Por qué un globo pesa lo mismo cuando está vacío que cuando está lleno de aire a la presión atmosférica? ¿Serían los pesos iguales si se pesaran en un vacío?
24. Los recipientes de líquidos tienden a gotear cuando se les eleva en un aeroplano. ¿Por qué? ¿Importa que estén con el lado correcto hacia arriba o no? ¿Importa que estén inicialmente llenos o no?
25. Durante la Segunda Guerra Mundial un carguero dañado que apenas era capaz de flotar en el Mar del Norte se dirigió por el estuario del Támesis hacia los muelles de Londres. Se hundió antes de que pudiera llegar. ¿Por qué?
26. ¿Es verdad que un objeto flotante estará en un equilibrio estable únicamente si su centro de flotación está encima de su centro de gravedad? Ilustre con ejemplos.
27. Los troncos que se descargan verticalmente en un estanque no permanecen verticales, sino que flotan "planos" sobre el agua. Explique.
28. ¿Por qué un barco que se hunde, a menudo se voltea al sumergirse en el agua?
29. Una barcaza llena de chatarra de hierro está en la esclusa de un canal. Si se arroja al hierro por la borda, ¿qué le pasa al nivel de agua de la esclusa? ¿Y qué si se le arroja sobre el terreno al lado del canal?
30. Una cubeta de agua está suspendida de un dinamómetro. ¿Cambiará la lectura del dinamómetro cuando un trozo de hierro suspendido de un cordón se sumerja en el agua? ¿Y cuando se pone en el agua un trozo de corcho?
31. Si se le añade suficiente hierro a un extremo de una viga o de un leño de madera uniforme, ¿flotará verticalmente en lugar de horizontalmente (vea la pregunta 27)? Explique por qué.

32. Aunque existen dificultades prácticas, es posible, en principio, hacer flotar a un trasatlántico en unos cuantos barriles de agua. ¿Cómo emprendería usted esta labor?
33. Una cubeta de agua destapada está sobre un plano sin fricción inclinado a un ángulo α con respecto a la horizontal. Halle la inclinación de equilibrio con la horizontal de la superficie libre del agua cuando (a) la cubeta se mantenga en reposo; (b) se permita que la cubeta se deslice plano abajo a una velocidad constante ($a = 0$, $v = \text{constante}$); y (c) se deslice la cubeta hacia abajo sin restricción ($a = \text{constante}$). ¿Qué pasará si el plano es curvo de modo que $a \neq \text{constante}$?
34. En un barómetro, ¿qué tan importante es que su diámetro interior sea uniforme? ¿Y que el tubo del barómetro esté absolutamente vertical?
35. Un manómetro de tubo abierto tiene un tubo de diámetro igual al doble del otro. Explique cómo afecta esto a la operación del manómetro. ¿Importa cuál de los dos extremos esté conectado a la cámara cuya presión se quiere medir?
36. Hemos considerado a los líquidos bajo compresión. ¿Pueden ser puestos bajo tensión los líquidos? De ser esto posible, ¿se separarán bajo la tensión suficiente como lo hacen los sólidos? (Véase "The Tensile Strength of Liquids", por Robert E. Apfel, *Scientific American*, diciembre de 1972, pág. 58).
37. Explique por qué dos placas de vidrio que contienen una película delgada de agua entre ellas son difíciles de separar por medio de un jalón directo, pero pueden separarse con facilidad deslizándolas.
38. Dé una explicación molecular de por qué la tensión superficial disminuye al aumentar la temperatura.
39. Las películas de jabón son mucho más estables que las películas de agua. ¿Por qué? (Considérese cómo reacciona la tensión superficial al estiramiento.)
40. Explique por qué una película de jabón se revienta al aparecer un orificio pequeño en ella.
41. Explique estas observaciones: (a) el agua forma glóbulos sobre una placa engrasada pero no sobre una limpia; (b) las burbujas pequeñas en la superficie del agua se unen entre sí.
42. Si el jabón reduce la tensión superficial del agua, ¿por qué soplamos burbujas de jabón en lugar de burbujas de agua?
43. Ciertos insectos pueden caminar sobre el agua. Calcule el peso máximo que puede tener tal insecto y aún sostenerse de este modo.
44. ¿Cuál es la fuente de energía que permite que un fluido se eleve en un tubo capilar (es decir, en un tubo de vidrio hueco y fino)?
45. ¿Qué significa decir que ciertos líquidos pueden ejercer una pequeña presión negativa?

PROBLEMAS

Sección 17-2 Presión y densidad

1. Halle el aumento de presión en el fluido de una jeringa cuando una enfermera aplica una fuerza de 42.3 N al émbolo de la jeringa de 1.12 cm de diámetro.
2. Tres líquidos que no se mezclan se vierten dentro de un recipiente cilíndrico. Las cantidades y densidades de los líquidos son 0.50 L, 2.6 g/cm³; 0.25 L, 1.0 g/cm³; y 0.40 L, 0.80 g/cm³ (L = litro). Halle la fuerza total sobre el fondo del recipiente. (Despréciense la contribución debida a la atmósfera.) ¿Importa que se mezclen los líquidos?
3. La ventana de una oficina tiene 3.43 m por 2.08 m. Como resultado del paso de una tormenta, la presión del aire exterior decae a 0.962 atm, pero en el interior la presión se mantiene en 1.00 atm. ¿Qué fuerza neta empujará a la ventana hacia afuera?
4. Un cubo sólido de cobre tiene un borde de 85.5 cm de longitud. ¿Cuánta presión debe ejercerse para reducir a 85.0 cm la longitud del borde del cubo? El módulo volumétrico del cobre es de 140 GPa.
5. A una caja herméticamente cerrada con una tapa de 12 in² de área se le practica un vacío parcial. Si se requiere una fuerza de 108 lb para retirar la tapa de la caja, y la presión atmosférica exterior es de 15 lb/in², ¿cuál es la presión dentro de la caja?

6. En 1654 Otto Von Guericke, burgomaestre de Magdeburgo e inventor de la bomba de aire, dio una demostración ante la Dieta imperial en la que dos tiros de caballos no pudieron separar a dos semiesferas de latón al vacío. (a) Demuestre que la fuerza F necesaria para separar a las semiesferas es $F = \pi R^2 \Delta p$, donde R es el radio (exterior) de las semiesferas y Δp es la diferencia de presiones dentro y fuera de la esfera (Fig. 18). (b) Haciendo que R sea igual a 0.305 m y que la presión interior sea de 0.100 atm, ¿qué fuerza deberían ejercer los tiros de caballos para separar a las semiesferas? (c) ¿Por qué se emplearon dos tiros de caballos? ¿No habría demostrado lo mismo un solo grupo de caballos?

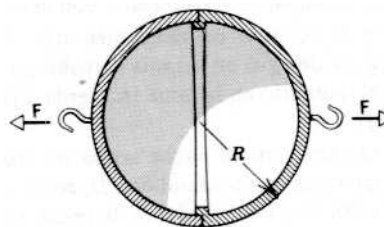


Figura 18 Problema 6.

Sección 17-3 Variación de la presión en un fluido en reposo

7. El pulmón humano funciona contra una diferencial de presión de menos de 0.050 atm. ¿A qué profundidad del nivel del agua puede nadar un buceador que respire por medio de un tubo largo (snorkel)?
8. Calcule la diferencia hidrostática en la presión de la sangre entre el cerebro y los pies de una persona de 1.83 m de altura.
9. Halle la presión total, en pascal, a 118 m bajo la superficie del océano. La densidad del agua de mar es de 1.024 g/cm^3 y la presión atmosférica al nivel del mar es de $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$.
10. Las descargas del drenaje de una casa construida en una pendiente están a 8.16 m por debajo del nivel de la calle. Si el drenaje está a 2.08 m bajo el nivel de la calle, halle la diferencia de presión mínima que debe crear la bomba de drenaje para transferir los desperdicios cuya densidad media es de 926 kg/m^3 .
11. La figura 19 muestra el diagrama de fase del carbono, indicando los intervalos de temperatura y de presión en que se cristalizará el carbono como diamante o como grafito. ¿Cuál es la profundidad mínima a la que pueden formarse los diamantes si la temperatura local es de 1000°C y las rocas bajo la superficie tienen una densidad de 3.1 g/cm^3 ? Suponga que, como en un fluido, la presión se debe al peso del material que está encima.

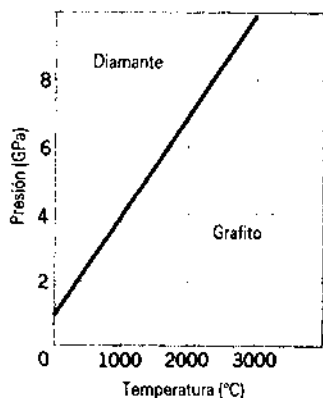


Figura 19 Problema 11.

12. De acuerdo con el modelo de temperatura constante de la atmósfera de la Tierra, ¿cuál es la presión (en atm) a una altitud de 5.00 km, y (b) ¿a qué altitud es la presión igual a 0.500 atm? Compare sus respuestas con la figura 5.
13. Un tubo en U sencillo contiene mercurio. Cuando se vierten 11.2 cm de agua en la rama derecha, ¿a qué altura se elevará el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial?
14. Detrás de la cara vertical aguas arriba de una presa se almacena agua con una profundidad D , como se muestra en la figura 20. Sea W el ancho de la presa. (a) Halle la fuerza horizontal resultante ejercida sobre la presa por la presión manométrica del agua y (b) la torca neta de-

bida a la presión manométrica del agua ejercida respecto a una línea que pase por O paralela al ancho de la presa. (c) ¿Dónde está situada la línea de acción de la fuerza resultante equivalente?

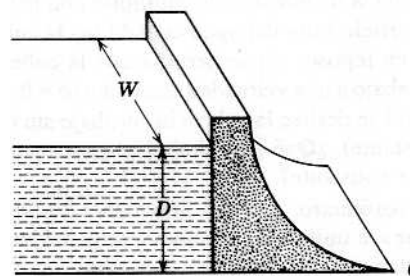


Figura 20 Problema 14.

15. Una alberca tiene las dimensiones de $80 \text{ ft} \times 30.0 \text{ ft} \times 8.0 \text{ ft}$. (a) Cuando está llena de agua, ¿cuál es la fuerza (debida al agua únicamente) sobre el fondo? ¿Y sobre los extremos? ¿Y sobre los costados? (b) Si se ha preguntado usted si las paredes de concreto se volcarán o no, ¿es apropiado tomar en cuenta para responder a esto la presión atmosférica?
16. ¿Cuál sería la altura de la atmósfera si la densidad del aire (a) fuese constante y si (b) decreciese linealmente hasta cero con la altura? Suponga una densidad al nivel del mar de 1.21 kg/m^3 .
17. Los miembros de una tripulación tratan de escapar de un submarino averiado que está a 112 m bajo la superficie. ¿Cuánta fuerza deberán aplicar contra la escotilla que abre hacia afuera, la cual tiene 1.22 m por 0.590 m, para poder abrirla?
18. Un barril cilíndrico tiene un tubo angosto fijo a la tapa, como se muestra junto con sus dimensiones en la figura 21. El recipiente está lleno de agua hasta la parte superior del tubo. Calcule la razón de la fuerza hidrostática ejercida sobre el fondo del barril y el peso del agua contenida en su interior. ¿Por qué no es igual a uno esta razón? (Despréciase la presencia de la atmósfera.)

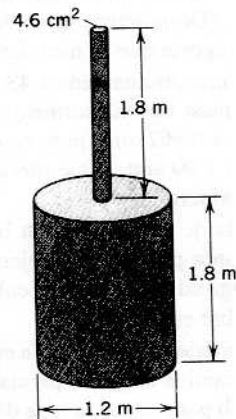


Figura 21 Problema 18.

19. Al analizar ciertas características geológicas de la Tierra, suele ser conveniente suponer que la presión a cierto *nivel de compensación* horizontal, a cierta profundidad en la Tierra, es la misma dentro de una gran región e igual a la ejercida por el peso del material que está encima. Esto es, la presión en el nivel de compensación está dada por la fórmula de la presión hidrostática (fluida). Esto requiere, por ejemplo, que las montañas tengan *raíces* de baja densidad; véase la figura 22. Considere una montaña de 6.00 km de altura. Las rocas continentales tienen una densidad de 2.90 g/cm³; bajo el continente se encuentra el manto, con una densidad de 3.30 g/cm³. Calcule la profundidad D de la raíz. (*Sugerencia*: Iguale la presión en los puntos a y b ; la profundidad y y del nivel de compensación se cancelará.)

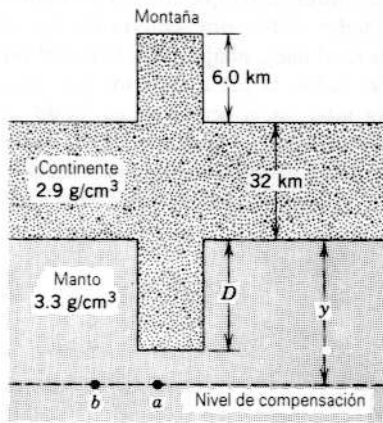


Figura 22 Problema 19.

20. (a) Demuestre que la densidad ρ del agua a una profundidad y en el océano se relaciona con la densidad superficial ρ_0 según

$$\rho \approx \rho_0 [1 + (\rho_0 g / B) y],$$

donde $B = 2.2$ GPa es el módulo volumétrico del agua. Desprecie las variaciones de la temperatura. (b) ¿En qué fracción excederá la densidad a una profundidad de 4200 m a la densidad de la superficie?

21. Una probeta de 12.0 cm de longitud llena de agua se hace girar en un plano horizontal en una centrífuga a 655 rev/s. Calcule la presión hidrostática en la base exterior de la probeta. El extremo inferior de la probeta está a 5.30 cm del eje de rotación.
22. La superficie de contacto de dos fluidos de densidades diferentes que están en reposo y no se mezclan es horizontal. Demuestre que este resultado general surge (a) del hecho de que la energía potencial de un sistema debe ser mínima en equilibrio estable; (b) del hecho de que en dos puntos cualesquiera en un plano horizontal en cualquiera de los fluidos las presiones son iguales.
23. Dos vasijas cilíndricas idénticas con sus bases al mismo nivel contienen cada una un líquido de densidad ρ . El área de cualquiera de las bases es A , pero en una vasija la altura

del líquido es h_1 y en la otra h_2 . Halle el trabajo efectuado por la gravedad al igualarse los niveles cuando las dos vasijas se conectan entre sí.

24. Un tubo en U está lleno con un líquido homogéneo. El líquido se presiona temporalmente en uno de los lados por un émbolo. El émbolo se retira y el nivel del líquido en cada lado oscila. Demuestre que el periodo de oscilación es $\pi\sqrt{2L/g}$, donde L es la longitud total del líquido en el tubo.
25. (a) Demuestre que la ecuación 13, la variación de la presión con la altitud en la atmósfera (tomando la temperatura como uniforme), puede escribirse en términos de la densidad ρ como:

$$p = \rho_0 e^{-y/a},$$

donde ρ_0 es la densidad en el suelo ($y = 0$). (b) Suponga que la fuerza de arrastre D debida al aire sobre un objeto que se mueve con una velocidad v está dada por $D = CA\rho v^2$, donde C es una constante, A es el área frontal de la sección transversal del objeto, y ρ es la densidad local del aire. Halle la altitud a la cual la fuerza de arrastre sobre un cohete es máxima si el cohete se lanza verticalmente y se mueve con una aceleración constante hacia arriba a .

26. (a) Considere un recipiente de fluido sometido a una aceleración vertical a hacia arriba. Demuestre que la variación de la presión con la profundidad en el fluido está dada por

$$p = \rho h(g + a),$$

donde h es la profundidad y ρ es la densidad. (b) Demuestre también que si todo el fluido experimenta una aceleración vertical a hacia abajo, la presión a una profundidad h está dada por

$$p = \rho h(g - a).$$

(c) ¿Qué pasa en caída libre?

27. Considere la aceleración horizontal de una masa de líquido en un tanque abierto. Una aceleración de esta clase causa que la superficie del líquido decaiga en el frente del tanque y se eleve en la parte trasera. Demuestre que la superficie del líquido adquiere una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal, donde $\tan \theta = a/g$, siendo a la aceleración horizontal. (b) ¿Cómo varía la presión con h , la profundidad vertical bajo la superficie?
28. La tensión en un resorte que mantiene a un bloque sólido bajo la superficie de un líquido (de densidad mayor que el sólido) es T_0 cuando la vasija que lo contiene (Fig. 23) está en reposo. Demuestre que la tensión T , cuando la vasija tenga una aceleración vertical a hacia arriba, está dada por $T_0(1 + a/g)$.
29. (a) Un fluido está girando con una velocidad angular constante ω con respecto al eje vertical central de un recipiente cilíndrico. Demuestre que la variación de la presión en la dirección radial está dada por

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r.$$

(b) Sea $p = p_c$ en el eje de rotación ($r = 0$) y demuestre entonces que la presión p en cualquier punto r es

$$p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

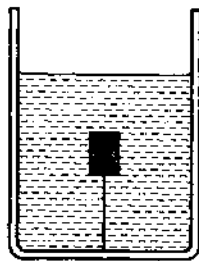


Figura 23 Problema 28.

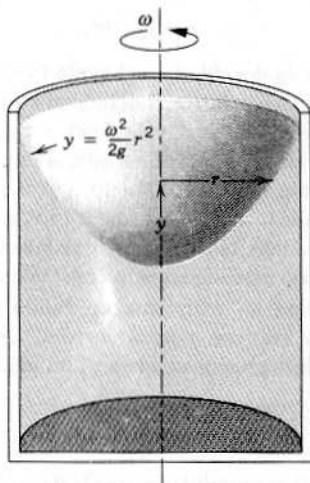


Figura 24 Problema 29.

(c) Demuestre que la superficie del líquido tiene la forma de un paraboloides (Fig. 24); es decir, una sección transversal vertical de la superficie es la curva $y = \omega^2 r^2 / 2g$. (d) Demuestre que la variación de la presión con la profundidad es $p = \rho gh$.

Sección 17-4 Principio de Pascal y principio de Arquímedes

30. (a) Si el pequeño émbolo de una palanca hidráulica tiene un diámetro de 3.72 cm, y el émbolo grande uno de 51.3 cm, ¿qué peso sobre el émbolo pequeño soportará 18.6 kN (p. ej., un automóvil) sobre el émbolo grande? (b) ¿A qué distancia debe moverse el émbolo pequeño para que el automóvil se eleve 1.65 m?
31. Un bote que flota en agua dulce desaloja 35.6 kN de agua. (a) ¿Qué peso de agua desalojaría este bote si estuviese flotando en agua salada de 1024 kg/m³ de densidad? (b) ¿Cambia el volumen del agua desalojada? Si cambia, ¿en cuánto?
32. Un bloque de madera flota en el agua con 0.646 de su volumen sumergido. En el aceite tiene 0.918 de su volumen sumergido. Halle la densidad (a) de la madera y (b) del aceite.
33. Un bote de hojalata tiene un volumen total de 1200 cm³ y una masa de 130 g. ¿Cuántos gramos de perdigones de plomo podría contener sin hundirse en el agua? La densidad del plomo es 11.4 g/cm³.

34. Alrededor de una tercera parte del cuerpo de un físico que se halla nadando en el Mar Muerto está sobre el nivel del agua. Suponiendo que la densidad del cuerpo humano sea de 0.98 g/cm³, halle la densidad del agua en el Mar Muerto. ¿Por qué es mucho más grande que 1.0 g/cm³?
35. Suponga que la densidad de unas pesas de latón sea de 8.0 g/cm³ y que la del aire sea de 0.0012 g/cm³. ¿Qué error fraccionario surge de despreciar la flotabilidad del aire al pesar un objeto de 3.4 g/cm³ de densidad en una balanza de brazos?
36. Una pieza de hierro fundido que contiene cierto número de porosidades pesa 6130 N en el aire y 3970 N en el agua. ¿Cuál es el volumen de las porosidades de la pieza de fundición? La densidad del hierro es de 7870 kg/m³.
37. Un objeto cúbico de dimensión $L = 0.608$ m de lado y de peso $W = 4450$ N determinado en el vacío está suspendido de un alambre en un tanque abierto que contiene un líquido de densidad $\rho = 944$ kg/m³, como en la figura 25. (a) Halle la fuerza total hacia abajo ejercida por el líquido y por la atmósfera sobre la parte superior del objeto. (b) Halle la fuerza total hacia arriba en el fondo del objeto. (c) Halle la tensión en el alambre. (d) Calcule la fuerza de flotación sobre el objeto usando el principio de Arquímedes. ¿Qué razón existe entre todas estas cantidades?

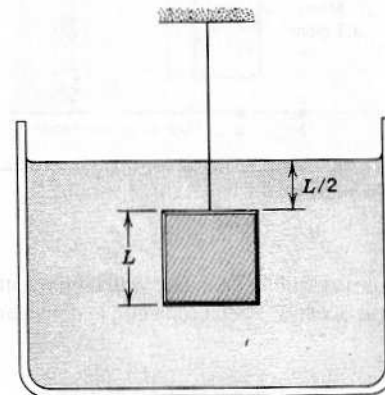


Figura 25 Problema 37.

38. Un pez mantiene su profundidad en el agua salada ajustando el contenido de aire de su hueso poroso o de sus bolsas de aire para hacer que su densidad promedio sea la misma que la del agua. Suponga que el pez tiene una densidad de 1.08 g/cm³ con sus bolsas de aire aplastadas. ¿A qué fracción del volumen de su cuerpo expandido deberá el pez inflar las bolsas de aire para reducir su densidad promedio a la del agua? Suponga que la densidad del aire es de 0.00121 g/cm³.
39. Se ha propuesto un proyecto de traslado de gas natural desde los campos de gas del Mar del Norte en dirigibles enormes, usando el propio gas para proporcionar la fuerza de ascenso. Calcúlese la fuerza necesaria para amarrar al navío aéreo a la tierra para un aterrizaje cuando llegue completamente cargado con 1.17×10^6 m³ de gas con una densidad de 0.796 kg/m³. La densidad del aire es de

1.21 kg/m³. (El peso del navío es despreciable en comparación.)

40. El pequeño dirigible *Columbia* de Goodyear (véase la Fig. 26) está navegando lentamente a baja altitud, lleno como es costumbre de gas helio. Su carga útil máxima, incluyendo la tripulación y la carga, es de 1280 kg. ¿Cuánta carga más podría transportar el *Columbia* si sustituimos el helio por hidrógeno? ¿Por qué no se hace? El volumen del espacio interior ocupado por el helio es de 5000 m³. La densidad del gas helio es de 0.160 kg/m³ y la densidad del hidrógeno es de 0.0810 kg/m³.

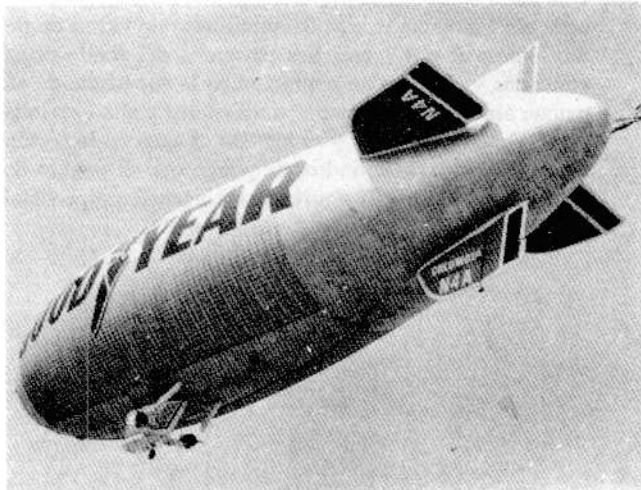


Figura 26 Problema 40.

41. Una esfera hueca de hierro flota casi completamente sumergida en agua; véase la figura 27. El diámetro exterior es de 58.7 cm y la densidad del hierro es de 7.87 g/cm³. Halle el diámetro interior de la esfera.

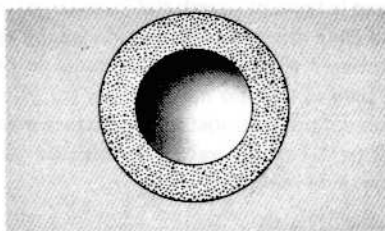


Figura 27 Problema 41.

42. Un bloque de madera tiene una masa de 3.67 kg y una densidad de 594 kg/m³. Va a ser cargado con plomo para que flote en el agua con 0.883 de su volumen sumergido. ¿Qué masa de plomo se necesita (a) si el plomo está encima de la madera y (b) si el plomo está amarrado debajo de la madera? La densidad del plomo es de 1.14×10^4 kg/m³.
43. Tres niños que pesan 82.4 lb cada uno construyen una balsa enlazando entre sí troncos de 1.05 ft de diámetro y

5.80 ft de longitud. ¿Cuántos troncos se necesitarán para mantenerla a flote? Considere que la densidad de la madera es de 47.3 lb/ft³.

44. (a) ¿Cuál es el área mínima de un bloque de hielo de 0.305 m de espesor que flota en el agua para que sostenga encima de sí a un automóvil de 1120 kg de masa? (b) ¿Importa dónde esté colocado el automóvil sobre el bloque de hielo? La densidad del hielo es de 917 kg/m³.
45. Un objeto que flota en mercurio tiene una cuarta parte de su volumen sumergida. Si se añade agua suficiente para cubrir al objeto, ¿qué fracción de su volumen permanecerá sumergida en el mercurio?
46. Un leño cilíndrico lleva una carga de plomo en un extremo de modo que flote en posición erecta en el agua, como en la figura 28. La longitud de la parte sumergida es $L = 2.56$ m. El leño es puesto a oscilar verticalmente. (a) Demuestre que la oscilación es armónica simple. (b) Halle el periodo de la oscilación. Desprecie el hecho de que el agua tiene un efecto amortiguador sobre el movimiento.

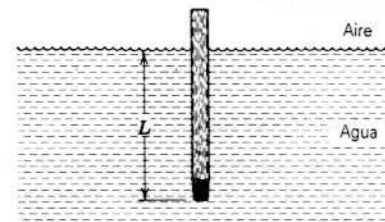


Figura 28 Problema 46.

47. Un automóvil tiene una masa total de 1820 kg. El volumen del espacio de aire del compartimiento de pasajeros es de 4.87 m³. El volumen del motor y de las ruedas frontales es de 0.750 m³, y el volumen de las ruedas traseras, el tanque de gas y la cajuela es 0.810 m³. El agua no puede entrar en estas áreas. El automóvil está estacionado en una colina; el cable del freno de mano se revienta y el automóvil rueda cuesta abajo hasta un lago; véase la figura 29. (a) Al principio no entra nada de agua al compartimiento de pasajeros. ¿Qué volumen del automóvil, en metros cúbicos, está bajo la superficie del agua cuando el automóvil flota como se muestra en la figura? (b) El automóvil se hunde al entrar el agua lentamente. ¿Cuántos metros cúbicos de agua han entrado al automóvil cuando desaparece bajo la superficie del agua? (El automóvil permanece horizontal debido a una carga pesada en la cajuela.)

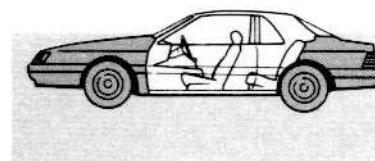


Figura 29 Problema 47.

48. Usted coloca un frasco de vidrio, parcialmente lleno de agua, dentro de una tina (Fig. 30). Tiene una masa de 390 g y un volumen interior de 500 cm³. Ahora comienza usted a llenar la tina de agua y halla, por experimentación, que si el frasco está lleno a menos de la mitad flotará; pero si está lleno a más de la mitad permanece en el fondo de la tina mientras el agua se eleva hasta su borde. ¿Cuál es la densidad del material de que está hecho el frasco?

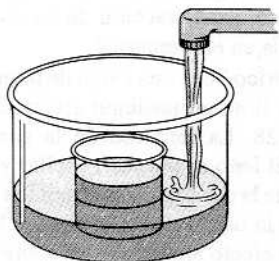


Figura 30 Problema 48.

Sección 17-5 Medición de la presión

49. Calcule la densidad del vino tinto que Pascal usó en su barómetro de 14 m de longitud. Suponga que el vino llenaba el tubo.
50. La presión en la superficie del planeta Venus es de 90 atm (es decir, 90 veces la presión en la superficie de la Tierra). ¿De qué longitud tendría que ser un barómetro de mercurio para medir esta presión? Suponga que el mercurio se mantiene a 0° C.

Sección 17-6 Tensión superficial

51. ¿Cuánta energía está almacenada en la superficie de una burbuja de jabón de 2.1 cm de radio si su tensión superficial es de 4.5×10^{-2} N/m?
52. Una película delgada de agua de 80.0 μm de espesor está emparedada entre dos placas de vidrio y forma una mancha circular de 12.0 cm de radio. Calcule la fuerza normal necesaria para separar a las placas si la tensión superficial del agua es de 0.072 N/m.
53. Al emplear una solución de jabón en la que la tensión superficial es de 0.025 N/m un niño sopla una burbuja de jabón de 1.40 cm de radio. ¿Cuánta energía se usa para estirar la superficie del jabón?
54. La tensión superficial del ⁴He líquido es de 0.35 mN/m y la densidad líquida es de 145 kg/m³. Estime (a) el número de átomos/m² de superficie y (b) la energía por enlace, en eV, en el líquido a esta temperatura. La masa de un átomo de helio es de 6.64×10^{-27} kg. Imagine a cada átomo como un cubo y suponga que cada átomo interactúa únicamente con sus cuatro vecinos más cercanos.
55. Demuestre que la diferencia de presión entre el interior y el exterior de una burbuja de radio r es $4\gamma/r$, donde γ es la tensión superficial del líquido con el cual ha sido soplada la burbuja.
56. Una barra sólida de vidrio de radio $r = 1.3$ cm está colocada coaxialmente dentro de un cilindro de vidrio de radio interno $R = 1.7$ cm. Sus extremos del fondo están alineados y situados en contacto con la superficie de un tanque abierto de agua y perpendiculares a ella (véase la Fig. 31). ¿A qué altura y se elevará el agua en la región entre la barra y el cilindro? Suponga que el ángulo de contacto sea 0° y use 72.8 mN/m para la tensión superficial del agua.

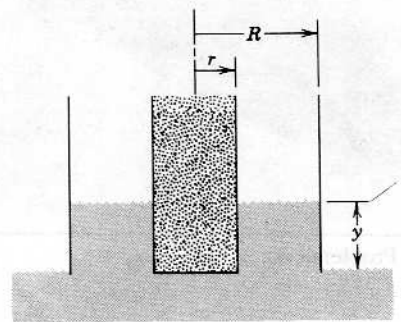


Figura 31 Problema 56.

57. Una burbuja de jabón en el aire tiene un radio de 3.20 cm. Se la sopla luego hasta un radio de 5.80 cm. Use 26.0 mN/m para la tensión superficial (constante) de la burbuja. (a) ¿Cuál es la diferencia de presión inicial en la película de la burbuja? (b) Halle la diferencia de presión en la película para el tamaño más grande. (c) ¿Cuánto trabajo se efectuó contra la atmósfera para hacer más grande a la burbuja? (d) ¿Cuánto trabajo se efectuó para estirar la superficie de la burbuja?

CAPÍTULO 18

DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

Pasamos ahora de la estática de los fluidos a la dinámica de los fluidos en movimiento. En esencia, existe poca diferencia entre la dinámica del movimiento de los fluidos y la dinámica de los movimientos de la partícula y del cuerpo rígido, que ya hemos estudiado en capítulos anteriores. Empleamos aquí conceptos ya conocidos para analizar la dinámica de los fluidos, incluyendo las leyes de Newton del movimiento y la conservación de la masa y de la energía. Así pues, en este capítulo aplicaremos estos principios a los fluidos, los que describimos empleando variables tales como la presión y la densidad que hemos presentado en el capítulo 17.

Comenzaremos con un modelo simplificado del flujo fluido, del cual no tendremos en cuenta las fuerzas de disipación. Este enfoque es similar a nuestro estudio previo de la dinámica de la partícula, donde en un principio no tomábamos en cuenta a las fuerzas de disipación (de fricción). Una ventaja de este acceso es que permite un análisis en términos de la conservación de la energía mecánica, como lo hicimos en el capítulo 8 en el caso de las partículas. Más adelante en el presente capítulo ofreceremos una descripción breve de los resultados interesantes y poco usuales que suceden en los fluidos reales cuando se toman en cuenta las fuerzas de disipación, llamadas fuerzas viscosas.

18-1 CONCEPTOS GENERALES DEL FLUJO DE LOS FLUIDOS

Una manera de describir el movimiento de un fluido consiste en dividirlo en elementos de volumen infinitesimal, a los cuales podemos llamar *partículas fluidas*, y seguir el movimiento de cada partícula. Si conocemos a las fuerzas que actúan sobre cada partícula del fluido, podemos entonces resolver para las coordenadas y velocidades de cada partícula en función del tiempo. Este procedimiento, que es una generalización directa de la mecánica de la partícula, fue desarrollado por primera vez por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Puesto que el número de partículas de fluido es generalmente muy grande, el uso de este método es una tarea formidable.

Existe otro tratamiento distinto, desarrollado por Leonhard Euler (1707-1783), que es más conveniente en la mayoría de los casos. En él abandonamos el intento de especificar la historia de cada partícula del fluido y, en cambio, especificamos la densidad y la velocidad del fluido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Éste es el método que usaremos. Describiremos al movimiento del fluido especificando la densidad

$\rho(x, y, z, t)$ y la velocidad $v(x, y, z, t)$ en el punto x, y, z en el tiempo t . Centraremos entonces nuestra atención en qué está sucediendo en un punto en particular del espacio en ese tiempo determinado, en lugar de ocuparnos de qué le sucede a una partícula dada de fluido. Cualquier cantidad empleada para describir el estado del fluido, por ejemplo, la presión p , tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Si bien, esta descripción del movimiento del fluido centra la atención sobre un punto en el espacio en lugar de sobre una partícula del fluido, no podemos evitar seguir a las partículas del fluido en sí mismas, cuando menos durante intervalos de tiempo cortos dt . Después de todo, las leyes de la mecánica se aplican a partículas y no a puntos en el espacio.

Consideraremos en primer lugar algunas características generales del flujo de los fluidos.

1. *El flujo de los fluidos puede ser estacionario o no estacionario.* Describamos al flujo en términos de los valores de variables tales como la presión, la densidad, y la velocidad de flujo en cada punto del fluido. Si estas variables son constantes en el tiempo, se dice que el flujo es *estacionario*. Los valores de estas variables cambian por lo general de un punto a otro, pero no cambian con el

tiempo en cualquier punto en particular. A menudo puede conseguirse esta condición a velocidades de flujo bajas; una corriente que fluya continuamente es un ejemplo. En el flujo no es estacionario, como en una ola grande provocada por la marea, las velocidades v son funciones del tiempo. En el caso del flujo *turbulento*, tal como en los rápidos de un río o en una caída de agua, las velocidades varían erráticamente de punto a punto así como de tiempo a tiempo.

2. *El flujo de un fluido puede ser compresible o incompresible.* Si la densidad ρ de un fluido es constante, independiente de x , y , z , y t , su flujo se llama *flujo incompresible*. Puede considerarse usualmente que los líquidos fluyen incompresiblemente. Pero aun en un gas altamente compresible la variación de la densidad puede ser insignificante, y para objetos prácticos podemos considerar que el flujo es incompresible. Por ejemplo, al volar a velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el aire (que se describe como aerodinámica subsónica), el flujo del aire sobre las alas es casi incompresible.

3. *El flujo de los fluidos puede ser viscoso o no viscoso.* En el movimiento de los fluidos la viscosidad es el análogo de la fricción en el movimiento de los sólidos. Cuando un fluido fluye de modo que no disipe energía por medio de fuerzas viscosas, se dice que el fluido es *no viscoso*. En muchos casos, como en problemas de lubricación, la viscosidad es extremadamente importante; por ejemplo, los aceites para motor se denominan de acuerdo a su viscosidad y a su variación con la temperatura. En otros casos, la viscosidad puede ser de poca importancia relativamente, y al despreciarla podemos emplear una descripción más sencilla en términos de flujo no viscoso.

4. *El flujo de los fluidos puede ser rotatorio o no rotatorio.* Si un elemento del fluido en movimiento no gira en torno a un eje que pase por el centro de masa del elemento, se dice que el flujo es *no rotatorio*. Podemos imaginar a una pequeña rueda de paletas sumergida en el flujo en movimiento (Fig. 1). Si la rueda se mueve sin girar, el movimiento es no rotatorio; de otro modo será rotatorio. Nótese que un elemento en particular del fluido puede moverse en una trayectoria circular y experimentar también un flujo no rotatorio; una analogía es el movimiento de las góndolas colgantes de una "rueda gigante" de feria: aun cuando la rueda gire, las personas que viajan en las góndolas no giran respecto a sus centros de masa. El remolino que se forma cuando el agua fluye por el drenaje de la bañera es un ejemplo de esta clase de flujo no rotatorio.

Para simplificar la descripción matemática del movimiento de un fluido, limitaremos nuestra exposición de la dinámica de los fluidos en su mayor parte al flujo

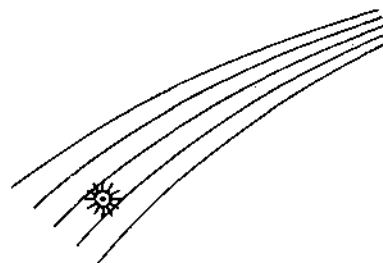


Figura 1 Una rueda de paletas pequeña que flota libremente en un líquido al fluir. Si la rueda gira, llamamos al flujo *rotatorio*; si no, el flujo es *no rotatorio*.

estacionario, incompresible, no viscoso, no rotatorio. Sin embargo, corremos el riesgo de que, con tantas suposiciones simplificantes, ya no estemos estudiando un fluido real. Además, a veces es difícil decidir si una propiedad determinada de un fluido (digamos, su viscosidad) puede ser despreciada en una situación particular. A pesar de todo esto, el análisis restringido que vamos a llevar a cabo tiene una aplicación amplia en la práctica, como veremos.

18-2 TRAYECTORIA DE UNA CORRIENTE Y LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En el flujo estacionario la velocidad v en un punto dado es constante en el tiempo. Consideremos al punto P (Fig. 2) dentro del fluido. Puesto que v en P no cambia con el tiempo en el flujo estacionario, cada partícula de fluido que llegue a P pasará con la misma velocidad y en la misma dirección. El movimiento de cada partícula que pase por P sigue entonces la misma trayectoria, llamada *línea de corriente*. Cada partícula de fluido que pase por P pasará más tarde por puntos más a lo largo de la línea de corriente, tal como Q y R en la figura 2. Además, cada partícula de fluido que pase por R debe haber pasado previamente por P y Q .

La magnitud del vector velocidad de la partícula de fluido cambiará, en general, al moverse a lo largo de la línea de corriente. La dirección del vector de la velocidad

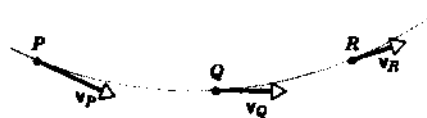


Figura 2 En el flujo estacionario, una partícula de fluido que pase por P traza una línea de corriente, pasando más tarde por los puntos Q y R corriente abajo. Cualquier otra partícula que pase por P debe seguir esta misma trayectoria.

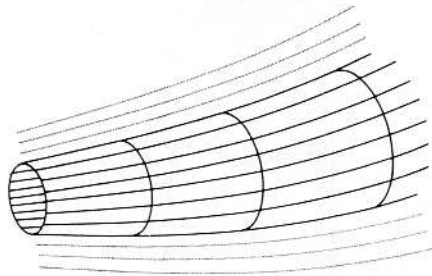


Figura 3 Un haz de líneas de corriente forma un tubo de flujo.

en cualquier punto a lo largo de la línea de corriente es siempre tangente a ella.

Dos líneas de corriente no pueden cruzarse entre sí ya que, si lo hicieran, una partícula de fluido que llegue podría seguir un camino u otro, y el flujo no podría ser estacionario. En el flujo estacionario el patrón de las líneas de corriente no cambia con el tiempo.

En principio podemos trazar una línea de una corriente a través de cada punto del fluido. Suponiendo un flujo estacionario, elegimos un número finito de líneas de corriente para formar un haz, como el patrón de líneas de corriente de la figura 3. Esta región tubular se llama *tubo de flujo*. La frontera de este tubo consiste en líneas de corriente a las cuales la velocidad de las partículas fluidas es siempre tangente. Así pues, ningún fluido puede cruzar la frontera de un tubo de flujo, y el tubo se comporta un tanto como una tubería de la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

Consideremos en detalle el flujo del fluido por un tubo de flujo como el que se muestra en la figura 4. El fluido entra en P donde el área de la sección transversal es A_1 y sale en Q donde el área es A_2 . Sea v_1 la velocidad de las partículas del fluido en P y v_2 la de las partículas en Q . En el intervalo de tiempo Δt un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia $v \Delta t$. Entonces el fluido que cruce A_1 en el intervalo de tiempo Δt tiene un volumen de $A_1 v_1 \Delta t$, aproximadamente. Si su densidad en esa ubicación es ρ_1 , entonces la masa de fluido Δm_1 que cruza por A_1 es, de alrededor de

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t.$$

El *flujo de masa*, definido como la masa de fluido por unidad de tiempo que pasa por cualquier sección transversal, es entonces $\Delta m_1 / \Delta t = \rho_1 A_1 v_1$ en P , aproximadamente. Debemos considerar que Δt sea lo suficientemente pequeño como para que en este intervalo de tiempo ni v ni A varíen en forma considerable durante la distancia que viaja el fluido. En el límite según $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos el resultado preciso:

$$\text{flujo de masa en } P = \rho_1 A_1 v_1,$$

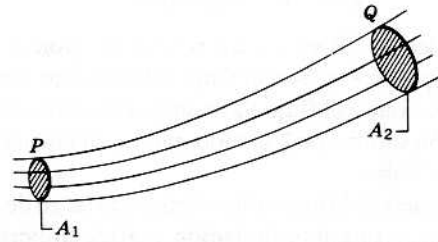


Figura 4 Un tubo de flujo que tiene un área A_1 de la sección transversal en P , y un área A_2 en Q .

y, según un análisis similar,

$$\text{flujo de masa en } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

donde ρ_2 , A_2 , y v_2 representan, respectivamente, la densidad, el área de la sección transversal, y la velocidad del flujo en Q .

Hemos supuesto que el fluido entra en el tubo únicamente en P y sale únicamente en Q . Esto es, entre P y Q no existen otras "fuentes" por donde el fluido pueda entrar al tubo ni "sumideros" por donde pueda salir. Además, el flujo es estacionario, de modo que la densidad del fluido entre P y Q no cambia con el tiempo (aun cuando pueda cambiar de lugar a lugar). Entonces el flujo de masa en P debe ser igual al flujo de masa en Q :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \quad (1)$$

o, en términos más generales que se refieran a cualquier ubicación en el tubo de flujo,

$$\rho A v = \text{constante}. \quad (2)$$

Este resultado expresa la *ley de conservación de la masa* en la dinámica de los fluidos.

Si el fluido es incompresible, como lo supondremos de ahora en adelante, entonces $\rho_1 = \rho_2$, y la ecuación 1 adquiere la forma más sencilla

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (3)$$

o, al definir que R sea la *razón de flujo volumétrico* (o *flujo volumétrico*) $A v$,

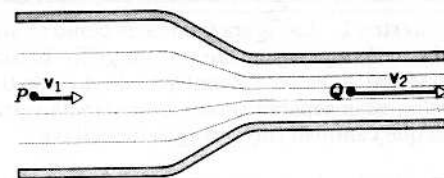


Figura 5 La velocidad debe aumentar al estrecharse el área de un tubo horizontal. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el fluido, la presión en P debe ser mayor que la presión en Q , de modo que en dirección PQ actúa una fuerza para proporcionar la aceleración necesaria.

$$R = Av = \text{constante.} \quad (4)$$

Las unidades de R en el SI son m^3/s . Nótese que la ecuación 3 predice que en el flujo estacionario incompresible la velocidad del flujo varía inversamente con el área de la sección transversal, siendo mayor en las partes más angostas del tubo.

La constancia del flujo volumétrico a lo largo de un tubo de flujo ofrece una interpretación gráfica importante de las líneas de la corriente, como se ve en la figura 5. En una parte angosta del tubo, las líneas de corriente deben de estar más apretadas que en una parte ancha. De aquí que, cuando la distancia entre líneas de corriente disminuya, la rapidez del fluido debe aumentar. Por lo tanto, concluimos que las líneas de corriente espaciadas indican regiones de velocidad relativamente baja, y que las líneas de corriente apretadas indican regiones de velocidad relativamente elevada.

Podemos obtener otro resultado interesante al aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento al flujo del fluido entre P y Q (Fig. 5). Una partícula de fluido en P con una velocidad v_1 debe ser acelerada en dirección hacia adelante al adquirir la velocidad hacia adelante v_2 más elevada en Q . Esta aceleración puede provenir únicamente de una fuerza ejercida en la dirección PQ , y (si no existe ninguna otra fuerza externa, por ejemplo, la gravedad) la fuerza debe surgir de un cambio de la presión en el seno del fluido. Para proporcionar esta fuerza, la presión debe ser mayor en P que en Q . Por lo tanto, en ausencia de otras fuentes de aceleración, las regiones de mayor velocidad del fluido deben estar asociadas con presiones del fluido más bajas. En la sección siguiente, trataremos más a fondo esta conclusión preliminar respecto a la dinámica del fluido.

¿Ha formado usted parte, alguna vez, de un “fluido humano” en el que una muchedumbre de personas tratara de pasar por una puerta angosta? Hacia la parte de atrás de la muchedumbre, el área de la sección transversal es grande, la presión es grande, pero la velocidad de avance es bastante pequeña. Una vez atravesando la puerta, la muchedumbre se mueve más rápidamente: la velocidad del flujo aumenta. Este “fluido” es compresible y viscoso, y el flujo puede ser tanto rotatorio ¡como turbulento!

Problema muestra 1 La figura 6 muestra cómo se angosta al caer la corriente de agua que sale por un grifo. El área de la sección transversal A_0 es de 1.2 cm^2 y la de A es de 0.35 cm^2 . Los dos niveles están separados por una distancia vertical h ($= 45 \text{ mm}$). ¿En qué cantidad fluye el agua de la llave?

Solución Partiendo de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 3) tenemos

$$A_0 v_0 = Av,$$

donde v_0 y v son las velocidades del agua a los niveles correspondientes. Partiendo de la ecuación 20 del capítulo 2 podemos

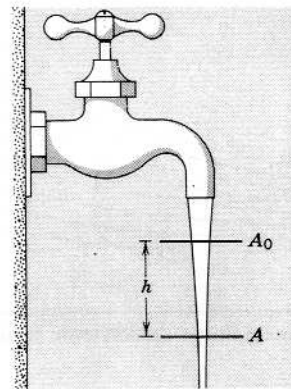


Figura 6 Problema muestra 1. Cuando el agua cae de una llave, su velocidad aumenta. Como la cantidad de flujo debe ser la misma en todas las secciones transversales, la corriente debe volverse más angosta al caer. (Se desprecian los efectos asociados con la tensión superficial.)

también escribir, puesto que cada elemento de agua está cayendo libremente debido a la gravedad,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Eliminando a v entre estas dos ecuaciones y resolviendo para v_0 , obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.045 \text{ m})(0.35 \text{ cm}^2)^2}{(1.2 \text{ cm}^2)^2 - (0.35 \text{ cm}^2)^2}} \\ = 0.286 \text{ m/s} = 28.6 \text{ cm/s}.$$

La razón de flujo volumétrico R es entonces

$$R = A_0 v_0 = (1.2 \text{ cm}^2)(28.6 \text{ cm/s}) \\ = 34 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Con esta cantidad, tardaríamos unos 3 s en llenar un frasco de 100 mL.

La ecuación de continuidad (Opcional)

Las ecuaciones 2 y 4 son ejemplos de relaciones matemáticas conocidas como *ecuaciones de continuidad*. Una ecuación de continuidad es, en efecto, una ley de conservación de la materia. Ésta nos dice que si no existen fuentes (lugares por donde se introduzca materia nueva) ni sumideros (lugares por donde la materia que fluye pueda escapar), entonces la masa dm contenida en cualquier volumen dV debe permanecer constante. Hemos derivado estas ecuaciones para condiciones muy especiales; una ecuación de continuidad más general es

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Esta ecuación se basa en la consideración de un volumen arbitrario de *espacio* (no de fluido) $dV = dx dy dz$. El elemento de volumen permanece fijo en el espacio mientras que el fluido fluye a través de él. Los primeros tres términos, cuando se les multiplica por dV , dan el flujo de salida neto de la masa de fluido que proviene del volumen, en términos de sus componentes de velocidad v_x , v_y , y v_z . El cuarto término, de nuevo multiplicado por dV , da la cantidad a la cual está cambiando la

masa dentro del elemento de volumen. Cuando estos términos suman cero, significa que cualquier flujo de salida (o de entrada) neto de masa debe ser compensado por un cambio equivalente en la masa dentro del elemento. Una vez más, esto es precisamente un postulado de la conservación de la masa. Si el elemento de volumen dV contiene fuentes o sumideros, éstos estarían incluidos en la ecuación 5 haciendo al lado derecho igual a la cantidad a la que la materia está entrando en, o saliendo de, dV . (Las derivadas que aparecen en la ecuación 5 son derivadas parciales, porque la densidad y las componentes de la velocidad pueden ser funciones de más de una variable).

Las ecuaciones de continuidad son comunes en física y juegan un papel fundamental no solamente en la mecánica de los fluidos, sino en cualquier materia o tema en el cual intervenga un flujo. Por ejemplo, en electromagnetismo consideramos no el flujo de masa sino el flujo de carga eléctrica. Las componentes de v en la ecuación 5 son reemplazadas por componentes correspondientes de la corriente eléctrica, mientras que la densidad de masa es reemplazada por la densidad de carga. La interpretación de la ecuación no cambia, excepto que entonces se refiere a la conservación de la carga eléctrica más que a la masa. (Véanse los capítulos 27 y 32.) ■

18-3 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

La ecuación de Bernoulli, que es una relación fundamental en la mecánica de los fluidos, no es un principio nuevo sino que es derivable de las leyes básicas de la mecánica newtoniana. Hallamos conveniente derivarla del teorema trabajo-energía (véase la Sec. 7-4), ya que es esencialmente un postulado del teorema trabajo-energía para el flujo de los fluidos.

Consideremos el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio de un fluido a lo largo de la tubería o tubo de flujo de la figura 7. La porción de tubería que se muestra en la figura tiene una sección transversal A_1 uniforme a la izquierda. Allí es horizontal con una elevación y_1 sobre cierto nivel de referencia. Gradualmente se ensancha y eleva, y a la derecha tiene una sección transversal A_2 uniforme. Allí es horizontal en una elevación y_2 . Concentrémonos en la porción de fluido representada por los sombreados suave e intenso y llamemos a este fluido "el sistema". Consideremos luego el movimiento del sistema desde la posición mostrada en la figura 7a hasta la mostrada en la figura 7b. En todos los puntos de la parte angosta de la tubería la presión es p_1 y la velocidad v_1 ; en todos los puntos de la porción ancha la presión es p_2 y la velocidad v_2 .

El teorema trabajo-energía (véase la Ec. 19 del capítulo 7) establece: el trabajo efectuado por la fuerza resultante

que actúa sobre un sistema es igual al cambio en la energía cinética del sistema. En la figura 7 las fuerzas que efectúan un trabajo sobre el sistema, suponiendo que podamos despreciar a las fuerzas viscosas, son las fuerzas de la presión $p_1 A_1$ y $p_2 A_2$ que actúan sobre los extremos a mano izquierda y derecha del sistema, respectivamente, y la fuerza de la gravedad. Al circular el fluido por la tubería el efecto neto, como lo muestra la comparación de las figuras 7a y 7b, es elevar al fluido representado por el área de sombreado intenso de la figura 7a a la posición mostrada en la figura 7b. La cantidad de fluido representada por el sombreado suave no cambia a causa del flujo.

Podemos hallar el trabajo W efectuado sobre el sistema por la fuerza resultante como sigue:

1. El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión $p_1 A_1$ es $p_1 A_1 \Delta l_1$.
2. El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión $p_2 A_2$ es $-p_2 A_2 \Delta l_2$. Nótese que es negativo, porque la fuerza actúa en dirección opuesta al desplazamiento horizontal.
3. El trabajo efectuado sobre el sistema por la gravedad está asociado con la elevación del elemento de fluido en sombreado intenso desde la altura y_1 hasta la altura y_2 y es $-\Delta m g(y_2 - y_1)$ donde Δm es la masa de fluido en cualquiera de las áreas con sombreado intenso. Esta contribución es también negativa a causa de que la fuerza gravitatoria actúa en dirección opuesta al desplazamiento vertical.

El trabajo neto W efectuado sobre el sistema por todas las fuerzas se halla al sumar estos tres términos, es decir,

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - \Delta m g(y_2 - y_1).$$

Ahora bien, $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$ es el volumen ΔV del elemento de fluido en sombreado intenso, el cual podemos escribir como $\Delta m/\rho$, en donde ρ es la densidad (constante) del fluido. Recordemos que los dos elementos de fluido tienen la misma masa, de modo que al disponer que $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$ hemos supuesto que el fluido es incompresible. Con esta hipótesis tenemos

$$W = (p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m g(y_2 - y_1). \quad (6)$$

El cambio en la energía cinética del elemento de fluido es

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2.$$

Partiendo del teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, y entonces tenemos

$$(p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m g(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2, \quad (7)$$

lo que, después de cancelar al factor común de Δm , puede reacomodarse para leerse como sigue:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (8)$$

* En la *Encyclopaedia Britannica* (edición undécima) figuran ocho miembros de la familia Bernoulli. Aquí nos referimos a Daniel Bernoulli (1700-1782), quizá el más notable de esta destacada familia.

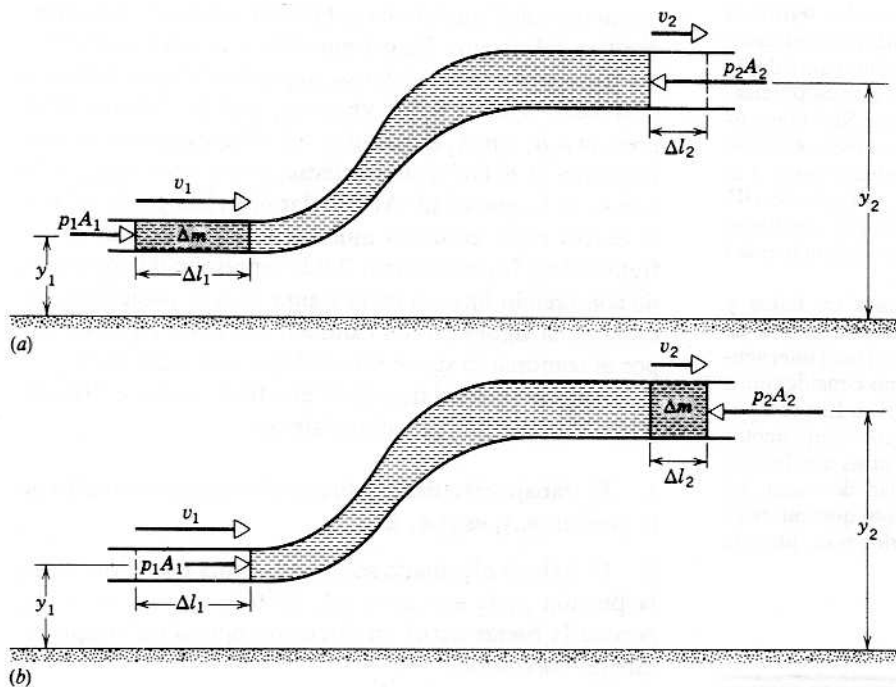


Figura 7 El fluido fluye por una tubería en forma estacionaria. Durante el intervalo de (a) a (b), el efecto neto del flujo es la transferencia del elemento de fluido indicado por el sombreado intenso desde el extremo de entrada de la tubería hasta el extremo de salida.

Puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos ubicaciones cualesquiera a lo largo de la tubería, podemos suprimir los subíndices y escribir

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constante.} \quad (9)$$

La ecuación 9 recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* para el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio. Fue presentada por vez primera por Daniel Bernoulli en su *Hydrodynamica* en 1738.

La ecuación de Bernoulli es estrictamente aplicable únicamente al flujo estacionario, siendo evaluadas las cantidades implicadas a lo largo de la línea de corriente. En nuestra figura, la línea de corriente usada está a lo largo del eje de la tubería. Sin embargo, si el flujo es no rotatorio puede demostrarse (véase el problema 33 para un caso especial) que la constante de la ecuación 9 es la misma para *todas* las líneas de corrientes.

Así como la estática de una partícula es un caso especial de la dinámica de la partícula, la estática de los fluidos es un caso especial de la dinámica de los fluidos. No debería sorprendernos, por lo tanto, que la ley del cambio de la presión con la altura en un fluido en reposo esté incluida en la ecuación de Bernoulli como un caso especial. Si el fluido está en reposo, entonces $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación 8 se convierte en

$$p_1 + \rho gy_1 = p_2 + \rho gy_2$$

o

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

que es la misma que la ecuación 8 del capítulo 17.

De la ecuación 8 se deduce otro resultado básico cuando $y_1 = y_2$ (es decir, la tubería es horizontal, de modo que no es preciso considerar los efectos gravitatorios). Entonces

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (10)$$

Cuando la velocidad es grande, la presión debe ser pequeña, y a la inversa. Éste es el postulado matemático que confirma la conclusión de lo expuesto como consecuencia de la ecuación 4. En la ecuación 9 todos los términos tienen la dimensión de una presión (lo cual debe usted verificar). La presión $p + \rho gy$, la cual estaría presente aun cuando no hubiese flujo ($v = 0$), se llama *presión estática*; el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ se denomina *presión dinámica*.

La ecuación de Bernoulli es en efecto un postulado de la conservación de la energía mecánica en un sistema. En analogía con nuestro tratamiento de la conservación de la energía en el capítulo 8, podemos reescribir la ecuación 7 como:

$$\Delta K + \Delta U = W,$$

donde los tres términos se refieren, respectivamente, a los cambios en las energías cinética y potencial y al trabajo efectuado por la fuerza de la presión, siendo consideradas

todas las cantidades por unidad de volumen del fluido. Si el fluido es compresible, puede adquirir energía interna por medios mecánicos; por ejemplo, la fuerza de la presión puede empujar a las moléculas acercándolas más, aumentando por lo tanto su energía potencial interna. Entonces en un fluido compresible deberíamos incluir otro término ΔE_{int} correspondiente al cambio en la energía interna por unidad de volumen, y el postulado de la conservación de la energía se convierte en

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W.$$

Este resultado es idéntico a la ecuación 28 del capítulo 8. Si, además, el flujo es viscoso, las fuerzas similares a la fricción realizan un trabajo que puede parecer como un aumento en la energía interna del fluido.

En la práctica, podemos modificar a la ecuación de Bernoulli como sea necesario para justificar la conversión de la energía mecánica del fluido en energía interna. Si el flujo puede considerarse como aproximadamente incompresible y no viscoso, estas correcciones son despreciables.

Problema muestra 2 Un tanque elevado de altura $h = 32$ m y diámetro $D = 3.0$ m abastece de agua a una casa (Fig. 8). Una tubería horizontal en la base del tanque tiene un diámetro $d = 2.54$ cm (1 in, típico de las tuberías de abastecimiento doméstico en Estados Unidos). Para satisfacer las necesidades del hogar, la tubería de abastecimiento debe ser capaz de sustituir agua a razón de $R = 0.0025$ m³/s (alrededor de $\frac{1}{2}$ de galón por segundo). (a) Si el agua estuviese fluyendo a la cantidad máxima, ¿cuál sería la presión en la tubería horizontal? (b) Una tubería más pequeña, de diámetro $d' = 1.27$ cm (= 0.5 in) abastece al segundo piso de la casa, a una distancia de 7.2 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuáles son la velocidad del flujo y la presión del agua en esta tubería? Desprecie la viscosidad del agua.

Solución (a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de flujo ABC mostrada en la figura 8. En los puntos A y B tenemos

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B.$$

En A, la presión es la de la atmósfera, p_0 . Con $y_A = h$ y $y_B = 0$, obtenemos, para la presión desconocida,

$$p_B = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2).$$

Podemos hallar v_A y v_B a partir de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 4), lo que nos da

$$v_A A_A = v_B A_B = R,$$

donde R es la cantidad de flujo volumétrico constante. Entonces

$$v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(1.5 \text{ m})^2} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m/s},$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.0127 \text{ m})^2} = 4.9 \text{ m/s}.$$

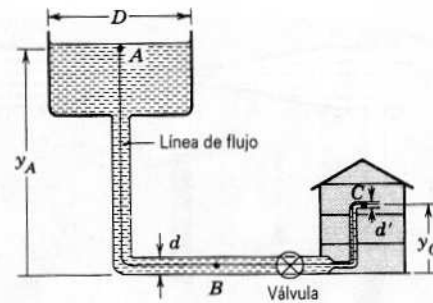


Figura 8 Problema muestra 2.

Obsérvese que el término $\frac{1}{2}\rho v_A^2$ en la expresión para p es despreciable comparado con el término $\frac{1}{2}\rho v_B^2$. Esto es, la velocidad del flujo en la parte superior del tanque es bastante pequeña, debido a la gran área de su sección transversal.

Ahora podemos resolver para la presión en la tubería:

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \rho g h - \frac{1}{2}\rho v_B^2 \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(32 \text{ m}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(4.9 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 3.14 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.12 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 4.03 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Si el agua de la tubería horizontal no estuviese fluyendo (esto es, si la válvula estuviese cerrada), la presión estática en B incluiría únicamente a los primeros dos términos de arriba, lo cual daría 4.15×10^5 Pa. La presión cuando el agua fluye se reduce de este valor estático a la cantidad de la presión dinámica.

(b) Si la tubería más angosta al segundo piso ha de tener la misma cantidad de flujo R , la velocidad en C debe ser

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.0064 \text{ m})^2} = 19.7 \text{ m/s},$$

o cuatro veces el valor en B. La ecuación de Bernoulli da

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g y_C$$

o

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(y_A - y_C) \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(19.7 \text{ m/s})^2 \\ &\quad + (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(32 \text{ m} - 7.2 \text{ m}) \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} - 1.95 \times 10^5 \text{ Pa} + 2.43 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1.49 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

A causa de la mayor velocidad del flujo a lo largo de la tubería más pequeña, la contribución dinámica a la presión es mucho mayor en C que en B. Los efectos tanto estáticos como dinámicos tienden a reducir la presión en ese punto con relación a B.

18-4 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI Y DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En esta sección consideraremos un número de aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, que ilustran su uso y demuestran la amplitud de su aplicabilidad.

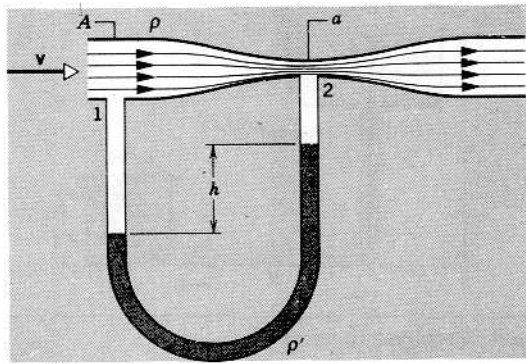


Figura 9 Un medidor de Venturi, usado para medir la velocidad del flujo de un fluido en una tubería.

El medidor de Venturi

Este aparato (Fig. 9) es un medidor de la velocidad del flujo de un fluido en una tubería. Un fluido de densidad ρ fluye por una tubería de área de su sección transversal A . El área se reduce a a en el cuello, y allí se acopla un tubo manométrico, como se muestra. Hagamos que el líquido del manómetro, digamos mercurio, tenga una densidad ρ' . Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la igualdad del flujo volumétrico en los puntos 1 y 2, puede demostrarse (véase el problema 31) que la velocidad del flujo en el punto 1 es

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}} \quad (11)$$

El tubo de Pitot

Este aparato (Fig. 10) se usa para medir la velocidad del flujo de un gas. Consideremos que el gas (por ejemplo, aire) fluye con una densidad ρ y una velocidad v_a paralelas a los planos de las aberturas en a . La presión en el brazo izquierdo del manómetro, que está conectado a estas aberturas, es entonces la presión estática en la línea de gas, p_a . La abertura del brazo derecho del manómetro está en ángulo recto con la corriente. La velocidad se reduce a cero en b , y el gas está estancado en ese punto. Al aplicar la ecuación de Bernoulli a los puntos a y b , obtenemos

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b$$

Sustituyendo la lectura $\rho'gh$ del manómetro por la diferencia de presión $p_b - p_a$, podemos resolver para v_a y obtener

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}} \quad (12)$$

Este aparato puede calibrarse para que dé una lectura de v_a directamente. El indicador de la velocidad del aire que

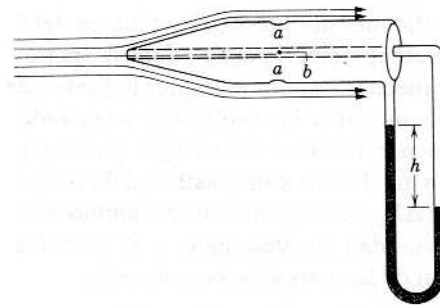


Figura 10 Tubo de Pitot, que se emplea para medir la velocidad del flujo de un gas.

se encuentra en las puntas de las alas de un aeroplano se basa en este principio.

La fuerza ascensional

Es la fuerza que actúa sobre un cuerpo, como puede ser el ala de un aeroplano, una hidroala, o las aspas de un helicóptero, en virtud de su movimiento en el seno del fluido. Ésta es distinta a la fuerza ascensional estática, que es la fuerza de flotabilidad que actúa sobre un globo o sobre un iceberg de acuerdo con el principio de Arquímedes (sección 17-4).

En el vuelo de una bola de béisbol, de una pelota de tenis, o de una pelota de golf tenemos ejemplos comunes de fuerza ascensional dinámica. Ésta, que se origina con la rotación de la pelota al volar, puede hacer que la pelota trace una curva o que ascienda o descienda con relación a una trayectoria parabólica. Puesto que el fluido (el aire en este caso) es un tanto viscoso, existe fricción a medida que la pelota avanza, y ésta tiende a transportar consigo una capa delgada de fluido llamada *capa frontera*. Vista desde el marco de reposo de una pelota que no gire, la velocidad del fluido desciende del valor más allá de la capa frontera (igual a la velocidad de vuelo de la pelota) a cero en la superficie de la pelota.

La figura 11a muestra, en el marco de reposo de la pelota, líneas de corrientes del flujo estacionario del aire al pasar por una pelota no rotatoria, a velocidades lo suficientemente bajas como para que no exista turbulencia. La figura 11b muestra las líneas de corriente de aire que acompañan a una pelota que gira rápidamente. Sin la viscosidad y sin la capa frontera, la bola, al girar, no puede transportar así aire a su alrededor y esta circulación (como se le llama) no existiría. Las pelotas de golf son sistemáticamente rugosas gracias a los hoyuelos que tienen para aumentar esta circulación y la fuerza ascensional dinámica que resulta de ello. Las bolas de béisbol a veces se raspan artificialmente (Lo cual no está permitido por las reglas del juego) por los lanzadores, por la misma razón.

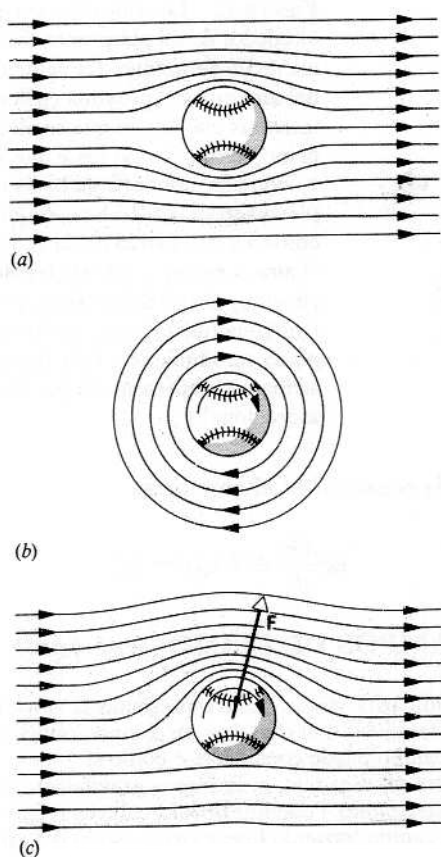


Figura 11 (a) Flujo de líneas de corriente alrededor de una pelota que no gira. (b) La circulación del aire alrededor de una pelota que gira, como consecuencia de la capa frontera. El espesor de la capa frontera se ha exagerado aquí a propósito. (c) Los efectos combinados de ambos movimientos. Partiendo de la ecuación de Bernoulli vemos que una fuerza ascensional dinámica actúa hacia arriba sobre la pelota. El fluido ejerce sobre la pelota una fuerza neta F que tiene una componente transversal al flujo del fluido (ascenso) y una componente paralela al flujo del fluido (arrastre).

La figura 11c muestra el efecto de combinar la circulación (resultante de la rotación de la pelota) y el flujo estacionario (resultante de la traslación de la pelota por el aire). En el caso mostrado, las dos velocidades se suman en la parte de arriba de la pelota y se restan en la parte de abajo. A partir del espaciamento de las líneas de corriente resultantes, vemos que la velocidad del aire debajo de la pelota es menor que la de encima de ella. Según la ecuación de Bernoulli, la presión del aire debajo de la pelota debe entonces ser mayor que la de encima, de modo que la pelota experimenta una fuerza de sustentación dinámica.

Esencialmente, una bola de béisbol lanzada se curva en su trayectoria por la misma razón. Por ejemplo, si la figura 11 representa una vista desde arriba de la bola que

gira mientras avanza hacia el bateador, el “ascenso” actúa en dirección hacia un lado para mover a la bola horizontalmente hacia el bateador o alejándose de él, como en el caso de una bola curva. Si la figura 11 representa una vista lateral, la bola es lanzada con contragiro, como en el caso de una bola rápida. La fuerza ascensional actúa hacia arriba, provocando que la bola se eleve con relación a su trayectoria parabólica.

La fuerza de ascenso que actúa sobre el ala de un aeroplano tiene una explicación parecida. La figura 12 muestra las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico (o sección transversal del ala) adosado a un aeroplano. Elijamos al aeroplano como marco de referencia, como haríamos en el experimento en un túnel de viento, y supongamos que el aire se mueve de izquierda a derecha al pasar por el ala. Obsérvense las similitudes entre las figuras 12 y 11c. (De hecho, la explicación de la fuerza ascensional sobre el ala de un aeroplano implica una circulación similar a la Fig. 11b.).

El ángulo de ataque del ala provoca que el aire se desvíe hacia abajo. De la tercera ley de Newton la reacción de esta fuerza hacia abajo del ala sobre el aire es una fuerza hacia arriba F , el ascenso, que el aire ejerce sobre el ala.

Si bien la sola ecuación de Bernoulli no puede servir para predecir el patrón de las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico, esta ecuación puede emplearse para verificar que sobre el plano aerodinámico se ejerce una fuerza de ascenso. Encima del ala (punto 1) las líneas de corriente están más cerca entre sí que lo están debajo del ala (punto 2). Entonces $v_1 > v_2$ y, según el principio de Bernoulli, $p_1 < p_2$, lo que debe ser así para que exista elevación.*

Empuje sobre un cohete

Como ejemplo final calculemos el empuje sobre un cohete producido por el escape de los gases que expelle. Consideremos una cámara (Fig. 13) de sección transversal A llena de un gas de densidad ρ a una presión p . En el fondo de la cámara se encuentra un pequeño orificio de área de

* Para mayor información sobre cómo vuelan los aeroplanos, véase “The Science of Flight”, por Peter P. Wegener, *American Scientist*, mayo-junio de 1986, pág. 268. Véase también “Bernoulli’s Law and Aerodynamic Lifting Force”, por Klaus Weltner, *The Physics Teacher*, febrero de 1990, pág. 84. La fuerza ascensional dinámica se trata en “Physics and Sports: The Aerodynamics of Projectiles”, por Peter J. Brancazio, en *Fundamentals of Physics*, 3a. edición, por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988). La fuerza ascensional dinámica puede emplearse también para proveer una fuerza horizontal que impulse a un navío; véase “The Flettner Ship”, por Albert Einstein, en *Essays in Science* (Philosophical Library, 1955), pág. 92.

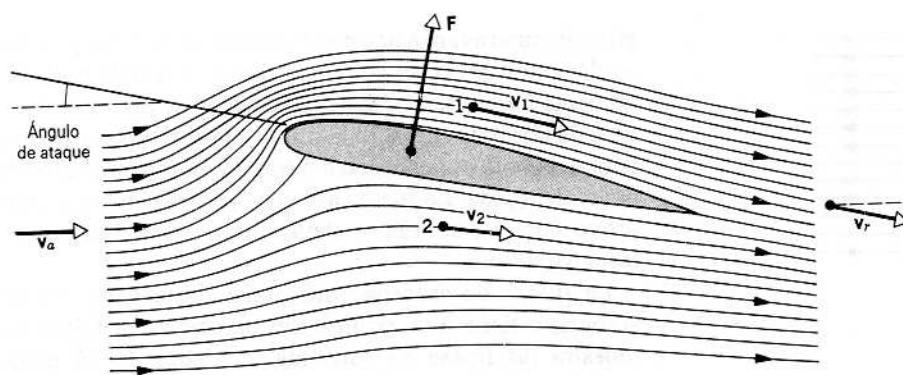


Figura 12 Las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico o ala de un aeroplano. La velocidad v_a del aire que se aproxima es horizontal, mientras que el aire que se aleja del plano aerodinámico tiene una velocidad v_r , con una componente hacia abajo. El plano aerodinámico ha ejercido entonces una fuerza hacia abajo sobre el aire, y según la tercera ley de Newton, el aire debe haber ejercido por tanto una fuerza hacia arriba sobre el plano aerodinámico. Esta fuerza hacia arriba está representada por la fuerza ascensional F .

sección transversal A_0 . Deseamos hallar la velocidad v_0 a la cual escapa el gas por el orificio.

Escribamos la ecuación de Bernoulli (Ec. 8) así:

$$p - p_0 = \rho g(y_0 - y) + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

donde p_0 representa a la presión atmosférica justamente afuera del orificio. En un gas la densidad es tan pequeña que podemos despreciar la variación de presión por la altura de la cámara, lo que nos da

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$$

o

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \quad (13)$$

donde v es la velocidad del gas que fluye dentro de la cámara y v_0 es la velocidad del gas que pasa por el orificio. Si bien un gas es compresible y el flujo puede volverse turbulento, podemos considerar al flujo como estacionario e incompresible para presiones y velocidades de salida que no sean demasiado grandes.

Supongamos ahora una continuidad en el flujo de masa (en el motor de un cohete esto se consigue cuando la masa del gas que escapa es igual a la masa del gas que se origina al quemar el combustible), de modo que (para una densidad supuesta constante)

$$Av = A_0v_0.$$

Si el orificio es muy pequeño de modo que $A_0 \ll A$, entonces $v_0 \gg v$, y podemos despreciar a v^2 en comparación con v_0^2 en la ecuación 13. De aquí que la velocidad de escape sea

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \quad (14)$$

Si nuestra cámara es la cámara de escape de un cohete, el empuje sobre el cohete (sección 9-8) es $v_0 dM/dt$. Pero la masa del gas que fluye hacia afuera en el tiempo dt es $dM = \rho A_0 v_0 dt$, de modo que

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0^2.$$

y al usar la ecuación 14 el empuje es

$$v_0 \frac{dM}{dt} = 2A_0(p - p_0). \quad (15)$$

18-5 CAMPOS DE FLUJO (Opcional)

En la sección 16-7 vimos cómo representar la situación en las proximidades de las masas al usar un campo gravitatorio. Cada punto del campo puede considerarse como si tuviera un vector asociado con él, digamos, g , la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto. Podemos llevar a cabo una representación gráfica del campo trazando líneas en dirección del campo cuyo espaciamiento sea proporcional a la intensidad del campo. Emplearemos un enfoque similar cuando estudiemos el campo eléctrico en el capítulo 28.

Del mismo modo, en la dinámica de los fluidos podemos resumir la situación dentro de un fluido en movimiento por medio de un campo de flujo. En general, el campo de flujo es un campo *vectorial*. Asociamos una cantidad vectorial a cada

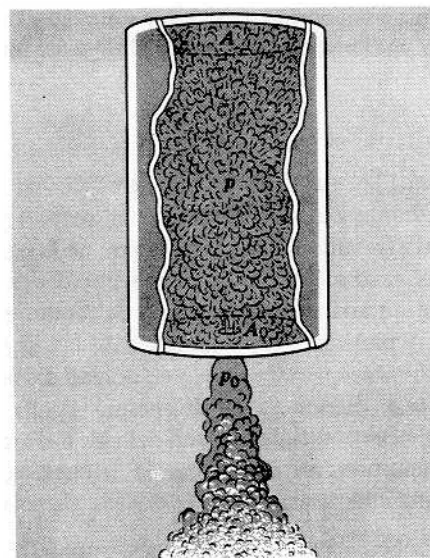


Figura 13 Corriente de fluido que se sale de una cámara, que podría representar a la cámara de escape de un cohete.

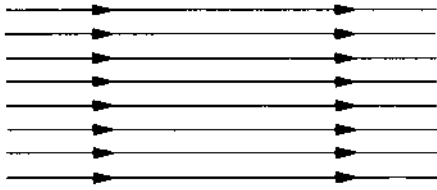


Figura 14 Líneas de corriente (líneas horizontales) en un campo de flujo no viscoso, homogéneo.

punto en el espacio, es decir, la velocidad de flujo v en ese punto. En un flujo estacionario el campo de flujo es estacionario. Por supuesto, aun en este caso, determinada partícula de fluido en particular puede incluso tener una velocidad variable al moverse de punto a punto del campo. El campo ofrece algunas de las propiedades del flujo, y podemos usarlo para deducir el comportamiento de las partículas en movimiento.*

Una masa de fluido puede siempre, al fluir, dividirse en tubos de flujo. Cuando el flujo es estacionario, los tubos permanecen sin cambiar de forma, y el fluido que ya está en un tubo permanece a partir de entonces adentro del mismo tubo. Hemos visto que la velocidad del flujo dentro de un tubo de flujo es paralela al tubo y tiene una magnitud inversamente proporcional al área de la sección transversal (Ec. 2). Asignemos secciones transversales a los tubos de modo que la constante de proporcionalidad sea la misma para todos ellos; de ser posible tomaremos a esta constante como la unidad. Es decir, el flujo volumétrico es el mismo para todos los tubos, es decir, un flujo unitario. Entonces la magnitud de la velocidad de flujo puede ser determinada a partir de las áreas de las secciones transversales de los tubos de flujo. Existe otro procedimiento equivalente a éste que consiste en colocar un área unitaria perpendicular a la dirección de flujo y trazar a través de él tantas líneas de corriente como el número de unidades de magnitud de la velocidad en ese punto.

Consideremos algunos ejemplos de campos de flujo. Para propósitos de trazo tomaremos en cuenta únicamente dos ejemplos bidimensionales. En ellos, la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos de una línea perpendicular al plano en cualquier punto.

En la figura 14 hemos trazado un *campo de flujo homogéneo*, igual que el que podría existir en el flujo estacionario, no viscoso de un líquido por un tubo con paredes interiores lisas. Aquí todas las líneas de corriente son paralelas, y la velocidad de flujo v es la misma en todos los puntos.

En la figura 15 mostramos un campo de *flujo rotatorio uniforme*, tal como el que se produciría haciendo girar a una cubeta de agua sobre una mesa giratoria (véase el problema 29, capítulo 17). Aquí v es proporcional a r , porque la velocidad angular ω es constante. En la figura 16 trazamos el campo de flujo de un *torbellino* (o remolino), tal como el que podría obtenerse al destapar una bañera llena de agua. En este caso v es proporcional a $1/r$, porque el ímpetu angular $L = mvr$ es

* Si el flujo es no rotatorio al mismo tiempo que estacionario, lo denominamos *flujo potencial*. Entonces, la velocidad de flujo v puede ser relacionada con un potencial de velocidad ψ , del mismo modo que, en la gravitación, g puede ser relacionada con el potencial gravitatorio V (véase la sección 16-7). De aquí que un campo vectorial para el flujo potencial sea análogo a un campo de una fuerza conservativa.

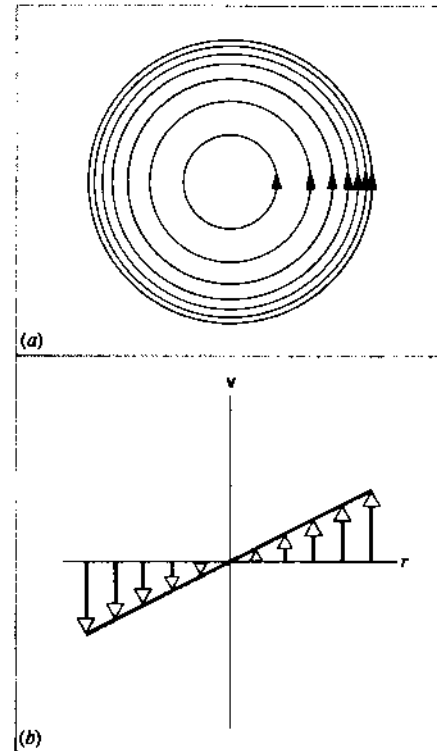


Figura 15 (a) Campo de flujo rotatorio uniforme. (b) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.

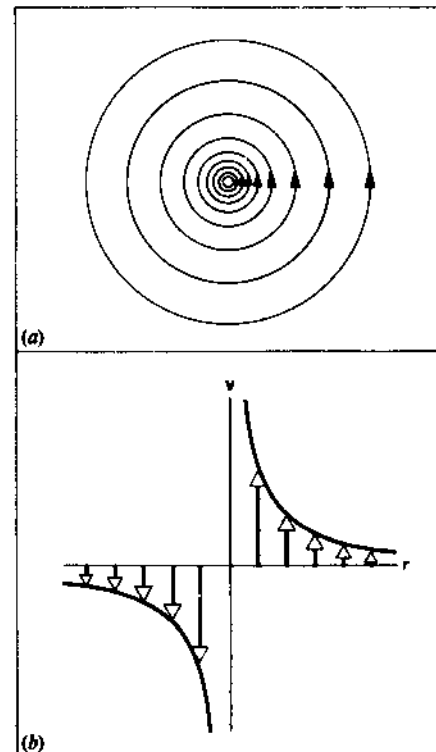


Figura 16 (a) Campo de flujo de un torbellino. (b) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.

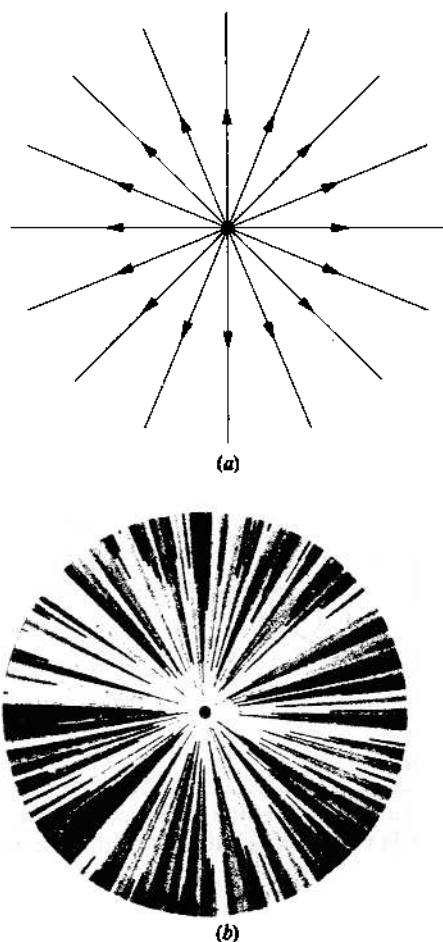


Figura 17 (a) Flujo de una fuente lineal. (b) Mapa del flujo del fluido a partir de una fuente lineal. El mapa se forma permitiendo que el agua fluya entre una capa horizontal de vidrio laminado y una capa horizontal de yeso. El agua pasa por un orificio en el centro y sale fluyendo hacia los bordes. La dirección del flujo se hace visible rociando al yeso con cristales de permanganato de potasio, el cual se disuelve en el agua y la tiñe de color púrpura. El mapa del flujo del fluido fue elaborado y fotografiado por el profesor A. D. Moore en la Universidad de Michigan y está tomado de *Introduction to Electric Fields*, por W. E. Rogers (McGraw-Hill, 1954).

constante, y el flujo es no rotatorio (véase el problema 36). Nótese que tanto la rotación uniforme como el movimiento de un torbellino se representan con líneas de corriente circulares pero son clases de flujo por completo diferentes. Obviamente, las formas de las líneas de la corriente dan sólo una información limitada; es necesario conocer también su espaciamiento.

La figura 17 representa el campo de flujo de una fuente. Todas las líneas de corriente se dirigen hacia afuera en forma radial. La fuente es una línea que pasa por el centro perpendicular al papel. La intensidad de una fuente se especifica dando la masa por la unidad de tiempo de emisión. El campo de flujo alrededor de un sumidero lineal es el mismo que el de una fuente excepto por el signo del flujo, que se dirige radialmente hacia adentro.

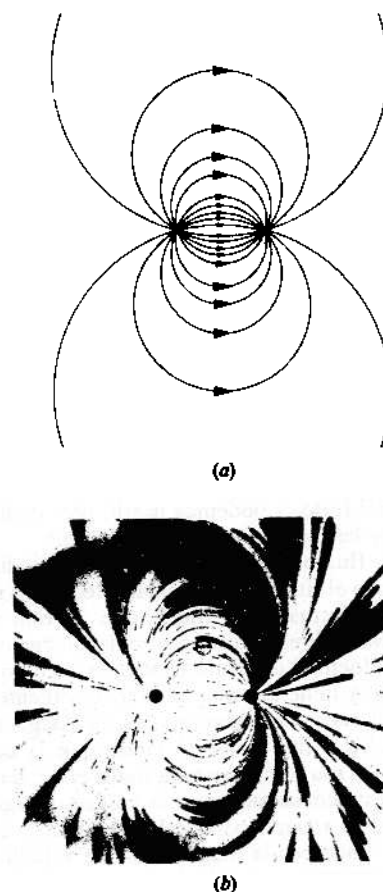


Figura 18 (a) Flujo bipolar lineal, cuya fuente se halla a la izquierda; el sumidero está a la derecha. (b) Mapa del flujo del fluido en un bipolo lineal, construido como se describe para la figura 17.

En una fuente lineal y en un sumidero lineal que tengan las mismas fuerzas y estén ligeramente separados, obtenemos el campo combinado llamado flujo bipolar lineal, que se muestra en la figura 18.

Según veremos más adelante, el campo electrostático, el campo magnético, y el campo de flujo de una corriente eléctrica son también campos vectoriales. En este aspecto, el campo homogéneo (Fig. 14) corresponde al campo eléctrico de un condensador (o capacitor) plano, el campo de la fuente o el campo del sumidero (Fig. 17) corresponden al campo eléctrico de un condensador cilíndrico o a un alambre recto de carga positiva o negativa, respectivamente, y el campo bipolar lineal (Fig. 18) corresponde al campo eléctrico de dos alambres opuestamente cargados. En todos ellos el campo de flujo es un flujo potencial, y los campos eléctricos son conservativos.

El campo homogéneo de la figura 14 representa también al campo magnético dentro de un solenoide. El campo vertiginoso de la figura 16 representa al campo magnético alrededor de un alambre recto portador de corriente. Este último es un ejemplo de campo que es rotatorio (respecto al eje del vertiginoso).

A causa de estas analogías entre el campo fluido y el electromagnético, a menudo podemos determinar un campo de flujo difícil de calcular por los métodos matemáticos actuales, por

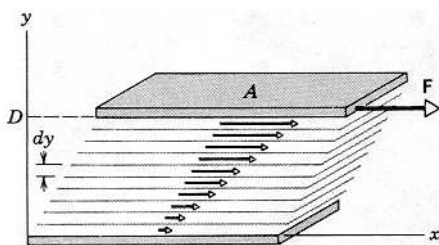


Figura 19 Un fluido viscoso llena el espacio entre dos placas planas separadas por una distancia D . La placa inferior está en reposo y la placa superior se mueve hacia la derecha con una fuerza constante F . La velocidad de cada capa de fluido disminuye uniformemente desde la placa superior hasta la placa inferior.

medio de mediciones experimentales en aparatos eléctricos apropiados.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, las ideas básicas del campo y los principios de conservación hallan aplicación en muchas áreas de la física, y nos encontraremos con ellos muchas veces más todavía. ■

18-6 VISCOSIDAD, TURBULENCIA, Y FLUJO CAÓTICO (Opcional)

La viscosidad en el flujo de los fluidos es similar a la fricción en el movimiento de los cuerpos sólidos. Al deslizar a un cuerpo sólido sobre otro, debemos proporcionar una fuerza externa F que se oponga a la fuerza de rozamiento f si queremos mantener al cuerpo en movimiento a velocidad constante. En el caso del movimiento de los fluidos podemos considerar a un fluido entre dos placas paralelas, como se ilustra en la figura 19. Una fuerza F está aplicada a la placa superior, de modo que esté en movimiento a velocidad constante v respecto a la placa inferior, la cual suponemos está en reposo. La fuerza F se opone al arrastre viscoso de la placa superior para mantener constante su velocidad.

Podemos imaginar que el fluido está dividido en capas paralelas a las placas. La viscosidad actúa no solamente entre el fluido y la placa superior, sino entre cada capa de fluido y sobre las capas adyacentes. La velocidad de cada capa difiere en una

TABLA 1 VISCOSIDAD DE UNA SELECCIÓN DE FLUIDOS

Fluido	η (N · s/m ²)
Glicerina (20° C)	1.5
Aceite para motores [†] (0° C)	0.11
Aceite para motores [†] (20° C)	0.03
Sangre (37° C)	4.0×10^{-3}
Agua (20° C)	1.0×10^{-3}
Agua (90° C)	0.32×10^{-3}
Gasolina (20° C)	2.9×10^{-4}
Aire (20° C)	1.8×10^{-5}
CO ₂ (20° C)	1.5×10^{-5}

[†] Peso medio (S.A.E. 30).

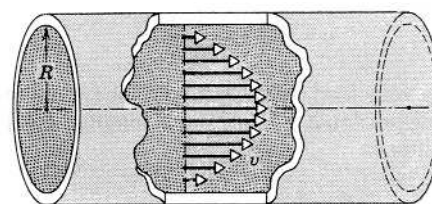


Figura 20 El fluido fluye por un tubo cilíndrico de radio R . Se muestra la variación en la velocidad desde la pared hasta el centro.

cantidad dv de la velocidad de la que está bajo ella. El flujo del fluido en el que la velocidad varía capa a capa se denomina flujo *estacionario*. En esta exposición, suponemos que la capa de fluido más alta tiene la misma velocidad v que la placa de arriba y que la capa de fluido del fondo tiene la misma velocidad que la placa del fondo, es decir, cero.

Por analogía con el esfuerzo cortante aplicado a los sólidos (Sec. 14-5), podemos definir que el esfuerzo cortante sobre el fluido es F/A , donde A es el área de la capa de fluido. Un sólido puede responder a este esfuerzo cortante con un cambio en su forma (la deformación al corte, la cual es un desplazamiento lateral a través de cada capa), pero un fluido responde mediante el movimiento, o sea, mediante un cambio de velocidad dv a través de cada capa de espesor dy . La razón entre el esfuerzo y la deformación en el fluido se llama *coeficiente de viscosidad* η (letra griega eta) del fluido:

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy} \quad (16)$$

Según nuestra hipótesis de que la capa superior se mueve a velocidad v y que la capa del fondo lo hace a $v = 0$, el *gradiente de velocidad* dv/dy es simplemente v/D , donde D es el espaciamiento entre las dos placas. Así,

$$\eta = \frac{F/A}{v/D} = \frac{FD}{vA} \quad (17)$$

La unidad SI de la viscosidad es el $N \cdot s/m^2$. La unidad cegesimal equivalente es la dina · s/cm², llamada *poise*. (La unidad recibe el nombre en memoria del fisiólogo francés Jean-Louis-Marie Poiseuille, quien fue el primero en investigar el flujo de los fluidos viscosos por de tubos, como una ayuda para entender la circulación de la sangre.) Al comparar estas unidades vemos que $1 \text{ poise} = 0.1 \text{ N} \cdot s/m^2$. La tabla 1 muestra algunos valores típicos de la viscosidad de los fluidos.

Una aplicación práctica de la viscosidad tiene lugar en el flujo de fluidos en tuberías cilíndricas. El flujo es de nuevo estacionario, pero en este caso las capas del fluido son cilindros de paredes delgadas de radios diversos. La velocidad del flujo varía con el radio; su valor máximo se da en el eje y su valor mínimo, que suponemos es cero, en las paredes (Fig. 20). Nótese que el flujo ilustrado en la figura 20 es rotatorio, aunque los elementos del fluido viajan en línea recta. Si colocásemos una pequeña rueda de paletas en cualquier parte del flujo, excepto a lo largo de la línea de corriente central, se pondría a girar debido a la variación en la velocidad de las partículas fluidas que inciden en sus paletas.

En el caso de un tubo cilíndrico, como se muestra en la figura 20, la variación de la velocidad con la posición a lo largo del tubo no es lineal. Suponiendo, una vez más, que la capa cercana a las paredes está en reposo, puede demostrarse que la velocidad en el cuerpo cilíndrico de radio r es (véase el problema 41)

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (18)$$

donde v_0 es la velocidad en el centro del tubo. En términos de la diferencia de presión Δp a largo de la longitud L del tubo, la velocidad central es

$$v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}. \quad (19)$$

Al considerar el flujo en cada cuerpo cilíndrico delgado, podemos demostrar (véase el problema 42) que el flujo de masa total dm/dt (la masa del fluido que fluye por el tubo por unidad de tiempo) es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}. \quad (20)$$

Este resultado se conoce como la *ley de Poiseuille*. Conociendo el coeficiente de viscosidad del fluido, podemos entonces determinar la diferencia de presión que debe proveer un agente externo (una bomba, quizás) para mantener determinado flujo de masa en el tubo. En forma equivalente, si forzamos al fluido a lo largo de un tubo con una diferencia de presión conocida, la medición del flujo de masa nos permite determinar el coeficiente de viscosidad del fluido.

La viscosidad en los líquidos se origina por las fuerzas de cohesión intermoleculares. Al aumentar la temperatura, el coeficiente de viscosidad de un líquido disminuye, porque la energía cinética creciente de las moléculas debilita el efecto de las fuerzas intermoleculares. Al contrario, en los gases la viscosidad aumenta con el aumento de la temperatura, porque las propias moléculas pueden desplazarse entre las capas. A temperaturas más elevadas, existe más movimiento molecular y por lo tanto más mezclado. Sin embargo, nótese que en un tubo existen siempre más moléculas lentas cerca de las paredes que moléculas rápidas cerca del eje central, de modo que mayor mezcla significa siempre más moléculas lentas que se mueven hacia el eje e impiden el movimiento de las moléculas que se mueven más rápidamente. (El efecto es parecido al del tráfico lento cuando se mezcla en el carril rápido de una carretera.)

Problema muestra 3 Por un tubo de sección transversal circular se bombea aceite de castor, el cual tiene una densidad de $0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ a la temperatura ambiente, por medio de una bomba que mantiene una presión de medición de 950 Pa. El tubo tiene un diámetro de 2.6 cm y una longitud de 65 cm. El aceite de castor que sale por el extremo libre del tubo a la presión atmosférica se junta en un recipiente. Después de 90 s, se ha juntado un total de 1.23 kg. ¿Cuál es el coeficiente de viscosidad del aceite de castor a esta temperatura?

Solución El flujo de masa es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1.23 \text{ kg}}{90 \text{ s}} = 0.0137 \text{ kg/s}.$$

El coeficiente de viscosidad puede obtenerse ahora directamente de la ecuación 20 si resolvemos primero para η , que nos da

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\rho\pi R^4 \Delta p}{8(dm/dt)L} = \frac{(0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)\pi(0.013 \text{ m})^4(950 \text{ Pa})}{8(0.0137 \text{ kg/s})(0.65 \text{ m})} \\ &= 1.15 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2. \end{aligned}$$



Figura 21 El humo que asciende tiene primeramente un flujo estacionario, pero no tarda en convertirse en turbulento.

Los aceites pesados tienen típicamente viscosidades dentro de este margen.

Turbulencia

Después de elevarse a corta distancia, la columna suave de humo de un cigarrillo se fragmenta en un patrón irregular y en apariencia caprichoso (Fig. 21). De modo similar, una corriente de fluido que pase a través de un obstáculo se rompe en remolinos y torbellinos (Fig. 22), que dan al flujo componentes de velocidad irregulares transversales a la dirección del flujo. Un ejemplo de este caso es el ondear de una bandera al viento: si el flujo de aire fuese estacionario, la bandera ocuparía una posición fija a lo largo de las líneas de corriente, pero el asta rompe el flujo en un patrón irregular parecido al de la figura 22, que da origen al movimiento de aleteo transversal de la bandera. Éstos son ejemplos de un flujo *turbulento* del fluido. Otros ejemplos incluyen las estelas dejadas en el agua por el movimiento de los buques y en el aire por el movimiento de los automóviles y de los aviones. Los sonidos producidos por el silbido y por los instrumentos de viento son consecuencia del flujo turbulento del aire.

En un fluido viscoso, el flujo a baja velocidad puede describirse como estacionario, lo cual sugiere que las capas se deslizan suavemente una sobre otra. Cuando la velocidad del flujo es suficientemente grande, el movimiento se vuelve desordenado e irregular; esto es el flujo turbulento. Una analogía de la mecánica es un bloque empujado a lo largo de una superficie

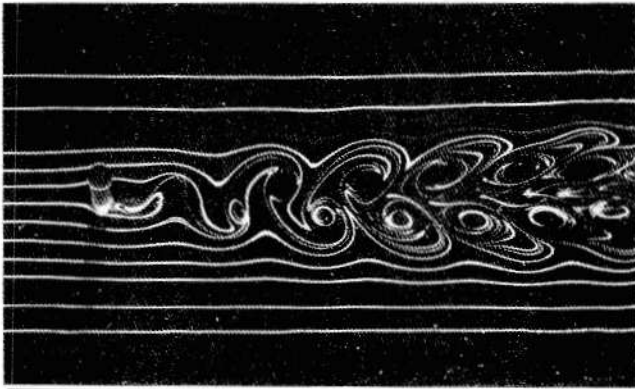


Figura 22 El fluido que corre de izquierda a derecha luego de pasar un obstáculo cilíndrico claramente sufre un cambio de estacionario a turbulento. Nótese los remolinos y torbellinos que se forman corriente abajo a partir del obstáculo.

rugosa. Si la fuerza de fricción es pequeña, el bloque se deslizará por la superficie si la fuerza aplicada F es por lo menos tan grande como la fuerza de fricción f . Si la fuerza de fricción fuese mayor, la fuerza aplicada F deberá también ser mayor, llegando a ser al final lo suficientemente grande como para volcar el bloque. La volcadura del bloque es la analogía de la transición del flujo estacionario al flujo turbulento.

Podemos determinar la velocidad crítica a la cual el flujo se convierte en turbulento por medio de un análisis dimensional. Hagamos que v_c represente la velocidad crítica, la cual consideramos que sea un promedio en el tubo porque, como lo sugiere la figura 20, la velocidad varía en la sección transversal del tubo. Esperamos que esta velocidad crítica dependa de la viscosidad η y de la densidad ρ del fluido y del diámetro D del tubo. Usando nuestra técnica usual de análisis dimensional, procedemos como sigue:

$$v_c \propto \eta^a \rho^b D^c$$

$$[v_c] = [\eta^a][\rho^b][D^c]$$

$$L T^{-1} = (M L^{-1} T^{-1})^a (M L^{-3})^b (L)^c,$$

donde las dimensiones de la viscosidad han sido obtenidas a partir de sus unidades de $N \cdot s/m^2$. Resolviendo, obtenemos

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1.$$

Entonces, la velocidad crítica puede escribirse:

$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho D},$$

o, introduciendo una constante de proporcionalidad R ,

$$v_c = R \frac{\eta}{\rho D}. \quad (21)$$

La constante sin dimensión R se denomina *número de Reynolds*. Resolviendo la ecuación 21 para R , podemos escribir el número de Reynolds para *cualquier* velocidad del flujo v como:

$$R = \frac{\rho D v}{\eta}. \quad (22)$$

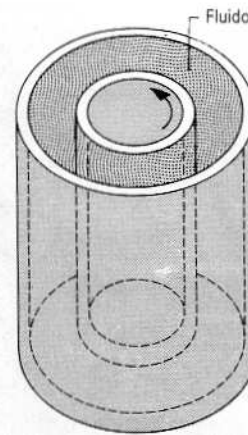


Figura 23 Aparato experimental para medir la viscosidad de los fluidos. El fluido se coloca entre los dos cilindros, estando fijo el cilindro exterior y girando el cilindro interior a una velocidad angular ω . La torca necesaria para hacer girar al cilindro interior a esta velocidad angular está determinada por la viscosidad del fluido.

En esta interpretación, el número de Reynolds puede utilizarse para caracterizar a *cualquier* flujo, y podemos determinar por experimentación el valor del número de Reynolds para el cual el flujo se convierte en turbulento.

En tubos cilíndricos, el número de Reynolds que corresponden a la velocidad crítica es de alrededor de 2000. Así, para el agua que fluya por una tubería de 2 cm de diámetro (la típica manguera de jardín casera, por ejemplo), la velocidad crítica es

$$v_c = 2000 \frac{1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2}{(10^3 \text{ kg}/\text{m}^3)(0.02 \text{ m})} = 0.1 \text{ m/s} = 10 \text{ cm/s}.$$

Ésta es una velocidad bastante baja, lo cual sugiere que el flujo del agua es turbulento en una tubería doméstica ordinaria. (La velocidad de flujo de un grifo doméstico típico es de alrededor de 1 m/s.)

Nótese de la ecuación 21 que la velocidad de flujo crítica aumenta con la viscosidad. Esto es, cuanto más grande sea el rozamiento viscoso ejercido por el fluido circundante, con más probabilidad el flujo será estacionario.

Flujo caótico

La geometría de la figura 19 no es particularmente conveniente para medir la viscosidad. La figura 23 muestra un dispositivo más conveniente. El espacio entre cilindros coaxiales está lleno con el fluido cuya viscosidad está por determinarse. Se hace que el cilindro interior gire, mientras se mantiene fijo al cilindro exterior. Puede determinarse la viscosidad del fluido a partir de la fuerza necesaria para mantener girando al cilindro interior a una velocidad constante.

Para velocidades rotatorias pequeñas, el flujo en la figura 23 será estacionario y laminar. Al aumentar la velocidad rotatoria del cilindro interior, el flujo acaba por ser turbulento. Podemos observar que la transición de flujo estacionario a flujo turbulento se lleva a cabo de manera ordenada. La figura 24 muestra dos etapas intermedias. Primeramente el fluido forma torbellinos toroidales (un poco similar a un montón de donas apiladas) y

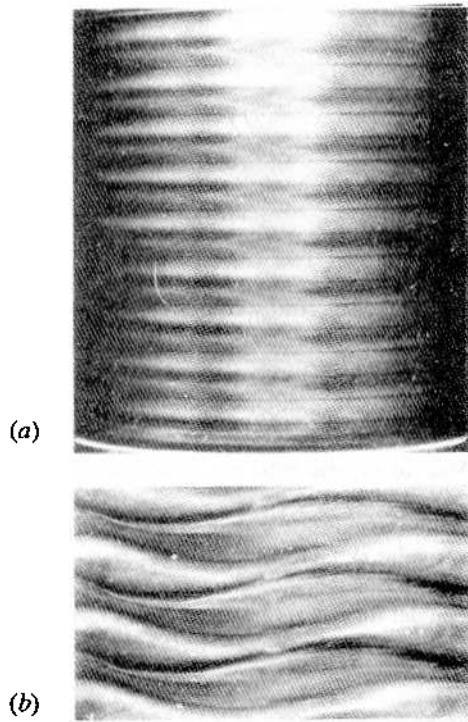


Figura 24 Cuando la velocidad del fluido en el aparato de la figura 23 excede a la velocidad crítica, el flujo se vuelve inestable y se rompe en (a) torbellinos toroidales y luego en (b) ondas sobreimpuestas a los torbellinos.

luego se manifiesta con un patrón de ondas de frecuencia definida que se superpone a los torbellinos. Al continuar cre-

ciendo la velocidad de rotación, aparecen ondas con nuevas frecuencias. Podemos imaginar que el flujo turbulento es la ampliación de este movimiento que incluye tantas componentes de frecuencia que parece que el movimiento se vuelve completamente desordenado y confuso (algo así como el ruido electrónico). Puede existir una estructura periódica subyacente, pero es demasiado compleja para seguirla.

La teoría del caos (véase la Secc. 6-9) adquiere un enfoque diferente para explicar el surgimiento de la turbulencia. El movimiento turbulento que resulta de la teoría del caos es verdaderamente *aperiódico*, no simplemente la combinación de un gran número de movimientos periódicos. Existe una distinción crítica entre estos dos casos. Si la transición de flujo estacionario a flujo turbulento tiene lugar por medio de una sucesión de movimientos periódicos ordenados, entonces dos partículas de fluido que se muevan en forma parecida en el flujo estacionario permanecerán en estados de movimiento relacionados íntimamente durante la transición al flujo turbulento. Sin embargo, si la condición intermedia puede describirse como caótica, entonces el movimiento deja de ser susceptible de predicción y las dos partículas pueden hallarse en el flujo turbulento en estados de movimiento muy diferentes. La teoría del caos, aplicable a una amplia variedad de sistemas físicos, proporciona una base teórica alterna para entender sistemas complejos como el movimiento turbulento de los fluidos. ■

PREGUNTAS

1. Describa brevemente lo que significa cada uno de los conceptos siguientes e ilústrellos con un ejemplo: (a) flujo de fluido estacionario; (b) flujo de fluido no estacionario; (c) flujo de fluido rotatorio; (d) flujo de fluido no rotatorio; (e) flujo de fluido compresible; (f) flujo de fluido incompresible; (g) flujo de fluido viscoso; (h) flujo de fluido no viscoso.
2. Explique las variaciones de presión de la sangre al circular por el organismo.
3. Explique cómo mide un médico la presión sanguínea.
4. En el flujo estacionario, el vector de la velocidad es constante en cualquier punto. ¿Puede existir entonces un movimiento acelerado de las partículas del fluido? Explique.
5. Describa las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido al correr por una tubería de sección transversal no uniforme.
6. En una demostración en el aula, una pelota de ping pong se mantiene en el aire por medio de un chorro vertical de aire. ¿Es el equilibrio estable, inestable, o neutro? Explique.
7. La altura del líquido en los tubos derechos de la figura 25 indica que la presión disminuye a lo largo del conducto,

aun cuando éste tenga una sección transversal uniforme y el líquido que fluye sea incompresible. Explique.

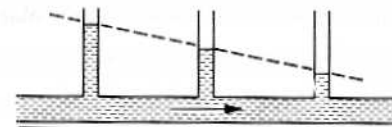


Figura 25 Pregunta 7.

8. Explique por qué una chimenea más alta crea un mejor tiro para extraer el humo fuera del hogar. ¿Por qué no se extiende el humo en el recinto en que se halla el fuego?
9. (a) Explique cómo puede hacer un lanzador de béisbol que la bola se curve a su derecha o a su izquierda. ¿Podemos justificarlo aplicando la ecuación de Bernoulli a una bola que gire así? (Véase "Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics", por Norman F. Smith, *The Physics Teacher*, noviembre de 1972, pág. 451.) (b) ¿Por qué es más fácil

- lograr una curva con una pelota de tenis que con una bola de béisbol?
10. No solamente puede hacerse que una bola de superficie rugosa se curve al lanzarla sino también una bola lisa, pero estas bolas se curvarán en direcciones *opuestas*. ¿Por qué? (Véase "Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball and the Magnus Effect for Smooth Spheres", por Lyman J. Briggs, *American Journal of Physics*, noviembre de 1959, pág. 589.)
 11. Dos lanchas de remos que se mueven paralelamente entre sí y en la misma dirección son arrastradas una hacia la otra. Dos automóviles que se muevan paralelamente también son arrastrados entre sí. Explique tal fenómeno con base en la ecuación de Bernoulli.
 12. Al construir los "rascacielos", ¿qué fuerzas producidas por el movimiento del aire deben ser contrarrestadas? ¿Cómo se hace esto? (Véase "The Wind Bracing of Buildings", por Carl W. Condit, *Scientific American*, febrero de 1974, pág. 92.)
 13. Explique, mediante la ecuación de Bernoulli, la acción de un paracaídas para retardar la caída libre.
 14. ¿Por qué se vuelve más angosta la corriente de agua al salir por un grifo?
 15. ¿Puede usted explicar por qué el agua fluye en corriente continua cuando corre por un tubo vertical hacia abajo, mientras que se divide en gotas al caer libremente?
 16. ¿Cómo trabaja la descarga de un excusado? En la realidad. (Véase *Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper*, por W. Reyburn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.)
 17. A veces, es posible sacar una carta del sobre cortando una tira delgada del lado estrecho, sujetándolo firmemente, y soplando hacia él. Explique, empleando la ecuación de Bernoulli, por qué tiene éxito este procedimiento.
 18. ¿Sería mejor que un aeroplano al despegar se moviese contra el viento o con el viento? ¿Y al aterrizar?
 19. Explique cómo depende la diferencia de presión entre las superficies baja y alta del ala de un aeroplano de la altitud del plano que se mueve.
 20. La acumulación de hielo en el ala de un aeroplano puede reducir significativamente su fuerza ascensional. Explique. (El peso del hielo no es lo que aquí importa.)
 21. ¿Cómo es que un aeroplano puede volar "panza" arriba?
 22. "La forma de plátano característica de la mayoría de los bumerangs no tiene mucho que ver con su capacidad de retorno... La cuestión esencial consiste en la sección transversal de los brazos, la cual debe ser más convexa en un lado que en el otro, como en el perfil del ala de un aeroplano. (De "The Aerodynamics of Boomerangs", por Felix Hess, *Scientific American*, noviembre de 1968, pág. 124.) Explique.
 23. ¿Cómo se impulsan los pájaros para remontar el vuelo? (Véase "The Soaring Flight of Birds", por C. D. Cone, Jr., *Scientific American*, abril de 1962, pág. 130.)
 24. ¿Por qué aparece el factor "2" en lugar del factor "1"? Uno podría ingenuamente esperar que el empuje fuera simplemente la diferencia de presión multiplicada por el área, esto es, $A_0(p - p_0)$.

25. Explique por qué el efecto destructivo de un tornado es mayor cerca del centro de la perturbación que cerca del borde.
26. Cuando se retira el tapón de una tina llena, el agua se cuele por el orificio mientras forma un pequeño remolino. La velocidad angular de un elemento de fluido en torno a un eje vertical que pase por el orificio parece ser más grande cerca del orificio. Explique.
27. ¿Es verdad que en las bañeras situadas en el hemisferio norte el agua se drena con una rotación en sentido antihorario y en las del hemisferio sur lo hacen en sentido horario? De ser así, explique y prediga lo que pasaría en el ecuador. (Véase "Bath-Tub Vortex", por Ascher H. Shapiro, *Nature*, diciembre 15, 1962, pág. 1080.)
28. Explique por qué no es posible retirar el filtro de papel del embudo de la figura 26 soplando por el extremo angosto.

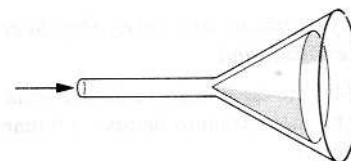


Figura 26 Pregunta 28.

29. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, un aumento de velocidad debe estar asociado a una disminución de la presión. Sin embargo, cuando ponemos la mano fuera de la ventanilla de un automóvil en movimiento, aumentando la velocidad a la cual fluye el aire, sentimos un *aumento* de presión. ¿Por qué no es esto una violación de la ecuación de Bernoulli?
30. ¿Por qué la presencia de la atmósfera reduce el alcance máximo de ciertos objetos (por ejemplo, las pelotas de tenis) pero aumenta el alcance máximo de otros (por ejemplo, los discos voladores o las pelotas de golf)?
31. Un disco puede llegar más lejos lanzado *contra* un viento de 25 mi/h que a favor del viento. ¿Cuál es la explicación? (*Sugerencia*: Piense en la fuerza ascensional dinámica y en el arrastre.)
32. Explique por qué las pelotas de golf tienen hoyuelos.
33. Cuanto más largo sea el tablón y haya menos profundidad en el agua, más lejos se deslizará una tabla para flotar sobre las olas (*surf board*). Explique. (Véase "The Surf Skimmer", por R. D. Edge, *American Journal of Physics*, Julio de 1968, pág. 630.)
34. Si se vierte de una tetera, el agua tiene una tendencia a salir a lo largo del borde inferior de la boca de salida. Explique. (Véase "The Teapot Effect... a Problem", por Markus Reiner, *Physics Today*, septiembre de 1956, pág. 16.)
35. Las marmotas viven en colonias grandes en sistemas complejos de madrigueras interconectadas. Encaran el problema de mantener en sus madrigueras un abastecimiento de aire suficiente para evitar la asfixia. La evitan construyendo montículos cónicos de tierra sobre algunas de sus muchas aberturas de madriguera. En términos de la ecuación de Bernoulli, ¿cómo trabaja este esquema de aire

acondicionado? Obsérvese que, debido a las fuerzas viscosas, la velocidad del viento en la pradera está menos cerca del nivel del suelo de lo que lo está incluso a unas cuantas pulgadas más arriba. (Véase *New Scientist*, enero 27, 1972, pág. 191.)

36. La viscosidad es un ejemplo de un fenómeno de transporte. ¿Qué propiedad está siendo transportada? ¿Puede usted pensar en otros fenómenos de transporte y en sus propiedades correspondientes?

37. En tiempo de frío, ¿por qué recomiendan los fabricantes de automóviles emplear aceites "multigrado" (multiviscosidad) para el motor?
38. ¿Por qué es más importante tener en cuenta la viscosidad en un fluido que circula por un conducto angosto que en un conducto relativamente sin restricción?
39. La viscosidad puede retrasar la presencia de turbulencia en el flujo de los fluidos; es decir, tiende a estabilizar el flujo. Considere el jarabe y el agua, por ejemplo, y encuentre una explicación aceptable.

PROBLEMAS

Sección 18-2 Trayectoria de una corriente y la ecuación de continuidad

- Un tubo de 34.5 cm de diámetro conduce agua que circula a razón de 2.62 m/s. ¿Cuánto tiempo le tomará descargar 1600 m³ de agua?
- Una manguera de jardín que tiene un diámetro interno de 0.75 in está conectada a un aspersor que consta simplemente de un accesorio con 24 orificios, cada uno de 0.050 in de diámetro. Si el agua de la manguera tiene una velocidad de 3.5 ft/s, ¿a qué velocidad sale por los orificios del aspersor?
- La figura 27 muestra la confluencia de dos corrientes que forman un río. Una corriente tiene una anchura de 8.2 m, una profundidad de 3.4 m, y una velocidad de 2.3 m/s. La otra corriente tiene 6.8 m de anchura, 3.2 m de profundidad, y fluye a razón de 2.6 m/s. La anchura del río es de 10.7 m y la velocidad de su corriente es de 2.9 m/s. ¿Cuál es su profundidad?

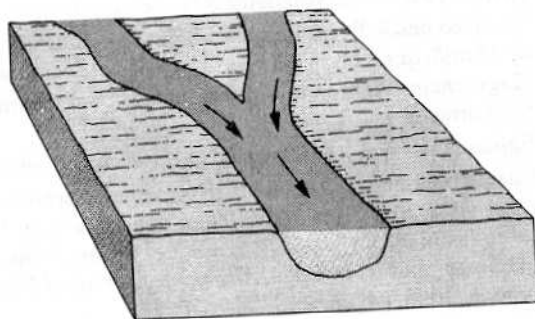


Figura 27 Problema 3.

- Se bombea continuamente agua que se extrae de un sótano inundado con una velocidad de 5.30 m/s por medio de una manguera uniforme de 9.70 mm de radio. La manguera pasa por una ventana situada a 2.90 m sobre el nivel del agua. ¿Cuánta potencia proporciona la bomba?
- Un río de 21 m de anchura y 4.3 m de profundidad irriga una superficie de 8500 km² donde la precipitación (plu-

vial) promedio es de 48 cm/año. Una cuarta parte de ésta regresa posteriormente a la atmósfera por evaporación, pero el resto corre finalmente por el río. ¿Cuál es la velocidad promedio de la corriente del río?

- Las corrientes de las mareas en los canales angostos que unen a las bahías costeras con el océano pueden ser muy rápidas. El agua debe fluir hacia la bahía al elevarse la marea y salir de nuevo al mar durante la bajamar. Considere la bahía rectangular mostrada en la figura 28a. La bahía está unida al mar por medio de un canal de 190 m de anchura y 6.5 m de profundidad respecto al nivel medio del mar. La gráfica (figura 28b) muestra la variación diurna del nivel del agua en la bahía. Calcule la velocidad promedio de la corriente de las mareas en el canal.

Sección 18-3 La ecuación de Bernoulli

- ¿Cuánto trabajo efectúa la presión al bombear 1.4 m³ de agua por un tubo de 13 mm de diámetro interno si la diferencia de presión entre los extremos del tubo es de 1.2 atm?
- La toma de agua de una presa (véase la Fig. 29) tiene un área de sección transversal de 7.60 ft². El agua fluye en ella a una velocidad de 1.33 ft/s. En la planta de generación que está situada a 572 ft abajo del punto de toma, el agua fluye a razón de 31 ft/s. (a) Halle la diferencia de presión, en lb/in², entre la toma y la descarga. (b) Halle el área del tubo de descarga. La densidad promedio del agua es de 62.4 lb/ft³.
- A veces, se prueban modelos de torpedos en un tubo horizontal por el que fluye el agua, muy similar al túnel de viento que se emplea para probar modelos de aviones. Considere un tubo circular de 25.5 cm de diámetro interno y un modelo de torpedo, alineado a lo largo del eje del tubo, con un diámetro de 4.80 cm. El torpedo va a ser probado con agua que circula a razón de 2.76 m/s. (a) ¿A qué velocidad deberá fluir el agua en la parte no reducida del tubo? (b) Halle la diferencia de presión entre la parte no reducida y la parte reducida del tubo.
- Por una tubería con un área de la sección transversal de 4.20 cm² circula el agua a una velocidad de 5.18 m/s. El agua desciende gradualmente 9.66 m mientras que el área

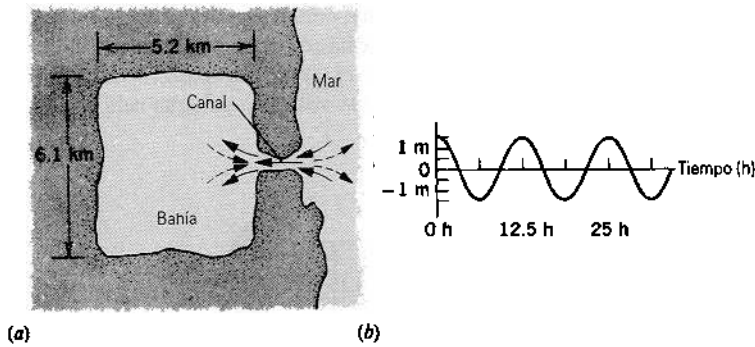


Figura 28 Problema 6.

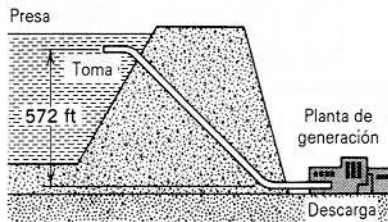


Figura 29 Problema 8.

del tubo aumenta en 7.60 cm^2 . (a) ¿Cuál es la velocidad del flujo en el nivel inferior? (b) La presión en el nivel superior es de 152 kPa ; halle la presión en el nivel inferior.

11. Supóngase que dos tanques, 1 y 2, cada uno con una gran abertura en la parte superior, contienen líquidos diferentes. Se practica un pequeño orificio en el costado de cada tanque a la misma profundidad h debajo de la superficie del líquido, pero el orificio del tanque 1 tiene la mitad del área de sección transversal que tiene el orificio del tanque 2. (a) ¿Cuál es la razón ρ_1/ρ_2 de las densidades de los fluidos si se observa que el flujo de masa es el mismo a través de los dos orificios? (b) ¿Cuál es la razón de los flujos volumétricos de los dos tanques? (c) Se desea igualar los dos flujos añadiendo o drenando fluido en el tanque 2. ¿Cuál sería la nueva altura del fluido sobre el orificio del tanque 2 para hacer que la cantidad de flujo en el tanque 2 sea igual a la del tanque 1?
12. Durante un huracán está soplando aire (densidad = 1.2 kg/m^3) sobre el tejado de una casa a una velocidad de 110 km/h . (a) ¿Cuál es la diferencia de presión entre el interior y el exterior que tiende a levantar el tejado? (b) ¿Cuál sería la fuerza ascensional en un tejado de 93 m^2 de área?
13. Las ventanas de un edificio de oficinas tienen 4.26 m por 5.26 m . En un día tempestuoso, el aire sopla a razón de 28.0 m/s al pasar por una ventana en el piso 53. Calcúlese la fuerza neta sobre la ventana. La densidad del aire es de 1.23 kg/m^3 .
14. Un líquido fluye por una tubería horizontal cuyo radio interior es de 2.52 cm . La tubería se dobla hacia arriba hasta una altura de 11.5 m donde se ensancha y se une con otra tubería horizontal de 6.14 cm de radio interior. ¿Cuál debe ser el flujo volumétrico si la presión en las dos tuberías horizontales es la misma?

15. La figura 30 muestra un líquido que está siendo descargado por un orificio practicado en un tanque grande y situado a una distancia h bajo la superficie del líquido. El tanque está abierto por arriba. (a) Aplique la ecuación de Bernoulli a una línea de corriente líquida que una a los puntos 1, 2, y 3, y demuestre que la velocidad de salida es

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Esta ecuación se conoce como la *ley de Torricelli*. (b) Si el orificio estuviese curvado directamente hacia arriba, ¿a qué altura se elevaría la línea de corriente líquida? (c) ¿Cómo afectaría al análisis la viscosidad o la turbulencia?

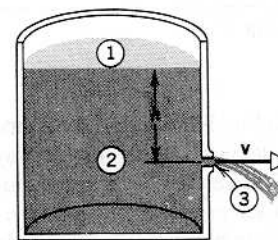


Figura 30 Problema 15.

16. Un tanque está lleno de agua hasta una altura H . En una de sus paredes se taladra un orificio a una profundidad h bajo la superficie del agua (Fig. 31). (a) Demuestre que la distancia x desde la base de la pared hasta donde cae la corriente al suelo está dada por $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (b) Podría taladrarse un orificio a otra profundidad de modo que esta segunda corriente tuviese el mismo alcance? De ser así, a qué profundidad? (c) ¿A qué profundidad debería estar el orificio para hacer que la corriente de salida caiga al suelo a la distancia máxima a partir de la base del tanque? ¿Cuál es esta distancia máxima?
17. Un francotirador dispara una bala de rifle contra un tanque de gasolina, haciéndole un orificio a 53.0 m bajo la superficie de la gasolina. El tanque se ha sellado y se ha sometido a una presión absoluta de 3.10 atm , como se muestra en la figura 32. La gasolina almacenada tiene una densidad de 660 kg/m^3 . ¿A qué velocidad comienza la gasolina a salir disparada por el orificio?
18. Considérese un tubo en U uniforme con un diafragma en el fondo y lleno de un líquido a alturas diferentes en cada

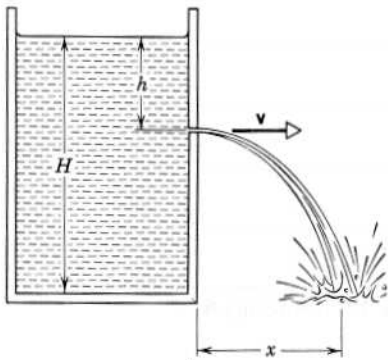


Figura 31 Problema 16.

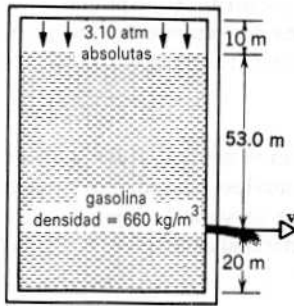


Figura 32 Problema 17.

brazo (véase la Fig. 33). Imaginemos ahora que el diafragma se perfora de modo que el líquido fluye de izquierda a derecha. (a) Demuestre que la aplicación de la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 3 conduce a una contradicción. (b) Explique por qué la ecuación de Bernoulli no es aplicable aquí. (Sugerencia: ¿Es estacionario el flujo?)

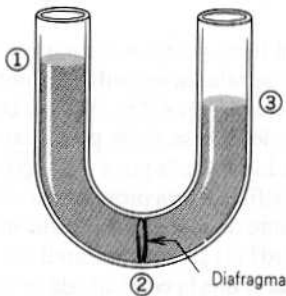


Figura 33 Problema 18.

19. Si una persona sopla aire a una velocidad de 15.0 m/s en la parte superior de un lado de un tubo en U que contiene agua, ¿cuál será la diferencia entre los niveles del agua en los dos lados? Suponga que la densidad del aire sea de 1.20 kg/m³.
20. El agua dulce embolsada tras la cortina de una presa tiene una profundidad de 15.2 m. Un tubo horizontal de 4.30 cm de diámetro pasa a través de la cortina a 6.15 m

bajo la superficie del agua, como se muestra en la figura 34. En la salida del tubo se ha colocado un tapón. (a) Halle la fuerza de fricción entre el tapón y las paredes del tubo. (b) Se retira el tapón. ¿Qué volumen de agua sale por el tubo en 3.00 h?

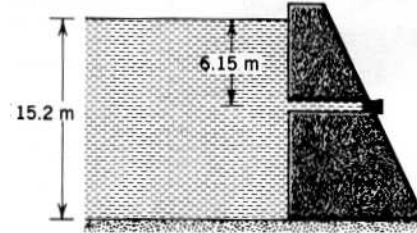


Figura 34 Problema 20.

21. Un sifón es un aparato para extraer líquido de un recipiente sin inclinarlo. Funciona como se muestra en la figura 35. El tubo debe estar lleno inicialmente, pero una vez se ha hecho esto, el líquido fluirá hasta que el nivel descienda por debajo de la abertura del tubo en A. El líquido tiene una densidad ρ y una viscosidad despreciable. (a) ¿A qué velocidad sale el líquido del tubo en C? (b) ¿Cuál es la presión del líquido en el punto más elevado B? (c) ¿Cuál es la mayor altura h posible a la que el sifón puede elevar el agua?

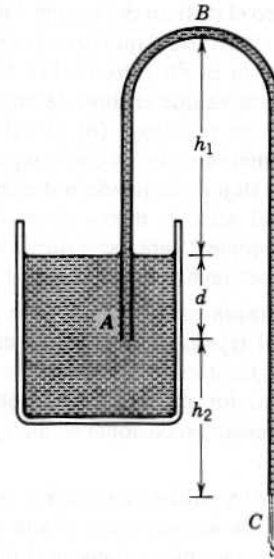


Figura 35 Problema 21.

22. (a) Considérese una corriente de fluido de densidad ρ con velocidad v_1 que pasa *repentinamente* de un tubo cilíndrico de área de sección transversal a_1 a un tubo cilíndrico más ancho de área de sección transversal a_2 (véase la Fig. 36). El chorro se mezclará con el fluido circundante

y, después de mezclarse, fluirá casi uniformemente a una velocidad promedio v_2 . Sin referirse a los detalles del mezclado, use argumentos del ímpetu para demostrar que el aumento de presión debido al mezclado es aproximadamente

$$p_2 - p_1 \approx \rho v_2(v_1 - v_2).$$

(b) Demuestre a partir de la ecuación de Bernoulli que en un tubo que se vacíe *gradualmente* obtendríamos

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2).$$

(c) Halle la pérdida de presión debida al ensanchamiento repentino del tubo. ¿Puede usted trazar una analogía con las colisiones elásticas e inelásticas de la mecánica de la partícula?

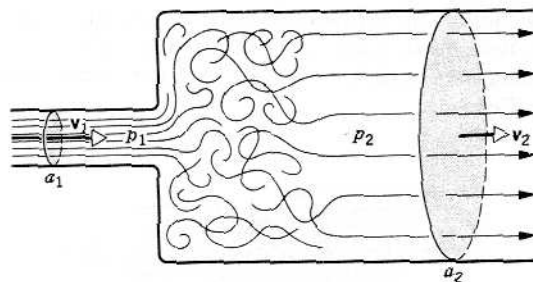


Figura 36 Problema 22.

23. Una jarra contiene 15 vasos de jugo de naranja. Cuando se abre la espita del fondo transcurren 12.0 s para llenar de jugo un vaso. Si dejamos la espita abierta, ¿cuánto tiempo tardarán en llenarse los 14 vasos restantes hasta agotar el jugo?

Sección 18-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad

24. Un tubo de Pitot está montado en el ala de un aeroplano para determinar la velocidad del aeroplano con relación al aire, el cual tiene una densidad de 1.03 kg/m³. El tubo contiene alcohol e indica una diferencia de nivel de 26.2 cm. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano respecto al aire? La densidad del alcohol es de 810 kg/m³.
25. Un tubo hueco tiene un disco DD adosado a su extremo (Fig. 37). Cuando se sopla aire de densidad ρ por el tubo, el disco atrae a la tarjeta CC. Sea A el área de la tarjeta y v la velocidad promedio del aire entre la tarjeta y el disco. Calcule la fuerza hacia arriba resultante sobre CC. Desprecie el peso de la tarjeta; suponga que $v_0 \ll v$, donde v_0 es la velocidad del aire en el tubo hueco.
26. Una placa cuadrada de 9.10 cm de lado y 488 g de masa está embisagrada a lo largo de uno de los lados. Si se sopla aire sobre la superficie superior únicamente, ¿qué velocidad debe tener el aire para mantener horizontal a la placa? El aire tiene una densidad de 1.21 kg/m³.
27. Sobre la parte superior del ala, de área A , de un aeroplano fluye el aire a una velocidad v , y pasa por debajo del ala a

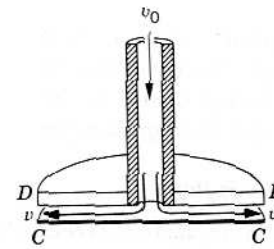


Figura 37 Problema 25.

una velocidad v_u . Demuestre que la ecuación de Bernoulli predice que la fuerza ascensional L sobre el ala será de

$$L = \frac{1}{2}\rho A(v_t^2 - v_u^2),$$

en donde ρ es la densidad del aire. (Sugerencia: Aplíquese la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que pasa justo sobre la superficie superior del ala y a la línea de corriente que pasa justo por debajo de la superficie inferior del ala. ¿Puede usted justificar que las constantes de las dos líneas de corriente sean iguales?)

28. Un aeroplano tiene un área de ala (de cada ala) de 12.5 m². A cierta velocidad del aire, éste fluye sobre la superficie superior del ala a razón de 49.8 m/s y sobre la superficie inferior del ala a 38.2 m/s. (a) Halle la masa del aeroplano. Suponga que el aeroplano viaja a velocidad constante y que los efectos de la fuerza ascensional asociados con el fuselaje y el conjunto de la cola son pequeños. Explique la fuerza ascensional si el aeroplano, que vuela a la misma velocidad que el aire está (b) en vuelo nivelado; (c) ascendiendo a 15°, y (d) descendiendo a 15°. La densidad del aire es de 1.17 kg/m³. Véase el problema 27.
29. Considérese el aire estancado en el borde frontal de un ala y el aire que circula sobre la superficie del ala a una velocidad v . Suponga que la presión en el borde de entrada es la atmosférica aproximadamente y halle el mayor valor posible para v del flujo de corriente; suponga también que el aire es incompresible y utilice la ecuación de Bernoulli. Tome como densidad del aire 1.2 kg/m³. ¿Cómo se compara esto con la velocidad del sonido bajo estas condiciones (340 m/s)? ¿Puede usted explicar la diferencia? ¿Por qué habría de existir alguna conexión entre estas cantidades?
30. Un tubo de Venturi tiene un diámetro de 25.4 cm y una garganta de 11.3 cm de diámetro. La presión del agua en el tubo es 57.1 kPa y en la garganta es de 32.6 kPa. Calcule el flujo volumétrico del agua a través del tubo.
31. Considérese el medidor Venturi de la figura 9. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, y la ecuación de continuidad (Ec. 3), verifique la ecuación 11 para la velocidad del flujo en el punto 1.
32. Considérese el medidor Venturi de la figura 9, que contiene agua, sin el manómetro. Sea $A = 4.75a$. Suponga que la presión en el punto 1 sea 2.12 atm. (a) Calcule los valores de v en el punto 1 y de v' en el punto 2 que harían que la presión p' en el punto 2 fuese igual a cero. (b)

Calcule la cantidad de flujo volumétrico correspondiente si el diámetro en el punto 1 fuese 5.20 cm. El fenómeno en el punto 2 cuando p' decae a casi cero es conocido como *cavitación*. El agua se evapora en pequeñas burbujas.

Sección 18-5 Campos de flujo

33. Demuestre que la constante en la ecuación de Bernoulli es la misma para *todas* las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario, no rotatorio de la figura 14.
34. Un campo de fuerza es conservativo si $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. El círculo del signo de la integración significa que la integración va a ser considerada a lo largo de una curva cerrada (un viaje redondo) en el campo. Un flujo es un flujo potencial (y por tanto no rotatorio) si $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para cada una de las líneas cerradas en el campo. Usando este criterio, demuestre que los campos (a) de la figura 14 y (b) de la figura 17 son campos de flujo potencial.
35. Los efectos centrífugos son considerables en flujos que estén fuertemente curvados. Considérese un elemento de fluido que se mueva a una velocidad v a lo largo de la línea de corriente de un flujo curvo en un plano horizontal (Fig. 38). (a) Demuestre que $dp/dr = \rho v^2/r$, de modo que la presión aumenta en una cantidad $\rho v^2/r$ por unidad de distancia perpendicular a la línea de la corriente yendo del lado cóncavo al lado convexo de ésta. (b) Luego, utilice la ecuación de Bernoulli y este resultado para demostrar que vr es igual a una constante, de modo que las velocidades aumentan hacia el centro de curvatura. De aquí que las líneas de corriente que estén espaciadas uniformemente en una tubería recta se agrupen hacia la pared interior del pasaje curvo y se separen hacia la pared exterior. Este problema debe de compararse con el problema 29 del capítulo 17, donde el movimiento curvo se produce al hacer girar un recipiente. Allí la velocidad variaba directamente con r , pero aquí varía inversamente. (c) Demuestre que este flujo es no rotatorio.

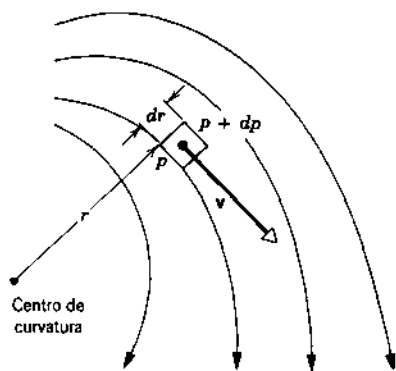


Figura 38 Problema 35.

36. Un modelo del movimiento planetario propuesto por René Descartes fue ampliamente aceptado antes de que Newton propusiera su teoría de la gravitación. En el modelo de Descartes los planetas eran atrapados y arrastrados por un remolino de partículas de éter centrado alrededor del Sol.

Newton demostró que este esquema de torbellino contradecía las observaciones porque: (a) la velocidad de una partícula de éter en el vértice varía inversamente a su distancia al Sol; (b) el periodo de revolución de una partícula tal varía directamente con el cuadrado de su distancia al Sol, y (c) este resultado contradice a la tercera ley de Kepler. Demuestre (a), (b), y (c).

Sección 18-6 Viscosidad, turbulencia, y flujo caótico

37. La figura 39 muestra una sección transversal de las capas superiores de la Tierra. La superficie de la Tierra se divide en varios bloques rígidos, llamados placas, que se deslizan (¡lentamente!) sobre una capa "fangosa" más baja llamada astenosfera. En la figura se relacionan las dimensiones típicas. Supóngase que la velocidad de la placa rígida mostrada sea $v_0 = 48$ mm/y (mm/año), y que la base de la astenosfera no se mueva. Calcule el esfuerzo cortante en la base de la placa. La viscosidad del material de la astenosfera es de 4.0×10^{19} Pa · s. Ignore la curvatura de la Tierra.

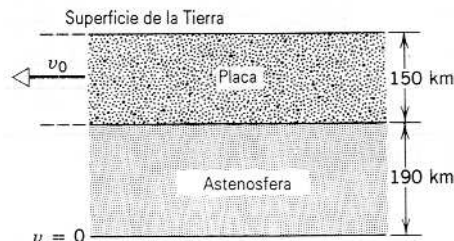


Figura 39 Problema 37.

38. Calcular la mayor velocidad a la cual puede fluir la sangre, a 37° C, por una arteria de 3.8 mm de diámetro si el flujo ha de permanecer estacionario.
39. Por un tubo horizontal de 1.88 cm de radio interno y 1.26 m de longitud fluye mercurio líquido (viscosidad $\approx 1.55 \times 10^{-3}$ N · s/m²). El flujo volumétrico es de 5.35×10^{-2} L/min. (a) Demuestre que el flujo es estacionario. (b) Calcule la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo.
40. En la figura 40 se muestran las líneas de corriente de un campo de flujo de Poiseuille. El espaciamiento de las líneas de corriente indica que aunque el movimiento es rectilíneo, existe un gradiente de velocidad en dirección transversal. Demuestre que el flujo de Poiseuille es rotatorio.

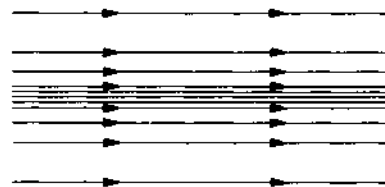


Figura 40 Problema 40.

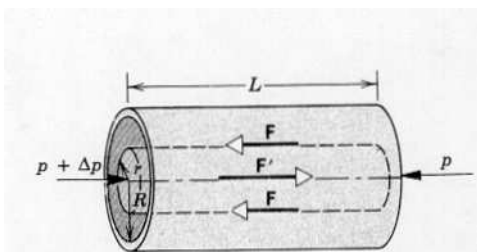


Figura 41 Problemas 41 y 42.

41. Un fluido de viscosidad η fluye estacionariamente por un tubo cilíndrico horizontal de radio R y longitud L , como se muestra en la figura 41. (a) Considere un cilindro arbitrario de fluido de radio r . Demuestre que la fuerza viscosa F debida a la capa circundante es $F = -\eta(2\pi rL)dv/dr$. (b) Demuestre que la fuerza F' que empuja a ese cilindro de fluido a lo largo del tubo es $F' = (\pi r^2)\Delta p$. (c) Utilice la condición de equilibrio para obtener una

(c) Utilice la condición de equilibrio para obtener una expresión para dv en términos de dr . Integre la expresión para obtener la ecuación 18.

42. Considere una vez más el fluido que corre por el tubo descrito en el problema 41 e ilustrado en la figura 41. Halle una expresión para el flujo de masa por un anillo anular entre los radios r y $r + dr$; luego integre este resultado para hallar el flujo de masa total por el tubo, verificando por lo tanto la ecuación 20.
43. Se sopla una burbuja de jabón de 38.2 mm de radio por el extremo de un tubo angosto de 11.2 cm de longitud y 1.08 mm de diámetro interno. El otro extremo del tubo se halla expuesto a la atmósfera. Halle el tiempo que tarda el radio de la burbuja en descender a 21.6 mm. Suponga un flujo de Poiseuille en el tubo. (Use 2.50×10^{-2} N/m para la tensión superficial de la solución de jabón; la viscosidad del aire es de 1.80×10^{-3} N · s/m².)

CAPÍTULO 19

MOVIMIENTO ONDULATORIO

El movimiento ondulatorio se manifiesta en casi todas las ramas de la física. En los cuerpos acuosos se pueden observar, comúnmente, ondas superficiales. Las ondas sonoras y las ondas luminosas son esenciales para nuestra percepción del entorno, a causa de que hemos desarrollado receptores (los ojos y los oídos) capaces de detectarlas. En el siglo pasado el ser humano aprendió a producir y utilizar las ondas de radio. Podemos también entender la estructura de los átomos y de los sistemas subatómicos basados en las propiedades ondulatorias de las partículas que los constituyen. La similitud de las descripciones físicas y matemáticas de estas distintas clases de ondas indican que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la física.

En este capítulo y en el siguiente desarrollaremos las descripciones tanto verbales como matemáticas de las ondas. Utilizamos el ejemplo de las ondas mecánicas, en parte porque ya hemos desarrollado las leyes de la mecánica en este texto. Más adelante, desarrollaremos las leyes que rigen para otros tipos de ondas (por ejemplo, las ondas de luz y otras ondas electromagnéticas). A efectos de simplificación, nos concentraremos en el estudio de las ondas armónicas (es decir, aquellas que pueden ser representadas por funciones del seno y del coseno), pero los principios que desarrollamos se aplican igualmente a formas ondulatorias más complejas.

19-1 ONDAS MECÁNICAS

Las ondas marinas viajan miles de millas a través del océano, pero las partículas de agua no llevan a cabo ese viaje. Cuando usted le grita a un amigo, la onda de sonido recorre la sala, pero las moléculas de aire no recorren esa distancia. Estamos familiarizados con el hecho de que la energía y el ímpetu se transportan de un lugar a otro en virtud del movimiento de las partículas; el movimiento ondulatorio proporciona una manera alternativa de que la energía y el ímpetu se muevan de un lugar a otro sin que las partículas materiales hagan ese viaje.

Las ondas de agua y las ondas sonoras son ejemplos de *ondas mecánicas* que viajan a través de un medio deformable o elástico. Se originan cuando cierta parte del medio se desplaza de su posición normal y queda liberada. Debido a las propiedades elásticas del medio, la perturbación se propaga a través de éste. A nivel microscópico, propiedades mecánicas tales como las fuerzas entre los átomos son las causantes de la propagación de las ondas mecánicas.

En este capítulo nos concentraremos en el estudio de las ondas mecánicas. Para ilustrar algunas propiedades generales de las ondas hemos elegido como ejemplo a un tipo sencillo de onda mecánica, que implica la oscilación de una cuerda estirada como las que se utilizan en una guitarra.

Cuando una onda alcanza a una partícula situada en el medio pone a esa partícula en movimiento y la desplaza, transfiriéndole así energía tanto cinética como potencial. Mediante el movimiento ondulatorio, puede transmitirse a grandes distancias no solamente energía, sino además información sobre la naturaleza de la fuente de ondas. Podemos decir que las partículas del medio se mueven, al pasar la onda, únicamente distancias pequeñas con respecto a sus posiciones previas, sin experimentar un desplazamiento neto en la dirección del viaje de la onda. Por ejemplo, los objetos flotantes pequeños, como una hoja o un corcho muestran que el movimiento real del agua al pasá de la onda es más bien hacia arriba y hacia abajo, y quizás ligeramente en vaivén; una vez que pasa la onda, el objeto está más o menos en el mismo lugar en que estaba

antes de haber pasado ésta. Este hecho era ya conocido en el siglo XV por Leonardo da Vinci, quien escribió de las ondas de agua: "A menudo sucede que la onda escapa del sitio de su creación, mientras que el agua no; como las ondas que se forman en un campo de trigo por efecto del viento, donde las vemos correr a través del campo mientras las espigas permanecen en su lugar."

19-2 TIPOS DE ONDAS

Al enumerar a las ondas de agua, de luz, y de sonido como ejemplo de movimiento ondulatorio, estamos clasificando a las ondas de acuerdo a sus propiedades físicas más amplias. Las ondas pueden clasificarse también de otras maneras.

Podemos distinguir diferentes clases de ondas mecánicas si consideramos cómo se relacionan la dirección del movimiento de las partículas de materia con la dirección de propagación de la onda. Si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda misma, hablamos de una onda *transversal*. Por ejemplo, cuando una cuerda en tensión se hace oscilar en vaivén desde un extremo, a lo largo de la cuerda viaja una onda transversal; la perturbación se mueve a lo largo de la cuerda pero las partículas de la cuerda vibran en ángulo recto a la dirección de propagación de la perturbación (Fig. 1a). Las ondas de luz, aunque no sean ondas mecánicas, son también ondas transversales.

Sin embargo, si el movimiento de las partículas de una onda mecánica es de vaivén a lo largo de la dirección de propagación, tenemos una onda *longitudinal*. Por ejemplo: cuando un resorte en tensión se pone a oscilar en vaivén desde uno de sus extremos, a lo largo del resorte viaja una onda longitudinal; los arrollamientos vibran en vaivén paralelos a la dirección en la que viaja la perturbación a lo largo del resorte (Fig. 1b). Las ondas de sonido que viajan en un gas son ondas longitudinales y las estudiaremos con mayor detalle en el capítulo 20.

Ciertas ondas no son ni puramente longitudinales ni puramente transversales. Por ejemplo, en las ondas que vemos sobre la superficie del agua las partículas de ésta se mueven tanto de arriba abajo como en vaivén, trazando trayectorias elípticas al moverse.

Las ondas pueden también clasificarse como uni, bi, o tridimensionales, de acuerdo con el número de dimensiones en que propaguen la energía. Las ondas que se mueven a lo largo de la cuerda o del resorte de la figura 1 son unidimensionales. Las ondas superficiales o rizados de agua, que se forman al arrojar una piedra a un estanque tranquilo, son bidimensionales. Las ondas de sonido y de luz que viajen radialmente partiendo de una pequeña fuente son tridimensionales.

Puede ampliarse la clasificación de las ondas según como se muevan las partículas del medio en el tiempo. Por ejemplo, podemos producir una *pulsación* que viaje por una cuerda estirada aplicándole un solo movimiento lateral en su extremo (Fig. 1c). Cada partícula permanece

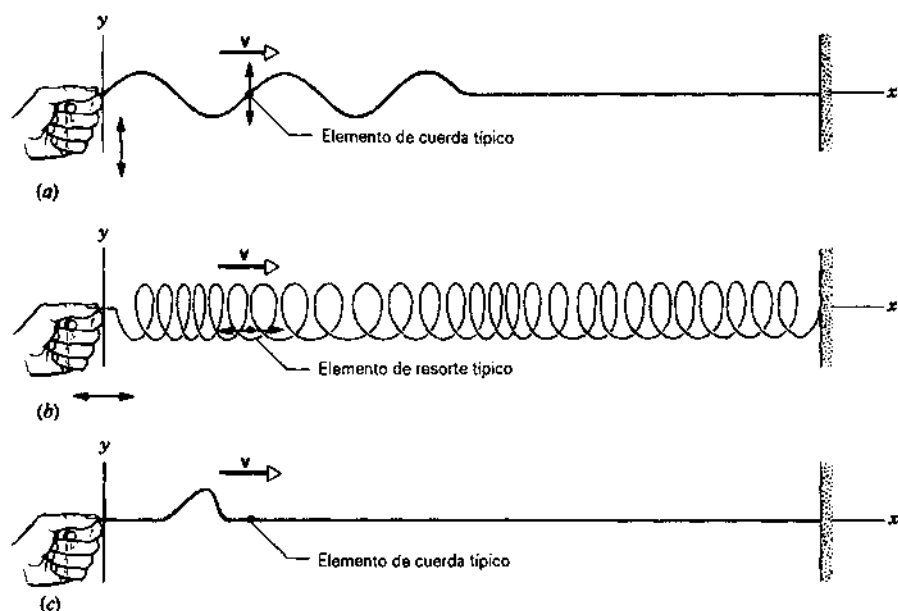


Figura 1 (a) Envío de una onda transversal a lo largo de una cuerda. Cada elemento de la cuerda vibra en ángulo recto a la dirección de propagación de la onda. (b) Envío de una onda longitudinal a lo largo de un resorte. Cada elemento del resorte vibra paralelo a la dirección de propagación de la onda. (c) Envío de una pulsación transversal única a lo largo de una cuerda.

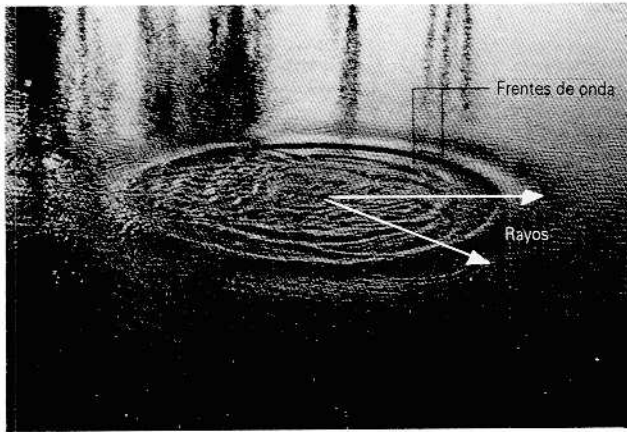


Figura 2 Ondas en la superficie de un lago. Los rizos circulares representan frentes de onda. Los rayos, que son perpendiculares a los frentes de onda, indican la dirección del movimiento de la onda.

en reposo hasta que la pulsación llega hasta ella, luego se mueve durante un tiempo corto y luego permanece nuevamente en reposo. Si continuamos moviendo el extremo de la cuerda en vaivén (Fig. 1a), produciremos un *tren de ondas* que viajará a lo largo de la cuerda. Si nuestro movimiento es periódico, produciremos un *tren de ondas periódico*, donde cada partícula de la cuerda tendrá un movimiento periódico. El caso especial más sencillo de una onda periódica es una *onda armónica*, donde cada partícula experimenta un movimiento armónico simple.

Imaginemos una piedra lanzada a un lago tranquilo. Los rizos circulares se esparcen hacia afuera desde el punto en que la piedra entró al agua (Fig. 2). A lo largo de un rizo circular dado, todos los puntos están en el mismo estado de movimiento. Esos puntos definen una superficie llamada *frente de onda*. Si el medio es de densidad uniforme, la dirección del movimiento de las ondas está en ángulo recto al frente de la onda. Una línea normal a los frentes de onda, que indique la dirección del movimiento de las ondas, se llama *rayo*.

Los frentes de onda pueden tener muchas formas. Una fuente central en la superficie del agua produce ondas bidimensionales con frentes de onda circulares y rayos que salen hacia afuera a partir del punto de la perturbación (como en la figura 2). En cambio, un palo muy largo arrojado horizontalmente al agua produciría (cerca de su centro) perturbaciones que viajan como líneas rectas, y cuyos rayos serían líneas paralelas. La analogía tridimensional, en la cual las perturbaciones viajan en una sola dirección, es la *onda plana*. En un instante dado, las condiciones son las mismas en todas partes de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos, y los rayos son líneas rectas paralelas (Fig. 3a). La analogía tridimensional de las ondas circulares son las ondas esféricas. Aquí, la perturbación se propaga hacia afuera en todas direcciones desde una fuente puntual de ondas. Los frentes de onda son esferas, y los rayos son líneas radiales que salen de la fuente puntual en todas direcciones (Fig. 3b). Lejos de esta fuente los frentes de onda esféricos tienen una curvatura muy pequeña, y dentro de una región limitada pueden considerarse a menudo como planos. Por supuesto, existen otras muchas formas de frentes de onda posibles.

19-3 ONDAS VIAJERAS

Como ejemplo del comportamiento de las ondas mecánicas consideraremos a una forma de onda transversal que viaje en una cuerda estirada larga. Suponemos una cuerda "ideal", en la cual la perturbación, ya sea una pulsación o un tren de ondas, mantiene su forma mientras viaja. Para que esto suceda, las pérdidas por fricción y otros medios de disipación de la energía deben ser despreciablemente pequeños. La perturbación está en el plano xy y viaja en dirección x .

La figura 4a muestra una forma de onda arbitraria en $t = 0$; podemos considerar que ésta es una instantánea de la pulsación que viaja a lo largo de la cuerda mostrada

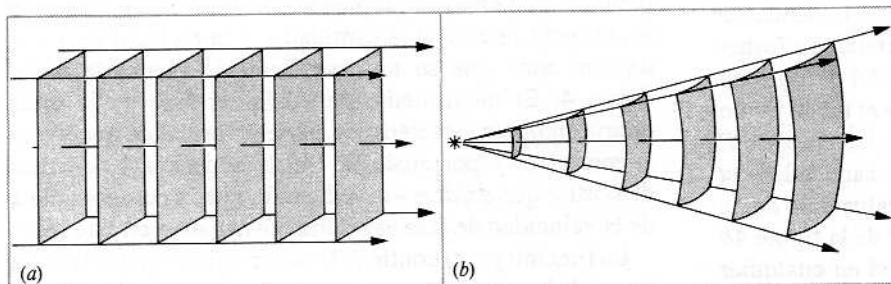


Figura 3 (a) Onda plana. Los planos representan frentes de onda espaciados en una longitud de onda, y las flechas representan rayos. (b) Onda esférica. Los frentes de onda, espaciados en una longitud de onda, son superficies esféricas y los rayos están en dirección radial.

en la figura 1c. Hagamos que la pulsación se mueva en dirección x positiva con una velocidad v . En un tiempo t más tarde, la pulsación se ha movido una distancia vt , como se muestra en la figura 4b. Nótese que la forma de onda es la misma en $t = 0$ que en tiempos posteriores.

La coordenada y indica el desplazamiento transversal de un punto en particular de la cuerda. Esta coordenada depende tanto de la posición x como del tiempo t . Indicamos esta dependencia de dos variables como $y(x, t)$.

Podemos representar a la forma de onda de la figura 4a como:

$$y(x, 0) = f(x), \quad (1)$$

donde f es una función que describe la forma de la onda. En el tiempo t , la forma de onda debe todavía describirse por la misma función f , porque hemos supuesto que la forma no cambia al viajar la onda. Con relación al origen O' de un marco de referencia que viaje con la pulsación, la forma se describe por la función $f(x')$, como se indica en la figura 4b. La relación entre las coordenadas x de los dos marcos de referencia es $x' = x - vt$, como puede verse en la figura 4b. Entonces, en el tiempo t , la onda se describe por

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt). \quad (2)$$

Es decir, la función $f(x - vt)$ tiene la misma forma relativa al punto $x = vt$ en el tiempo t que la función $f(x)$ la tiene con relación al punto $x = 0$ en el tiempo $t = 0$.

Para describir por completo a la onda, debemos especificar a la función f . Más adelante, consideraremos a las ondas armónicas, en las cuales f es una función seno o coseno.

Las ecuaciones 1 y 2 juntas indican que podemos cambiar una función de cualquier forma en una onda que viaje en dirección x positiva simplemente sustituyendo a x por la cantidad $x - vt$ en todo lugar en que aparezca en la $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(x - vt) = (x - vt)^2$. Además, una onda que viaje en dirección x positiva debe depender de x y de t únicamente en la combinación $x - vt$; así pues, $x^2 - (vt)^2$ no representa a tal onda viajera.

Sigamos el movimiento de determinada parte (o fase) de la onda, tal como la de la posición P de la forma de onda de la figura 4. Si la onda ha de mantener su forma mientras viaja, entonces la coordenada y_p del punto P no debe cambiar. Vemos en la ecuación 2 que el único modo de que pueda suceder esto es que la coordenada x de P aumente mientras aumenta t , de modo que la cantidad $x - vt$ mantenga un valor fijo. Es decir, la evaluación de la cantidad $x - vt$ da el mismo resultado en P de la figura 4b que en P de la figura 4a. Esto continúa así en cualquier posición de la forma de onda y en todos los tiempos t . Entonces para el movimiento de cualquier fase particular de la onda debemos tener

$$x - vt = \text{constante}. \quad (3)$$

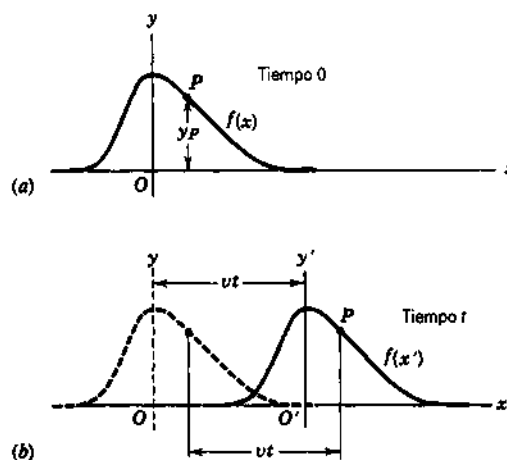


Figura 4 (a) Una pulsación transversal mostrada como una instantánea en el tiempo $t = 0$. El punto P representa una posición particular en la fase del pulso, no un punto particular del medio (la cuerda, por ejemplo). (b) En un tiempo t más tarde, la pulsación se ha movido una distancia vt en la dirección x positiva. El punto P de la fase se ha movido también una distancia vt . El máximo de la pulsación define el origen de la coordenada x' .

Podemos verificar que la ecuación 3 caracteriza al movimiento de la fase de la forma de onda al diferenciar respecto al tiempo, lo cual da

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dx}{dt} = v. \quad (4)$$

La velocidad dx/dt describe al movimiento de la fase de la onda, y por ello se conoce como *velocidad de fase*. Consideramos que v es una constante positiva, independiente de cualquier propiedad de la onda pero posiblemente (como lo veremos) dependiente de las propiedades del medio.

Si la onda se mueve en dirección x negativa, debemos reemplazar a v por $-v$. En este caso, obtendríamos

$$y(x, t) = f(x + vt), \quad (5)$$

donde una vez más $f(x)$ representa a la forma en $t = 0$. Esto es, al sustituir en $f(x)$ la cantidad $x + vt$ en lugar de x nos da una onda que se movería hacia la izquierda en la figura 4. El movimiento de cualquier fase de la onda estaría entonces caracterizado por el requisito de que $x + vt = \text{constante}$, y por analogía con la ecuación 4 podemos demostrar que $dx/dt = -v$, indicando que la componente x de la velocidad de fase es realmente negativa en este caso.

La función $y(x, t)$ contiene la descripción completa de la forma de la onda y de su movimiento. En cualquier tiempo determinado, digamos t_1 , la función $y(x, t_1)$ da a y en función de x , lo cual define a una curva; esta curva representa la forma real de la cuerda en ese tiempo y puede considerarse como una "instantánea" de la onda. Por otra

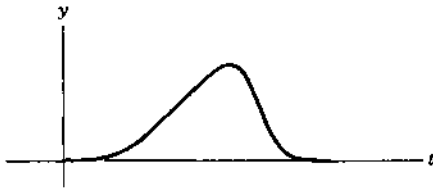


Figura 5 Un observador estacionado en un punto particular sobre el eje x registraría este desplazamiento y en función del tiempo t en el transcurso de la pulsación de la figura 4. Nótese que la forma parece estar invertida, porque el borde delantero de la pulsación viajera llega al observador en los primeros momentos. Es decir, los desplazamientos registrados por el observador en los primeros momentos están aquí más cerca del origen.

parte, podemos tener en cuenta el movimiento de un punto particular sobre la cuerda, digamos en la coordenada fija x_1 . La función $y(x, t)$ nos da entonces la coordenada y de ese punto en función del tiempo. La figura 5 muestra cómo podría moverse un punto sobre el eje x con el tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4, moviéndose en dirección x positiva. En los tiempos cercanos a $t = 0$, el punto no se mueve en absoluto. Luego, comienza a moverse gradualmente a medida que llega al borde delantero de la pulsación de la figura 4. Después de pasar el máximo de la onda, el desplazamiento del punto cae rápidamente hasta regresar a cero al pasar el borde de salida.

Ondas sinusoidales

La descripción anterior es bastante general. Es válida para formas de onda arbitrarias, y se cumple tanto para ondas transversales como longitudinales. Por ejemplo, consideremos una forma de onda transversal que tenga una forma sinusoidal, lo cual tiene aplicaciones particularmente importantes. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ tenemos un tren de ondas a lo largo de la cuerda dado por

$$y(x, 0) = y_m \text{ sen } \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (6)$$

En la figura 6 se muestra la forma de onda. El desplazamiento máximo y_m se llama *amplitud* de la curva seno. El desplazamiento transversal y tiene el mismo valor en cualquier x , como también en $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. El símbolo λ representa la *longitud de onda* del tren de ondas e indica la distancia entre dos puntos adyacentes de la onda que tengan la misma fase. Si la onda viaja en dirección $+x$ con velocidad de fase v , entonces la ecuación de la onda es

$$y(x, t) = y_m \text{ sen } \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt). \quad (7)$$

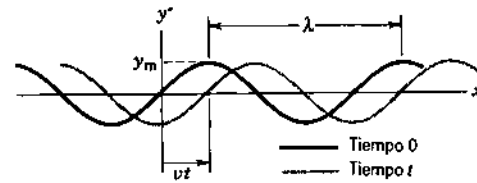


Figura 6 En $t = 0$ (en tono más intenso), la cuerda tiene la forma sinusoidal dada por $y = y_m \text{ sen } 2\pi x/\lambda$. En un tiempo t más tarde (en tono más claro), la onda se ha movido hacia la derecha una distancia $x = vt$, y la cuerda tiene una forma dada por $y = y_m \text{ sen } 2\pi(x - vt)/\lambda$.

Nótese que ésta tiene la forma $f(x - vt)$, necesaria para una onda viajera (Ec. 2).

El *periodo* T de la onda es el tiempo necesario para que un punto en cualquier coordenada x efectúe un ciclo completo de movimiento transversal. Durante este tiempo T , la onda viaja una distancia vT que debe corresponder a una longitud de onda λ , de modo que

$$\lambda = vT. \quad (8)$$

El inverso del periodo se llama *frecuencia* ν de la onda; $\nu = 1/T$. La frecuencia tiene unidades de ciclos por segundo, o hertz (Hz). El periodo y la frecuencia son dos temas tratados previamente en el capítulo 15.

Poniendo la ecuación 8 en la ecuación 7, obtenemos otra expresión para la onda:

$$y(x, t) = y_m \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right). \quad (9)$$

Según esta forma es claro que y , en cualquier tiempo dado, tiene el mismo valor en x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente, y que y , en cualquier posición dada, tiene el mismo valor en los tiempos t , $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

Para reducir la ecuación 9 a una forma más compacta, introducimos dos cantidades, el *número de onda* k y la *frecuencia angular* ω . Éstas se definen por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (10)$$

El número de onda k es, al igual que ω , una cantidad angular, y las unidades de ambos implican radianes. Las unidades de k podrían ser, por ejemplo, rad/m, y de ω , rad/s. En términos de estas cantidades, la ecuación de una onda seno que viaje en dirección x positiva (hacia la derecha en la Fig. 6) es

$$y(x, t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t). \quad (11)$$

La ecuación de una onda seno que viaje en dirección x negativa (hacia la izquierda en la Fig. 6) es

$$y(x, t) = y_m \text{ sen } (kx + \omega t). \quad (12)$$

Al comparar las ecuaciones 8 y 10, vemos que la velocidad de fase v de la onda está dada por

$$v = \lambda v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (13)$$

Fase y constante de fase

En las ondas viajeras de las ecuaciones 11 y 12 hemos supuesto que el desplazamiento y es cero en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Esto, por supuesto, no tiene que ser aquí así. La expresión general para una onda sinusoidal que viaje en dirección x positiva es

$$y(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi). \quad (14)$$

La cantidad que aparece en el argumento del seno, es decir, $kx - \omega t - \phi$, se llama *fase* de la onda. Se dice que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieran en cualquier múltiplo entero de 2π) están "en fase"; ejecutan el mismo movimiento en el mismo tiempo.

El ángulo ϕ se llama la *constante de fase*. La constante de fase no afecta a la forma de la onda; mueve a la onda hacia adelante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo. Para ver esto, reescribiremos la ecuación 14 en dos formas equivalentes:

$$y(x,t) = y_m \text{sen} \left[k \left(x - \frac{\phi}{k} \right) - \omega t \right] \quad (15a)$$

o

$$y(x,t) = y_m \text{sen} \left[kx - \omega \left(t + \frac{\phi}{\omega} \right) \right]. \quad (15b)$$

La figura 7a muestra una "instantánea" en cualquier tiempo t de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 (donde $\phi = 0$) y 14. Nótese que cualquier punto en particular de la onda descrita por la ecuación 15a (digamos, cierta cresta de onda) está a una distancia ϕ/k adelante del punto correspondiente de la onda descrita por la ecuación 11.

En forma equivalente, si observáramos el desplazamiento en una posición fija x resultante de cada una de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 y 14, obtendríamos el resultado indicado por la figura 7b. La onda descrita por la ecuación 15b está similarmente adelante de la onda que tiene a $\phi = 0$, en este caso por una diferencia de tiempo ϕ/ω .

Cuando la constante de fase de la ecuación 14 es positiva, la onda correspondiente está adelante de una onda descrita por una ecuación similar que tiene a $\phi = 0$. Por esta razón, introdujimos a la constante de fase con signo negativo en la ecuación 14. Cuando una onda está adelante de otra en el tiempo o en el espacio, se dice que es la "guía". En cambio, al poner una constante de fase negativa en la ecuación 14, se mueve la onda correspondiente

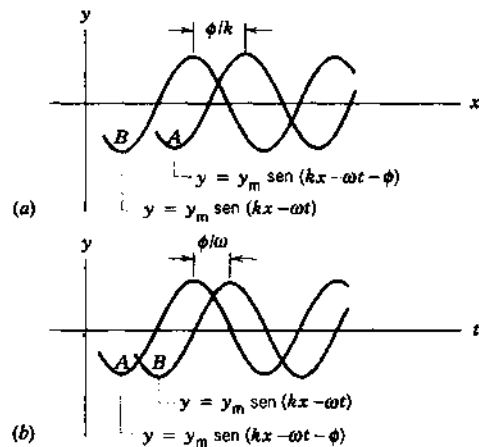


Figura 7 (a) Instantánea de dos ondas seno que viajan en dirección x positiva. La onda A tiene una constante de fase ϕ , y la onda B tiene a $\phi = 0$. La onda A está a una distancia ϕ/k adelante de la onda B. (b) Movimiento de un punto en el tiempo debido a las mismas dos ondas. La onda A está un tiempo ϕ/ω adelante de la onda B. Nótese que, en una gráfica de y contra t , "adelante de" significa "a la izquierda de", mientras que en una gráfica de y contra x , "adelante de" significa "a la derecha de", si las ondas viajan en dirección x positiva.

detrás de la otra que tenga $\phi = 0$; tal onda se dice que es la "rezagada".

Si fijamos nuestra atención en un punto en particular de la cuerda, digamos x_1 , el desplazamiento y en ese punto puede expresarse:

$$y(t) = -y_m \text{sen}(\omega t + \phi'),$$

donde hemos sustituido una constante de fase nueva $\phi' = \phi - kx_1$. Esta expresión de $y(t)$ es similar a la ecuación 6 del capítulo 15 para el movimiento armónico simple. De aquí que cualquier elemento particular de la cuerda experimente un movimiento armónico simple con respecto a su posición de equilibrio al viajar este tren de ondas a lo largo de la cuerda.

Velocidad de grupo y dispersión

Las ondas sinusoidales puras son elementos matemáticos útiles para ayudarnos a entender el movimiento ondulatorio. En la práctica, usamos otras clases de ondas para transportar energía e información. Estas ondas pueden ser periódicas pero no sinusoidales, tales como las ondas cuadradas o las de "diente de sierra", o pueden ser pulsaciones no periódicas, como las de la figura 4.

Hemos usado la velocidad de fase para describir el movimiento de dos clases de ondas: la onda pulsátil, que conserva su forma al viajar (Fig. 4) y la onda seno pura

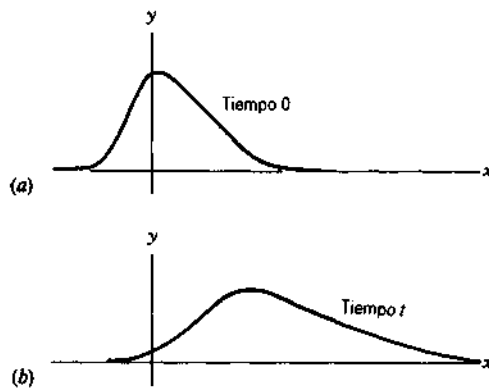


Figura 8 En un medio dispersivo, la forma de onda cambia al viajar la onda.

(Fig. 6). En otros casos, debemos usar una velocidad diferente, llamada la *velocidad de grupo*, que es la velocidad a la cual viaja la energía o la información en una onda real.

La figura 8 muestra una pulsación que viaja a través de un medio. La forma de la pulsación cambia al viajar; la pulsación se esparce, o *dispersa*. (Dispersión no es lo mismo que disipación de energía. El contenido de energía de la pulsación de la figura 8 puede permanecer constante mientras viaja, aunque la pulsación se disperse. Suponemos que el medio es *dispersivo*, pero no necesariamente *disipativo*.) Como veremos en la sección 19-7, cualquier onda periódica puede ser considerada como la suma o superposición de una serie de ondas sinusoidales de frecuencias diferentes o de longitudes de onda diferentes. Las frecuencias, amplitudes, y fases de las ondas sinusoidales componentes deben elegirse con cuidado de acuerdo con un procedimiento matemático, conocido como *análisis de Fourier*, de modo que las ondas se sumen para dar la forma de onda deseada. En muchos medios reales, la velocidad de propagación de estas ondas componentes (es decir, la velocidad de fase) depende de la frecuencia o de la longitud de onda de la componente en particular. Cada onda componente puede viajar con su velocidad propia. Entonces, al viajar la onda, las relaciones de fase de las componentes pueden cambiar, y la forma de onda de la suma de las componentes cambiaría de manera correspondiente al viajar la onda. Éste es el origen de la dispersión: las ondas componentes viajan a velocidades de fase diferentes. No existe una relación sencilla entre las velocidades de fase de las componentes y la velocidad de grupo de la onda; la relación depende de la dispersión del medio.

Ciertos medios reales son no dispersivos aproximadamente, en cuyo caso la onda mantiene su forma, y todas las ondas componentes viajan con la misma velocidad. Un ejemplo son las ondas sonoras en el aire. Si el aire fuese fuertemente dispersivo de las ondas sonoras, la conversa-

ción sería imposible, porque la forma de onda producida por las cuerdas vocales de quien habla confundiría siendo irreconocible al momento en que llegase a nuestros oídos. Además, el esmero que ponen los miembros de una orquesta por tocar precisamente al mismo tiempo no tendría ningún valor, porque (si el aire fuese dispersivo del sonido) las notas de alta frecuencia viajarían hasta el oído del oyente a una velocidad diferente de la de las notas de baja frecuencia, y el oyente escucharía los sonidos en tiempos diferentes. Por fortuna, esto no ocurre con las ondas sonoras. Las ondas de la luz en el vacío son perfectamente no dispersivas; la dispersión de las ondas de luz en medios reales es la causa de efectos tales como el espectro de colores del arcoiris.

En un medio no dispersivo, todas las ondas componentes de una forma de onda compleja viajan a la misma velocidad de fase, y la velocidad de grupo de la forma de onda es igual a ese valor común de la velocidad de fase. Únicamente en este caso podemos hablar de la velocidad de fase de la forma de onda entera. En este capítulo tratamos de las ondas mecánicas que se propagan en medios no dispersivos.

19-4 VELOCIDAD DE ONDA

La velocidad de onda, lo que aquí significa la velocidad de fase de una onda sinusoidal o la velocidad de grupo de una pulsación en un medio no dispersivo, no depende de la frecuencia o de la longitud de onda. Es posible calcular la velocidad de una onda mecánica a partir de las propiedades del medio aplicando los principios básicos de la mecánica newtoniana. En esta sección continuaremos centrandó nuestra atención en las ondas transversales de una cuerda en tensión, y en la sección siguiente mostraremos cómo calcular la velocidad de tales ondas de la manera más general. Los cálculos de la velocidad de otras ondas, por ejemplo las ondas sonoras en el aire, siguen métodos similares.

Aquí consideraremos dos enfoques: un tratamiento basado en el análisis dimensional y un análisis mecánico un poco menos general por medio del cual calcularemos la velocidad de una pulsación transversal a lo largo de una cuerda tensa.

Análisis dimensional

La velocidad de las ondas de una cuerda musical depende de la masa de un elemento de la cuerda y de la fuerza entre elementos vecinos, la cual es la tensión F con la que se estira la cuerda. Si aumentamos la tensión (como al ajustar las clavijas de una cuerda de guitarra), la fuerza entre elementos vecinos aumentará, y podemos esperar que la

velocidad de la onda aumente también. Caracterizaremos a la masa de un elemento de la cuerda en términos de la densidad de masa lineal μ , la masa por unidad de longitud de la cuerda. Suponiendo que la velocidad de onda v dependa únicamente de F y de μ , podemos usar el método del análisis dimensional (véase la sección 1-7) y escribir

$$v \propto F^a \mu^b,$$

donde a y b son exponentes por determinarse a partir del análisis dimensional. En términos de las dimensiones de masa M , longitud L , y tiempo T , esto puede expresarse como:

$$[v] = [F^a][\mu^b]$$

$$LT^{-1} = (MLT^{-2})^a(ML^{-1})^b,$$

y resolviendo por igualación de las potencias correspondientes de M , L , y T se obtiene $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$. Así, $v \propto \sqrt{F/\mu}$, o, introduciendo una constante de proporcionalidad C ,

$$v = C \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (16)$$

Lo más que podemos decir de este análisis es que la velocidad de la onda es igual a una constante sin dimensiones multiplicada por $\sqrt{F/\mu}$. El valor de la constante puede obtenerse de un análisis mecánico del problema o por medio de la experimentación. Estos métodos demuestran que la constante es igual a la unidad.

Análisis mecánico

Derivemos ahora por medio de un análisis mecánico una expresión para la velocidad de una pulsación en una cuerda tensa. En la figura 9 se muestra una "instantánea" de una pulsación de onda que se mueve de izquierda a derecha en la cuerda con una velocidad v . Podemos imaginar en su lugar que toda la cuerda se mueve de derecha a izquierda con esta misma velocidad, de modo que la pulsación de la onda permanece fija en el espacio (quizás metiendo a la cuerda en un tubo carente de fricción que tenga la forma deseada de la pulsación). Esto significa simplemente que, en lugar de considerar que nuestro marco de referencia sean las paredes entre las que se estira la cuerda, escogemos un marco de referencia que esté en movimiento uniforme con respecto a aquél. En efecto, observamos a la pulsación mientras corremos a lo largo de la cuerda con la misma velocidad que la pulsación. Puesto que las leyes de Newton implican sólo aceleraciones, las cuales son iguales en ambos marcos, podemos emplearlas en cualquiera de los marcos. Nos inclinamos, entonces, por el marco que para nosotros resulta más conveniente.

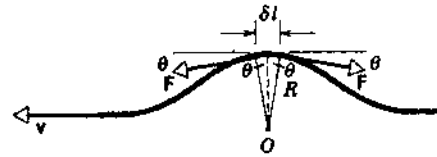


Figura 9 Una pulsación que se mueva hacia la derecha en una cuerda estacionaria es equivalente a una pulsación en posición fija en una cuerda que se mueva hacia la izquierda. Consideramos las fuerzas en una sección de cuerda de longitud δl en la pulsación "fija".

Consideremos a una pequeña sección de la pulsación de longitud δl , como se muestra en la figura 9. Esta sección forma aproximadamente un arco de círculo de radio R . La masa δm de este elemento es $\mu \delta l$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. La tensión F en la cuerda es un tirón tangencial en cada extremo de este pequeño segmento de la cuerda. Las componentes horizontales de F se cancelan, y las componentes verticales son cada una igual a $F \sin \theta$. De aquí que la fuerza vertical total F_{\perp} sea $2F \sin \theta$. Debido a que θ es pequeño, podemos considerar que $\sin \theta \approx \theta$. Partiendo de la figura 9, vemos que $2\theta = \delta l/R$, y así obtenemos

$$F_{\perp} = 2F \sin \theta \approx 2F\theta = F \frac{\delta l}{R}. \quad (17)$$

Esto da la fuerza que suministra la aceleración centrípeta de las partículas de cuerda dirigidas hacia O . La fuerza centrípeta que actúa sobre una masa δm ($= \mu \delta l$) que se mueve en círculo de radio R a velocidad v es $\delta m v^2/R$. Nótese que la velocidad tangencial v de este elemento de masa a lo largo de la parte superior del arco es horizontal y de magnitud igual a la velocidad de la onda. Igualando la fuerza vertical neta sobre el elemento, ecuación 17, con la fuerza centrípeta necesaria, obtenemos

$$F_{\perp} = \frac{\delta m v^2}{R}$$

o bien

$$F \frac{\delta l}{R} = \frac{\mu \delta l v^2}{R}$$

por lo que

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (18)$$

La ecuación 18 muestra, a partir de un análisis mecánico, que la constante C en la ecuación 16 tiene el valor 1.

Si la amplitud de la pulsación fuese muy grande en comparación con la longitud de la cuerda, no habríamos tenido la posibilidad de usar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. Además, la tensión F de la cuerda cambiaría por la presencia de la pulsación, mientras que hemos supuesto que

F no cambia a partir de la tensión original de la cuerda estirada. Por lo tanto, nuestro resultado cumple únicamente para desplazamientos transversales de la cuerda relativamente pequeños, un caso que es ampliamente aplicable en la práctica.

Una onda periódica que entra en un medio suele ser consecuencia de una influencia externa que perturba al medio a una cierta frecuencia. La onda que viaja a través de ese medio tendrá la misma frecuencia que la fuente de la onda. La velocidad de la onda está determinada por las propiedades del medio. Dadas la frecuencia ν de la onda y su velocidad v en el medio, la longitud de onda de la onda periódica en ese medio se determina por la ecuación 13, $\lambda = v/\nu$. Cuando una onda pasa de un medio a otro de velocidad de onda diferente (por ejemplo, dos cuerdas con densidades de masa lineal diferentes), la frecuencia en un medio debe ser la misma que la frecuencia en el otro. (De otro modo existiría una discontinuidad en el punto en que se junten las dos cuerdas.) Sin embargo, las longitudes de onda diferirán una de otra. La relación entre las longitudes de onda se deduce de la igualdad de las frecuencias ν_1 y ν_2 en los dos medios; es decir, $\nu_1 = \nu_2$ da

$$\frac{\nu_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_2}{\lambda_2} \quad (19)$$

Velocidad transversal de una partícula

El movimiento de una partícula en una onda transversal como la de la figura 6 es en dirección y . La velocidad de la onda describe el movimiento de la onda a lo largo de la dirección de viaje (la dirección x). La velocidad de la onda no caracteriza el movimiento transversal de las partículas de la cuerda.

Para hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda necesitamos el cambio en la coordenada y con el tiempo. Así, centramos nuestra atención en una partícula aislada de la cuerda, es decir, en cierta coordenada x . Por lo tanto, necesitaremos la derivada de y con respecto a t siendo x constante. Esto se representa por el símbolo $\partial y/\partial t$, el cual indica la *derivada parcial* de y con respecto a t , manteniendo constantes a todas las demás variables de las que pueda depender y . Representamos a la velocidad de la partícula, la cual varía tanto con x (la posición de la partícula) como con t , con la expresión $u(x,t)$. Suponiendo que tenemos una onda sinusoidal de la forma de la ecuación 14, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [y_m \sin(kx - \omega t - \phi)] \\ &= -y_m \omega \cos(kx - \omega t - \phi). \end{aligned} \quad (20)$$

Continuando de esta manera, podemos hallar la aceleración transversal de la partícula en esta posición de x de acuerdo con

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t - \phi) \\ &= -\omega^2 y. \end{aligned} \quad (21)$$

La ecuación 21 tiene la misma forma que la ecuación 5 del capítulo 15; la aceleración transversal de cualquier punto es proporcional a su desplazamiento transversal, pero dirigida en sentido opuesto. Esto demuestra que cada partícula de la cuerda experimenta un movimiento armónico simple transversal al pasar la onda sinusoidal.

Problema muestra 1 En un extremo de una cuerda horizontal larga se genera una onda sinusoidal transversal por medio de una barra que mueve al extremo de arriba a abajo en una distancia de 1.30 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 125 veces por segundo. (a) Si la cuerda tiene una densidad lineal de 0.251 kg/m y se mantiene sometida a una tensión de 96 N, halle la amplitud, la frecuencia, la velocidad, y la longitud de onda del movimiento de la onda. (b) Suponiendo que la onda se mueva en dirección $+x$ y que, en $t = 0$, el elemento de la cuerda en $x = 0$ esté en su posición de equilibrio $y = 0$ y moviéndose hacia abajo, halle la ecuación de la onda.

Solución (a) Al moverse la barra un total de 1.30 cm, el extremo de la cuerda se mueve $\frac{1}{2}(1.30 \text{ cm}) = 0.65 \text{ cm}$ fuera de su posición de equilibrio, primero sobre ella, luego bajo ella; por lo tanto, la amplitud y_m es 0.65 cm.

El movimiento íntegro se repite 125 veces cada segundo, y entonces la frecuencia es de 125 vibraciones por segundo, o $\nu = 125 \text{ Hz}$.

La velocidad de la onda está dada por la ecuación 18,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{96 \text{ N}}{0.251 \text{ kg/m}}} = 19.6 \text{ m/s}.$$

La longitud de onda está dada por $\lambda = v/\nu$, de modo que

$$\lambda = \frac{19.6 \text{ m/s}}{125 \text{ Hz}} = 0.156 \text{ m} = 15.6 \text{ cm}.$$

(b) La expresión general para una onda sinusoidal transversal que se mueve en la dirección $+x$ está dada por la ecuación 14,

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi).$$

Imponiendo las condiciones iniciales dadas ($y = 0$ y $\partial y/\partial t < 0$ para $x = 0$ y $t = 0$) tenemos

$$y_m \sin(-\phi) = 0 \quad \text{y} \quad -y_m \omega \cos(-\phi) < 0,$$

lo cual significa que puede considerarse que la constante de fase ϕ es cero (o cualquier entero múltiplo de 2π). De aquí que, para esta onda,

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t),$$

y con los valores que acabamos de hallar,

$$y_m = 0.65 \text{ cm},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.156 \text{ m}} = 40.3 \text{ rad/m} = 0.403 \text{ rad/cm},$$

$$\omega = \nu k = (125 \text{ Hz})(40.3 \text{ rad/m}) = 789 \text{ rad/s},$$

obtenemos como ecuación de la onda

$$y(x,t) = 0.65 \text{ sen } (0.403x - 789t),$$

donde x y y están en centímetros y t está en segundos.

Problema muestra 2 Cuando la onda del problema muestra 1 pasa a lo largo de la cuerda, cada partícula de la cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo en ángulo recto con la dirección del movimiento de la onda. (a) Halle expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula P situada en $x_p = 0.245$ m. (b) Evalúe el desplazamiento transversal, la velocidad, y la aceleración de esta partícula en $t = 1.5$ s.

Solución (a) Para una partícula en $x_p = 0.245$ m = 24.5 cm en la onda del problema muestra 1, obtenemos, usando la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$\begin{aligned} u(x_p,t) &= -(0.65)(789) \cos [(0.403)(24.5) - 789t] \\ &= -513 \cos (9.87 - 789t), \end{aligned}$$

donde u está en cm/s y t está en segundos. De modo similar, usando la ecuación 21, hallamos que la aceleración es

$$\begin{aligned} a(x_p,t) &= -(0.65)(789)^2 \text{ sen } (9.87 - 789t) \\ &= -(4.05 \times 10^5) \text{ sen } (9.87 - 789t), \end{aligned}$$

donde a está en cm/s^2 .

(b) En $t = 1.5$ s, evaluamos las expresiones para y , u , y a para dar

$$y = +0.63 \text{ cm}, \quad u = -125 \text{ cm/s}, \quad a = -3.93 \times 10^5 \text{ cm/s}^2.$$

Es decir, la partícula está cerca de su desplazamiento positivo máximo, se mueve en dirección y negativa (alejándose de ese máximo), y está acelerando en dirección y negativa (su velocidad está creciendo en magnitud al moverse la partícula hacia su posición de equilibrio).

19-5 LA ECUACIÓN DE LA ONDA (Opcional)

En el capítulo 15 hemos tratado el fenómeno de la oscilación que comúnmente encontramos. Una razón de que este fenómeno sea tan común es que la ecuación básica que describe a un sistema oscilatorio [$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, ecuación 6 del capítulo 15] es una solución de la ecuación 5 del capítulo 15,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x,$$

que es una ecuación de una forma general que puede derivarse a partir de un análisis mecánico de una variedad de situaciones físicas, alguna de las cuales se trataron en la sección 15-5.

La situación es similar en el caso del movimiento ondulatorio. Como lo demostramos en esta sección, el análisis mecánico da una ecuación de otra forma encontrada comúnmente, cuya solución es una onda de la forma dada por la ecuación 2 o por la ecuación 5.

La figura 10 muestra un elemento de una cuerda larga que sometido a una tensión F . El tránsito de una onda ha provocado que el elemento sea desplazado de su posición de equilibrio en $y = 0$. Consideramos al elemento de la cuerda de longitud δx , y

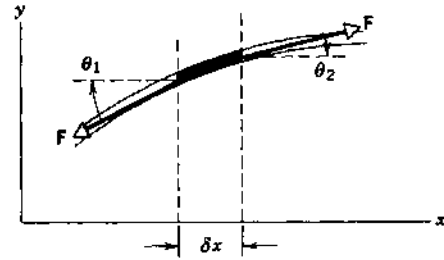


Figura 10 Un pequeño elemento de longitud δx de una cuerda larga en tensión F . La figura representa una instantánea del elemento en un tiempo en particular durante el tránsito de una onda.

aplicamos la segunda ley de Newton para analizar cómo se mueve este elemento.

Sobre el elemento actúan dos fuerzas ejercidas por las partes de la cuerda a cada lado del elemento. Estas fuerzas tienen magnitudes iguales, porque la tensión está distribuida uniformemente a lo largo de la cuerda, pero tienen direcciones ligeramente distintas, porque actúan tangentes a la cuerda en los puntos extremos del elemento. La fuerza neta en la dirección y es

$$F_y = F \text{ sen } \theta_2 - F \text{ sen } \theta_1.$$

Consideramos únicamente desplazamientos pequeños a partir del equilibrio, de modo que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños, y podemos escribir que $\text{sen } \theta \approx \tan \theta$, lo cual da

$$F_y \approx F \tan \theta_2 - F \tan \theta_1 = F \delta(\tan \theta), \quad (22)$$

donde $\delta(\tan \theta) = \tan \theta_2 - \tan \theta_1$. Esta fuerza resultante debe ser igual a la masa del elemento, $\delta m = \mu \delta x$, multiplicada por la componente y de la aceleración. Despreciando la fuerza de fricción y otras fuerzas disipativas, hallamos que la segunda ley de Newton da

$$F_y = \delta m a_y,$$

$$F \delta(\tan \theta) = \mu \delta x a_y,$$

$$\frac{\delta(\tan \theta)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} a_y.$$

Para la componente y de la aceleración a_y , usamos la aceleración transversal de una partícula, $\partial^2 y / \partial t^2$. También, reemplazamos a $\tan \theta$, que es la pendiente de la cuerda, por la derivada parcial equivalente $\partial y / \partial x$. Haciendo estas sustituciones, obtenemos

$$\frac{\delta(\partial y / \partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Consideremos ahora el límite de la ecuación 23 cuando el elemento de masa se vuelve muy pequeño. El lado izquierdo está en la forma normal para expresar la derivada respecto a x como un límite:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\partial y / \partial x)}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

y el resultado final es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (24)$$

Reemplazando a μ/F por $1/v^2$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (25)$$

La ecuación 25 es la forma general de la ecuación que describe a las ondas: la segunda derivada del desplazamiento de onda y respecto a la coordenada x en dirección de la propagación es igual a $1/v^2$ multiplicado por la segunda derivada respecto al tiempo. Esta forma general de ecuación se llama *ecuación de onda*. Surge no solamente en la mecánica sino también en otras situaciones. Por ejemplo, como veremos en el capítulo 41, si usamos las ecuaciones del electromagnetismo en lugar de las ecuaciones de la mecánica (las leyes de Newton), obtenemos una ecuación de exactamente la misma forma que la ecuación 25, excepto que el desplazamiento y se sustituye por la intensidad de un campo magnético o eléctrico. La velocidad de propagación v de las ondas electromagnéticas que viajan en un vacío se convierten en la velocidad de la luz c .

Veamos ahora cómo la solución de la ecuación 25 es nuestra fórmula general para una onda viajera, $y(x,t) = f(x \pm vt)$. Hagamos un simple cambio de variable y que z represente a $x \pm vt$, de modo que $y = f(z)$. Entonces, usando repetidamente la regla de la cadena del cálculo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = \pm v \frac{df}{dz} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{d}{dz} \left(\pm v \frac{df}{dz} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2} \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

y se satisface la ecuación 25. Puede demostrarse que *únicamente* las combinaciones $x \pm vt$ en f satisfacen a la ecuación de onda, de modo que todas las ondas viajeras deben tener la forma de la ecuación 2 o de la ecuación 5.

Para expresar estos resultados de otra manera, la ecuación 24, la cual se derivó de las leyes de Newton, representa a una onda viajera únicamente cuando $\mu/F = 1/v^2$. Esta discusión proporciona así una derivación independiente de la ecuación 18 para la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de una cuerda tensada. ■

19-6 POTENCIA E INTENSIDAD EN EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Si, como lo sugiere la figura 1, estuviese usted sacudiendo (y por tanto efectuando un trabajo en) el extremo de una cuerda, un compañero que estuviese en el otro extremo podría extraer la energía resultante (la cual se transporta a lo largo de la cuerda en la forma de la energía potencial y la energía cinética de sus elementos) y usarla para efectuar un trabajo en otro sistema. Tal transporte de energía (y de ímpetu) es, de hecho, uno de los objetivos de producir ondas. En esta sección consideraremos la cantidad de energía que transporta la cuerda.

La figura 11 muestra una instantánea de la onda en los tiempos t y $t + dt$. Un punto de la cuerda con coordenada x tiene en un tiempo t una velocidad transversal u , la cual tiene una componente y únicamente. Esta velocidad, como hemos ya visto en la sección 19-4, *no* se relaciona con la velocidad de fase de la onda, sino que más bien tiene la magnitud dada por la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

para una onda sinusoidal de la forma dada por la ecuación 11.

En la figura 11 se muestra también la fuerza ejercida sobre un elemento de la cuerda por el elemento de su izquierda. La fuerza transmite energía en una cantidad dada por la ecuación 23 del capítulo 7, $P = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = uF_y$.

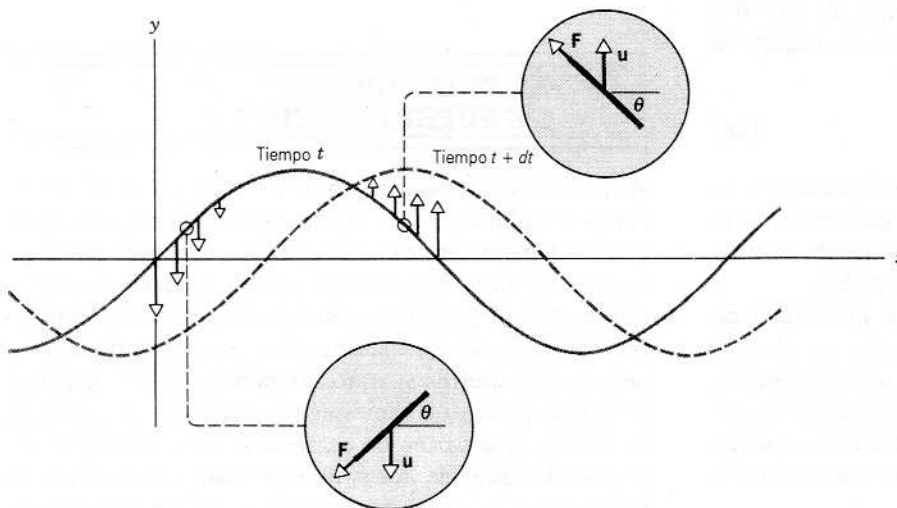


Figura 11 Los vectores en la dirección y muestran el valor de la velocidad instantánea u de diferentes puntos de la cuerda al viajar la onda seno. La línea punteada muestra la onda en un tiempo posterior, cuando las partículas se han movido en la dirección dada por sus vectores de velocidad. Las intercalaciones muestran la fuerza sobre dos elementos diferentes de la cuerda, ejercida por el elemento de su izquierda. Nótese que la potencia instantánea $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ es positiva, sin importar dónde estemos dentro de la fase de la onda.

Únicamente la componente F_y de \mathbf{F} a lo largo de \mathbf{u} contribuye a la potencia; esta componente es $F \sin \theta$, la cual, para pequeños desplazamientos, puede ser aproximada como $F \tan \theta = F \partial y / \partial x$, donde $\partial y / \partial x$ es la pendiente de la cuerda en la coordenada x .

Nótese que la componente y de \mathbf{F} es paralela a \mathbf{u} , sin importar si el elemento de la cuerda se está moviendo hacia arriba o hacia abajo. Así, $uF_y \geq 0$, y por lo tanto la potencia transmitida nunca es negativa durante el ciclo de oscilación. *Existe un flujo neto continuo de energía en dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda).*

Sustituyendo a la componente y de la fuerza, obtenemos

$$\begin{aligned}
 P &= uF_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \left(F \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\
 &= F[-\omega y_m \cos(kx - \omega t)][-ky_m \cos(kx - \omega t)] \\
 &= y_m^2 k \omega F \cos^2(kx - \omega t) \\
 \text{o sea} \quad P &= y_m^2 \mu v \omega^2 \cos^2(kx - \omega t), \quad (26)
 \end{aligned}$$

donde hemos usado $v = F/\mu$ y $v = \omega/k$.

Nótese que la potencia o cantidad de flujo de energía no es constante. Esto se debe a que la potencia de entrada oscila: el trabajo efectuado por la mano que está moviendo el extremo de la cuerda varía con el desplazamiento transversal de ese punto. Cuando se transporta energía a lo largo de la cuerda, la energía se almacena en cada elemento de la cuerda como una combinación de energía cinética y de energía potencial de deformación. Esto es similar al caso del oscilador armónico simple.

A menudo se considera que esta entrada de potencia a la cuerda es el promedio en un periodo del movimiento. La potencia promedio abastecida es de

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^{T} P dt, \quad (27)$$

donde T es el periodo. El valor promedio de $\sin^2 \theta$ o de $\cos^2 \theta$ en un ciclo de $\frac{1}{2}$, y así obtenemos, usando la ecuación 26,

$$\bar{P} = \frac{1}{2} y_m^2 \mu v \omega^2, \quad (28)$$

resultado que no depende de x ni de t . La dependencia de la tasa de transferencia de energía del *cuadrado* de la amplitud de onda y del *cuadrado* de la frecuencia de onda es así, en general, para todos los tipos de ondas.

A menudo es más útil especificar la *intensidad* de la onda en una onda tridimensional, como en el caso de una onda de luz o una onda de sonido que proviene de una fuente puntual. La intensidad I se define como la *potencia promedio por unidad de área transmitida a través de un área A normal a la dirección en que viaja la onda*, es decir,

$$I = \frac{\bar{P}}{A}. \quad (29)$$

Al igual que con la potencia en la onda que viaja a lo largo de la cuerda, la intensidad de cualquier onda es siempre proporcional al cuadrado de la amplitud. (Sin embargo, en ondas circulares o esféricas, la amplitud no es constante al viajar el frente de la onda; véase el problema muestra 3.)

La energía puede disiparse mientras la onda se propaga a través del espacio. La energía mecánica de la onda puede convertirse en energía interna de la cuerda o en energía calorífica transmitida al entorno mediante la fricción interna u otros efectos viscosos. En este capítulo despreciamos tales transformaciones de la energía y suponemos que no se pierde energía mecánica.

Problema muestra 3 Las ondas esféricas viajan a partir de una fuente de ondas cuya potencia de salida, supuesta constante, es P ; véase la figura 12. ¿Cómo depende la intensidad de la onda de la distancia a partir de la fuente?

Solución Suponemos que el medio es isotrópico y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones, es decir, su emisión es simétricamente esférica.

La intensidad de una onda está dada por la ecuación 29. La potencia se distribuye uniformemente sobre cualquier superficie esférica de área $A = 4\pi r^2$, y entonces

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

La intensidad de la onda varía inversamente con el cuadrado de su distancia desde la fuente. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la amplitud de la onda debe variar inversamente con la distancia desde la fuente. Así, por ejemplo, al duplicar la distancia desde una fuente, la amplitud de una onda esférica disminuye a la mitad, y la intensidad es de únicamente la cuarta parte.

19-7 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

A menudo observamos que dos o más ondas viajan en forma simultánea por la misma región del espacio, independientemente entre sí. Por ejemplo, el sonido que llega a nuestros oídos proveniente de una orquesta sinfónica es muy complejo, pero podemos captar el sonido emitido por cada uno de los instrumentos por separado. En las antenas de nuestros aparatos de radio y de TV, los electrones se ponen en movimiento por todo un conjunto de señales que parten de centros de emisión diferentes, y sin embargo podemos sintonizar cualquier estación en particular, y la señal que recibimos de esa estación es,

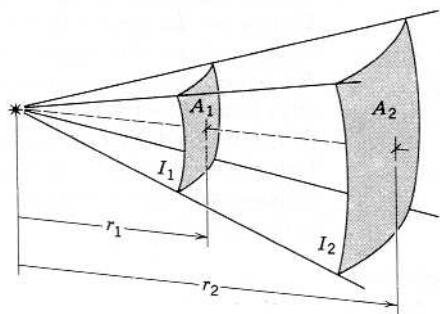


Figura 12 Problema muestra 3.

en principio, la misma que la que recibiríamos si todas las demás estaciones cesaran de emitir.

Los ejemplos anteriores ilustran el *principio de superposición*, que postula que, cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier partícula en un tiempo dado es simplemente la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola. Por ejemplo, supongamos que dos ondas viajen simultáneamente a lo largo de la misma cuerda tensada. Sean $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ los desplazamientos que la cuerda experimentaría si cada onda actuase por separado. El desplazamiento de la cuerda al actuar ambas ondas es, entonces,

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t), \quad (30)$$

siendo algebraica la suma en este caso.

Para las ondas mecánicas en medios elásticos, el principio de superposición es válido cuando la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para las ondas electromagnéticas, el principio de superposición es válido porque los campos eléctricos y magnéticos se relacionan linealmente.

La figura 13 muestra una secuencia de tiempo de "instantáneas" de dos pulsaciones que viajan en direcciones opuestas en la misma cuerda tensada. Cuando las pulsaciones se superponen, el desplazamiento de la cuerda es la suma algebraica de los desplazamientos individuales de la cuerda provocados por cada una de las dos pulsaciones por separado, como lo exige la ecuación 30. Las pulsaciones se mueven simplemente entrecruzándose viajando cada una de ellas a lo largo como si la otra no existiera.

El principio de superposición puede parecer un resultado obvio, pero hay casos en los que éste no se cumple. Supongamos, por ejemplo, que una de las ondas tiene una amplitud tan grande que supera el límite elástico del medio. La fuerza de restitución ya no es directamente proporcional al desplazamiento de una partícula en el medio. Entonces, sin importar cuál sea la amplitud de la segunda onda (incluso si es muy pequeña), su efecto en un punto no es una función lineal de su amplitud. Además,

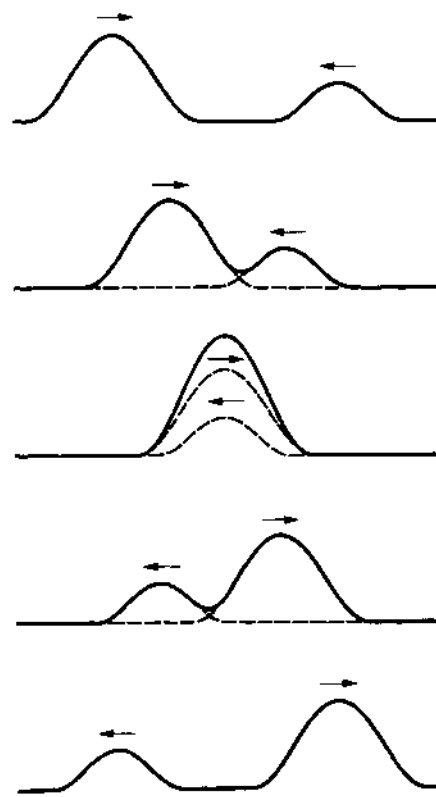


Figura 13 Dos pulsaciones viajan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensada. Se aplica el principio de superposición al entrecruzarse una y otra.

la segunda onda cambiará al pasar a través de la región no lineal, y su comportamiento posterior se alterará. Esta situación surge sólo muy raramente, y en la mayoría de los casos es válido el principio de superposición (como lo suponemos a lo largo de este texto).

Ondas complejas

Cuando dos o más ondas diferentes, que puedan tener diferentes amplitudes y longitudes de onda, se hallan presentes de manera simultánea en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda $y(x,t)$ complejo que no se parezca en absoluto a las ondas que lo componen. Sin embargo, es una forma de onda viajera aceptable.

La figura 14a muestra un ejemplo del caso de dos ondas seno de igual amplitud cuya longitud de onda está en la razón de 3:1. Las ondas viajan en la misma dirección y con la misma velocidad de fase. Están en fase en $x = 0$. La curva más oscura muestra la forma de onda resultante que puede calcularse empleando la ecuación 30. Nótese que no es una onda seno. En la figura 14b, las dos ondas combinadas son idénticas a las de la figura 14a, excepto

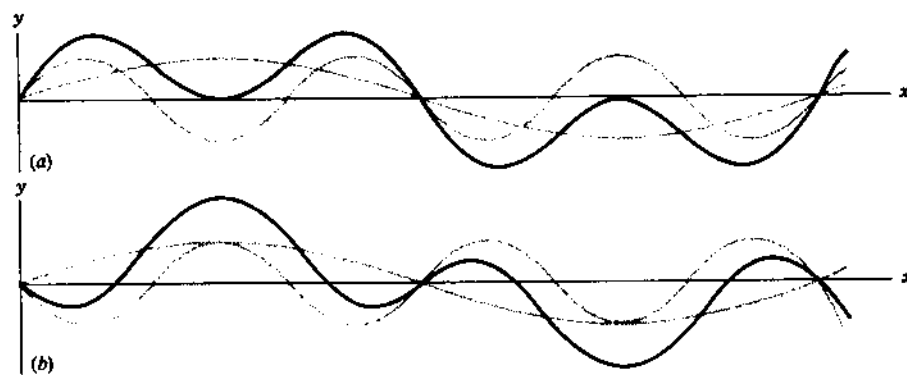


Figura 14 La adición de dos ondas con una razón de longitud de onda de 3:1 (línea más clara) produce una onda cuya forma (línea más intensa) depende de la relación de fase de las dos ondas. Compárense (a) y (b), que muestran relaciones de fase diferentes de las ondas sumadas.

que están 180° fuera de fase en $x = 0$. La forma de onda resultante es bastante diferente de la de la figura 14a.

Al cambiar la designación del eje horizontal en la figura 14 de x a t , tendríamos una representación de la superposición de dos ondas en función del tiempo en un punto en particular. Tal gráfica podría representar, por ejemplo, el movimiento en el tiempo de un punto en particular de una cuerda en respuesta a la combinación de dos ondas.

Análisis de Fourier (Opcional)

Fisicamente, la importancia del principio de superposición es que, cuando es válido, permite analizar un movimiento ondulatorio complicado como una combinación de ondas sencillas. De hecho, como el matemático francés J. Fourier (1768-1830) pudo demostrar que, para construir la forma más general de una onda periódica sólo necesitamos ondas armónicas simples. Fourier demostró que cualquier movimiento periódico de una partícula puede ser representado como una combinación de movimientos armónicos simples. Por ejemplo, si $y(x)$ representa la forma de onda (en un tiempo en particular) de una fuente de ondas que tengan una longitud de onda λ , podemos analizar a $y(x)$ como sigue:

$$y(x) = A_0 + A_1 \text{ sen } kx + A_2 \text{ sen } 2kx + A_3 \text{ sen } 3kx + \dots + B_1 \text{ cos } kx + B_2 \text{ cos } 2kx + B_3 \text{ cos } 3kx + \dots, \quad (31)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. Esta expresión se conoce como serie de Fourier. Los coeficientes A_i y B_i tienen valores definidos para cualquier movimiento periódico $y(x)$ en particular. Por ejemplo, la llamada onda de diente de sierra de la figura 15 puede escribirse

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \text{ sen } kx - \frac{1}{2\pi} \text{ sen } 2kx - \frac{1}{3\pi} \text{ sen } 3kx - \dots$$

Si el movimiento no es periódico, como en el caso de una pulsación, la suma se sustituye por una integral: la integral de Fourier. De aquí que cualquier movimiento (pulsado o continuo) de una fuente de ondas pueda ser representado en términos de una superposición de movimientos armónicos simples, y que cualquier forma de onda así generada pueda ser analizada como una combinación de componentes que son, por separado, ondas armónicas simples. Esto ilustra una vez más la importancia del movimiento armónico y de las ondas armónicas.

La forma de onda mantendrá su forma únicamente al viajar en un medio no dispersivo. En un medio dispersivo, las formas de onda de las ondas sinusoidales componentes no cambian, pero cada una de ellas puede viajar con una velocidad diferente. En este caso, la forma de la onda combinada cambia al alterarse

la relación de fase entre las componentes. La onda puede también cambiar de forma si cede energía mecánica al medio, tal como por la resistencia del aire, la viscosidad, o la fricción interna. Tales fuerzas disipativas dependen a menudo de la velocidad, y así las componentes de Fourier más fuertemente afectadas son aquellas con velocidades más elevadas de la partícula (es decir, aquellas con frecuencias altas, de acuerdo con la ecuación 20, donde se ve que u depende de ω). Aquí, una vez más, la forma de onda puede cambiar, al perder amplitud más rápidamente las componentes con frecuencias más altas. Un ejemplo de este fenómeno es el debilitamiento con el tiempo del sonido de las cuerdas del piano. El movimiento vibratorio de una cuerda de piano, inmediatamente después de haber sido percutida por el martillo, incluye una amplia gama de frecuencias, las cuales le dan su tono característico. Las componentes de más alta frecuencia de este movimiento complejo disipan su energía más rápidamente que las componentes de frecuencia más baja, por lo que el carácter de duración de un tono puede cambiar con el tiempo. ■

19-8 INTERFERENCIA DE ONDAS

Cuando dos o más ondas se combinan en un punto determinado, se dice que *interfieren*, y el fenómeno se conoce como *interferencia*. Como veremos, la forma de onda resultante depende fuertemente de las fases relativas de las ondas que interfieren. La figura 16 muestra un ejemplo de interferencia de ondas.

Consideremos en primer lugar dos ondas sinusoidales transversales de igual amplitud y longitud de onda, que viajan en dirección x con la misma velocidad. Hagamos que la constante de fase de una onda sea ϕ , mientras que la de la otra es $\phi = 0$. La figura 17 muestra la forma de onda combinada en un tiempo para los dos casos de ϕ cercano a 0° (las ondas están prácticamente en fase) y de ϕ cercano a 180° (las ondas están prácticamente fuera de fase). Simplemente sumando los desplazamientos individuales en cada x puede verse que en el primer caso existe un refuerzo casi completo de las dos ondas y la resultante tiene casi el doble de la amplitud de sus componentes individuales, mientras que en el segundo caso existe una cancelación casi completa en cada punto y la

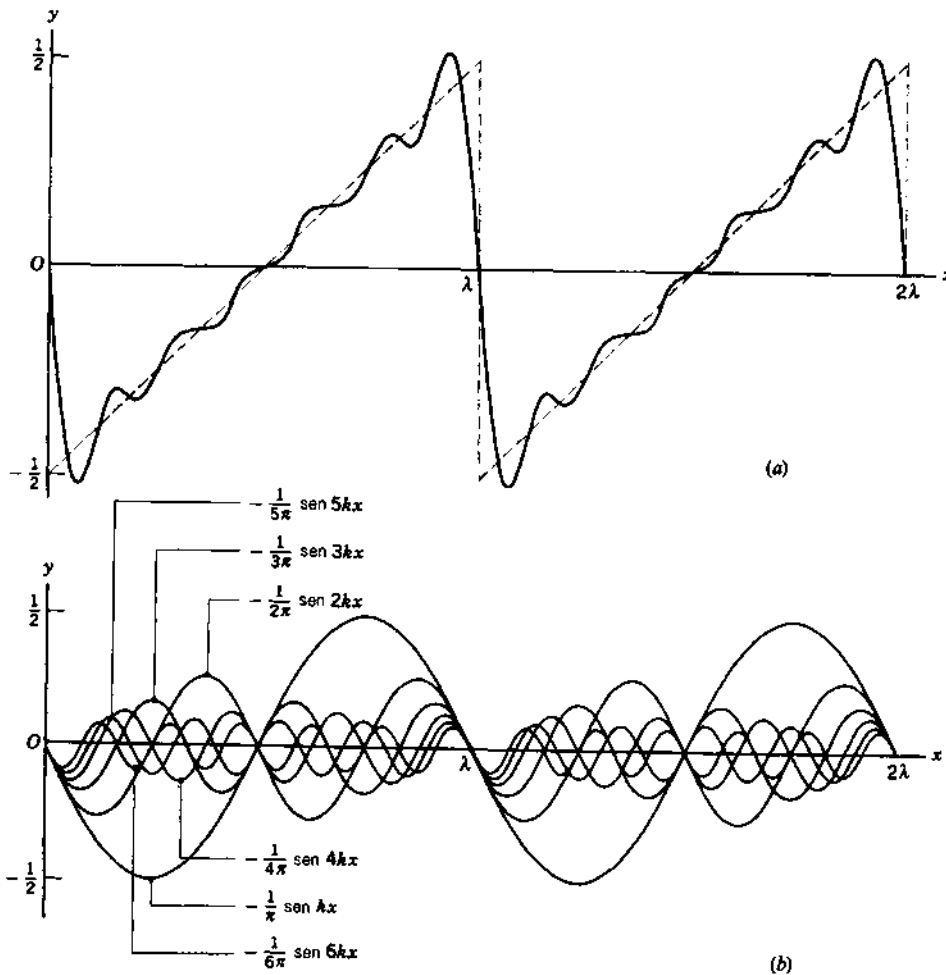


Figura 15 (a) La línea punteada es una onda de diente de sierra muy común en electrónica. Puede representarse por medio de una serie de Fourier de ondas seno. (b) Se muestran las primeras seis ondas seno de la serie de Fourier que representan a la onda de diente de sierra, y su suma se muestra en la parte (a) por medio de una curva de línea continua. Al incluir más términos, la serie de Fourier resulta una mejor aproximación de la onda.

amplitud resultante está cerca de cero. Estos casos se conocen, respectivamente, como *interferencia constructiva* e *interferencia destructiva*.

Veamos cómo surge la interferencia de las ecuaciones de las ondas. Consideremos un caso general en el que las dos ondas tengan constantes de fase ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente. Las ecuaciones de las dos ondas son

$$y_1(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi_1) \quad (32)$$

y

$$y_2(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi_2). \quad (33)$$

Hallemos ahora la onda resultante. Usando el principio de superposición, tomamos la suma de las ecuaciones 32 y 33, lo cual da

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m [\text{sen}(kx - \omega t - \phi_1) + \text{sen}(kx - \omega t - \phi_2)]. \end{aligned} \quad (34)$$

Partiendo de la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos,

$$\text{sen } B + \text{sen } C = 2 \text{sen } \frac{1}{2}(B + C) \cos \frac{1}{2}(B - C), \quad (35)$$

obtenemos, después de cierto manejo,

$$y(x,t) = [2y_m \cos(\Delta\phi/2)] \text{sen}(kx - \omega t - \phi'), \quad (36)$$

donde $\phi' = (\phi_1 + \phi_2)/2$. La cantidad $\Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ se llama *diferencia de fase* entre las dos ondas.

Esta onda resultante corresponde a una nueva onda que tiene la misma frecuencia pero una amplitud $2y_m |\cos(\Delta\phi/2)|$. Si $\Delta\phi$ es muy pequeño (comparado con 180°), la amplitud resultante es casi $2y_m$ (como se muestra en la Fig. 17a). Cuando $\Delta\phi$ es cero, las dos ondas tienen la misma fase en cualquier parte. La cresta de una cae sobre la cresta de la otra y de igual modo los valles, lo cual da una interferencia constructiva total. La amplitud resultante es precisamente del doble de la de cualquier onda aislada. Si, en cambio, $\Delta\phi$ está cerca de 180° , la amplitud resultante es de casi cero (como se muestra en la figura 17b). Cuando $\Delta\phi$ es exactamente 180° , la cresta de una onda cae exactamente sobre el valle de la otra. La amplitud resultante es cero, correspondiente a la interferencia destructiva total.

Obsérvese que la ecuación 36 tiene siempre la forma de una onda sinusoidal. Así, al sumar dos ondas seno de la misma longitud de onda y amplitud se obtiene siempre una onda seno de longitud de onda idéntica. Podemos

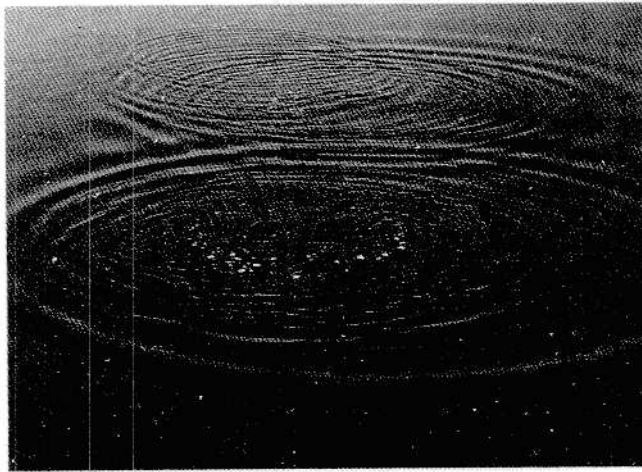


Figura 16 Dos trenes de ondas, en este caso rizados circulares de dos perturbaciones diferentes, interfieren al superponerse en puntos particulares. El desplazamiento en cualquier punto es la superposición de los desplazamientos por separado debidos a cada una de las dos ondas.

también sumar componentes que tengan la misma longitud de onda pero amplitudes diferentes. En este caso, la resultante es nuevamente una onda seno con idéntica longitud de onda, pero la amplitud resultante no tiene la forma simple dada por la ecuación 36. Si las amplitudes

individuales son y_{1m} y y_{2m} , y, por lo tanto, las ondas están en fase ($\Delta\phi = 0$) la amplitud resultante es $y_{1m} + y_{2m}$ (Fig. 18), mientras que si están fuera de fase ($\phi = 180^\circ$), la amplitud resultante es $|y_{1m} - y_{2m}|$. En este caso, no puede existir una interferencia destructiva completa, aunque exista una interferencia destructiva parcial.

La figura 19 muestra un ejemplo de la presencia de los efectos de interferencia. Los altoparlantes funcionan por una misma fuente. En puntos equidistantes de las bocinas (sobre la línea AB , la cual representa a todo el plano medio), existe interferencia constructiva completa si las bocinas se accionan en fase ($\Delta\phi = 0$). Existen también otros puntos P a donde las ondas llegan en fase e interfieren constructivamente. Es decir, se puede desplazar una de las ondas de la figura 18 en una constante de fase de cualquier múltiplo entero de 2π (o en una distancia de cualquier número entero de longitudes de onda), y la forma de la onda combinada no cambia. Estos otros puntos de interferencia constructiva se localizan siempre donde la diferencia de la distancia desde las dos bocinas es un número entero de longitudes de onda:

$$|x_1 - x_2| = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots \quad (37)$$

En otros puntos P , las distancias diferentes x_1 y x_2 dan por resultado ondas que posiblemente lleguen a P fuera de fase, aunque hayan incluso comenzado en fase al salir de las bocinas. El entorno que constituye al auditorio podría, por lo tanto, tener "puntos muertos" en los que

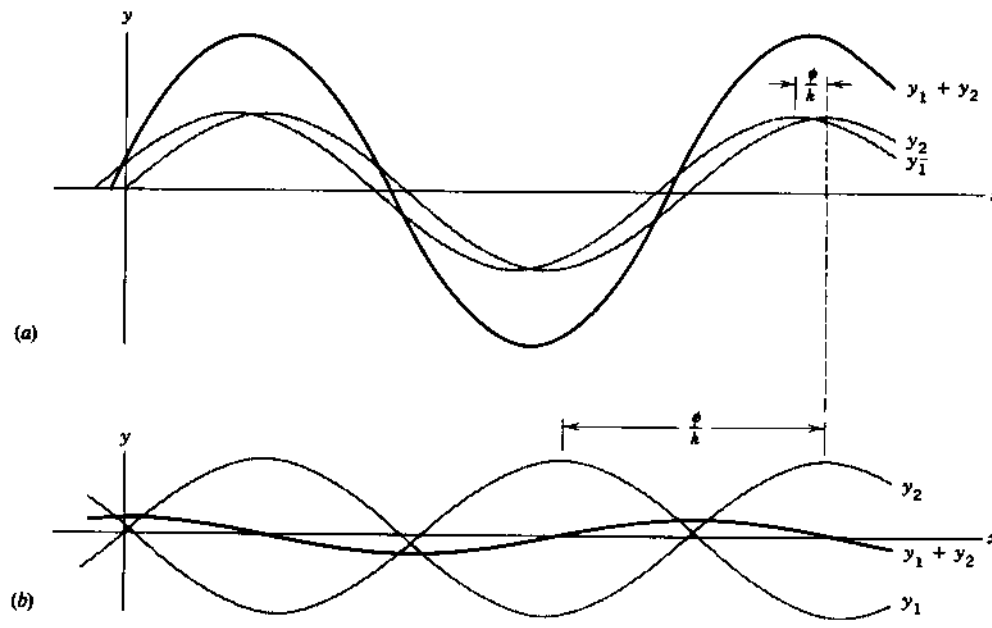


Figura 17 (a) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén prácticamente en fase da por resultado una onda de casi el doble de la amplitud de cualquiera de las componentes. (b) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén casi a 180° fuera de fase da por resultado una onda cuya amplitud es prácticamente cero. Nótese que la longitud de onda de la resultante no cambia en ninguno de los casos.

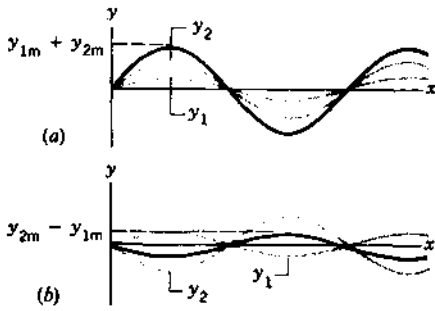


Figura 18 Suma de dos ondas de la misma longitud de onda y fase pero de diferentes amplitudes (líneas de menor intensidad) da una resultante de la misma longitud de onda y fase. (a) Las amplitudes se suman si las ondas están en fase, y (b) se restan si las ondas están 180° fuera de fase.

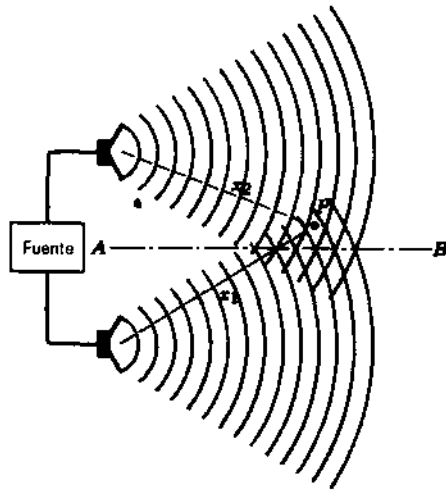


Figura 19 Dos altoparlantes, accionados por una fuente común, envían señales al punto P, donde éstas se interfieren.

existe interferencia destructiva parcial o completa para una longitud de onda λ en particular. La interferencia destructiva máxima se presenta en los puntos en que

$$|x_1 - x_2| = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots, \quad (38)$$

correspondientes a una diferencia de fase de 180°, 540°, 900°, y así sucesivamente.

Por supuesto, si las bocinas emiten una mezcla de muchas longitudes de onda diferentes, ciertos puntos P podrían mostrar una interferencia destructiva para una longitud de onda y una interferencia constructiva para otra. El factor crítico en la determinación de las posiciones de los máximos y mínimos de la intensidad del sonido es la *diferencia de trayectoria* $|x_1 - x_2|$. En los puntos que no estén en el plano medio representado por la línea AB, las dos componentes llegan con amplitudes diferentes (porque las distancias desde las bocinas no son las mismas;

véase el problema muestra 3). No existirá entonces una interferencia destructiva completa. (En ciertas geometrías es posible que el sonido irradiado por la *parte trasera* de una bocina interfiera con el sonido irradiado por la *parte frontal*. Estas dos ondas están a 180° fuera de fase, y su interferencia puede reducir la intensidad del sonido en lugares frente a la bocina. Se han diseñado cajas de bocinas que eliminan este efecto.)

Problema muestra 4 Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda e interfieren entre sí. Las ondas tienen la misma longitud de onda y viajan con la misma velocidad. La amplitud de cada onda es de 9.7 mm, y existe una diferencia de fase de 110° entre ellas. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda combinada que resulta de la interferencia de las dos ondas? (b) ¿A qué valor se debería cambiar la diferencia de fase de modo que la onda combinada tenga una amplitud igual a la de una de las ondas originales?

Solución (a) La amplitud de la onda combinada se dio en la ecuación 36:

$$2y_m |\cos(\Delta\phi/2)| = 2(9.7 \text{ mm}) |\cos(110^\circ/2)| = 11.1 \text{ mm}.$$

(b) Si la cantidad $2y_m |\cos(\Delta\phi/2)|$ ha de ser igual a y_m , entonces debemos tener que

$$2|\cos(\Delta\phi/2)| = 1,$$

o sea

$$\Delta\phi = 2 \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 120^\circ \text{ or } -120^\circ.$$

Cualquier onda puede ir delante de la otra por 120° (más o menos cualquier múltiplo entero de 360°) para producir la onda combinada deseada.

Problema muestra 5 En la geometría de la figura 19, un oyente está sentado en un punto a una distancia de 1.2 m directamente enfrente de una bocina. Las dos bocinas, separadas por una distancia D de 2.3 m, emiten tonos puros de longitud de onda λ . Las ondas están en fase al salir de las bocinas. ¿Para qué longitudes de onda oírás el oyente un mínimo de intensidad del sonido?

Solución De acuerdo con los criterios de la ecuación 38, la intensidad mínima de sonido ocurre cuando las ondas de las dos bocinas se interfieren destructivamente. Si el oyente está sentado enfrente de la bocina 2, entonces $x_2 = 1.2 \text{ m}$, y x_1 puede hallarse a partir de la fórmula pitagórica,

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + D^2} = \sqrt{(1.2 \text{ m})^2 + (2.3 \text{ m})^2} = 2.6 \text{ m}.$$

Así, $x_1 - x_2 = 2.6 \text{ m} - 1.2 \text{ m} = 1.4 \text{ m}$, y, de acuerdo con la ecuación 38, tenemos que

$$1.4 \text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots,$$

que corresponde a

$$\lambda = 2.8 \text{ m}, 0.93 \text{ m}, 0.56 \text{ m}, \dots$$

No ocurrirá una interferencia destructiva completa en esta posición, porque las dos ondas que llegan al punto de observación tienen amplitudes diferentes, siempre y cuando salgan de las bocinas con amplitudes iguales.

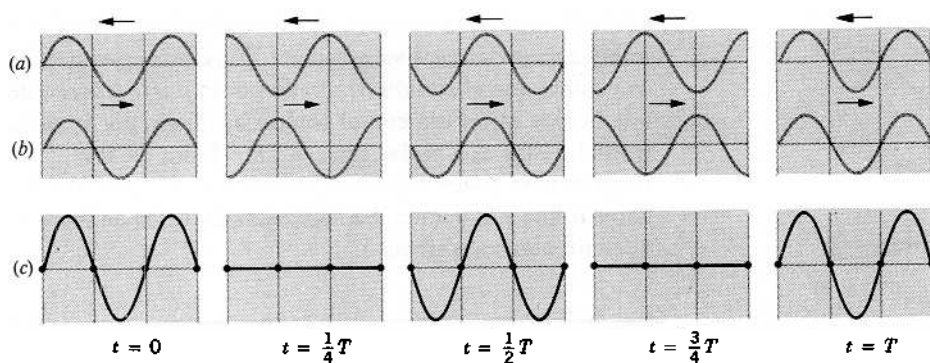


Figura 20 (a, b) Dos ondas viajeras de la misma longitud de onda y amplitud, se mueven en direcciones opuestas. (c) La superposición de las dos ondas en instantes de tiempo diferentes. Los nodos del patrón de onda estacionaria se hallan indicados por puntos gruesos. Nótese que las ondas viajeras no tienen nodos.

19-9 ONDAS ESTACIONARIAS

En la sección anterior considerábamos el efecto de superponer dos ondas componentes de igual amplitud y frecuencia que se mueven en la misma dirección en una cuerda. ¿Cuál es el efecto cuando las ondas se mueven a lo largo de la cuerda en direcciones opuestas?

La figura 20 es una indicación gráfica del efecto de sumar las formas de onda componentes para obtener la resultante. En la figura se muestran dos ondas viajeras, una moviéndose hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Se muestran “instantáneas” de las dos ondas componentes y su resultante en intervalos de $\frac{1}{4}$ de periodo.

De esta superposición resulta una característica particular: existen ciertos puntos a lo largo de la cuerda, llamados *nodos*, en los cuales el desplazamiento es nulo en todo momento. (La figura 18 muestra también ciertos puntos en los que la resultante tenía un desplazamiento nulo, pero esa figura representaba una instantánea de las ondas viajeras en un momento particular. Si tomásemos otra instantánea un momento más tarde, hallaríamos que aquellos puntos ya no tienen desplazamiento nulo, porque la onda está viajando. En la figura 20c, los ceros permanecen como ceros en todo momento.) Entre los nodos se hallan los *antinodos*, donde el desplazamiento oscila con la amplitud más grande. Tal patrón de nodos y antinodos se denomina *onda estacionaria*.

Para analizar matemáticamente a la onda estacionaria, representemos a las dos ondas por

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t),$$

$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx + \omega t).$$

De aquí que la resultante se pueda expresar como:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$= y_m \text{ sen } (kx - \omega t) + y_m \text{ sen } (kx + \omega t) \quad (39)$$

o, haciendo uso de la relación trigonométrica de la ecuación 35,

$$y(x,t) = [2y_m \text{ sen } kx] \cos \omega t. \quad (40)$$

La ecuación 40 es la ecuación de una onda estacionaria. No puede representar a una onda viajera, porque x y t no aparecen en la combinación $x - vt$ o $x + vt$ exigida por una onda viajera.

Nótese que una partícula en cualquier posición x determinada ejecuta un movimiento armónico simple en el transcurso del tiempo, y que todas las partículas vibran con la misma frecuencia angular ω . En una onda viajera cada partícula de la cuerda vibra con la misma amplitud. Sin embargo, en una onda estacionaria, *la amplitud no es la misma para todas las partículas sino que varía con la posición x de la partícula*. De hecho, la amplitud $[2y_m \text{ sen } kx]$, tiene un valor máximo de $2y_m$ en las posiciones donde

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots \quad (41)$$

Estos puntos son los antinodos y están separados por $\frac{\lambda}{2}$ de longitud de onda. La amplitud tiene un valor mínimo de cero en las posiciones donde

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots \quad (42)$$

Estos puntos son los nodos y están también separados por $\frac{\lambda}{2}$ de longitud de onda. La separación entre un nodo y un antinodo adyacente es de $\frac{\lambda}{4}$ de longitud de onda.

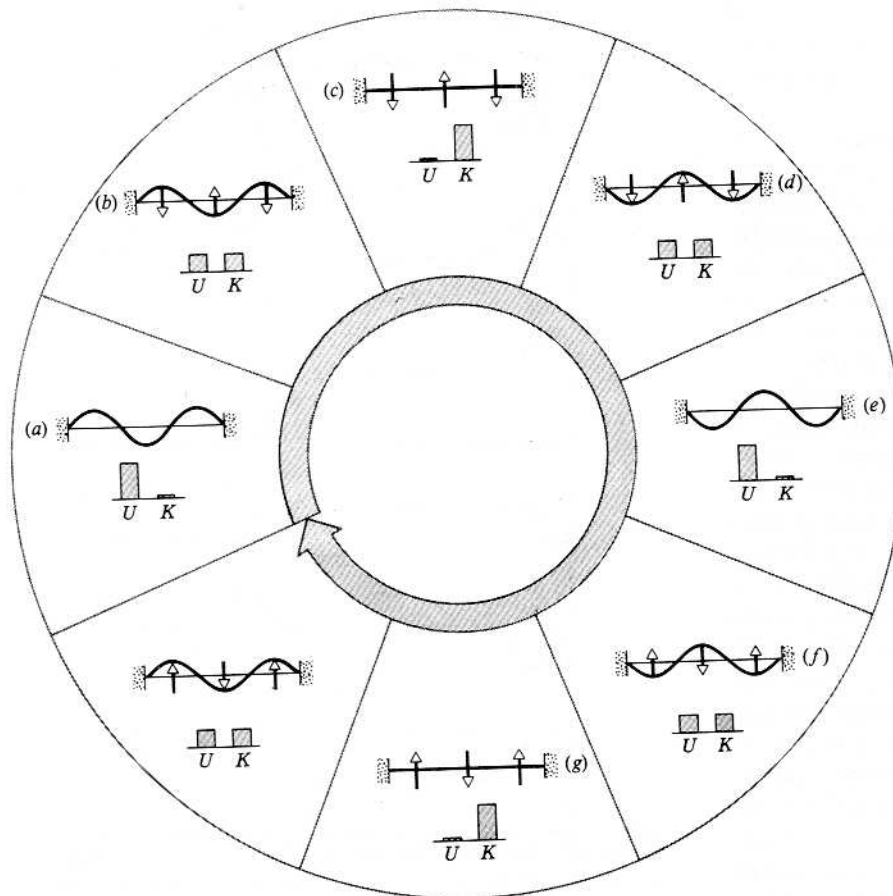


Figura 21 Onda estacionaria en una cuerda tensa que muestra un ciclo de oscilación. En (a) la cuerda está momentáneamente en reposo con los antinodos en su desplazamiento máximo. La energía de la cuerda es energía potencial elástica totalmente. (b) Un octavo de ciclo más tarde, el desplazamiento se reduce y la energía es parcialmente potencial y parcialmente cinética. Los vectores muestran las velocidades instantáneas de las partículas de la cuerda en ciertas posiciones. (c) El desplazamiento es cero; no existe energía potencial, y la energía cinética es máxima. Las partículas de la cuerda tienen sus velocidades máximas. (d - h) El movimiento continúa a través del resto del ciclo, transformándose continuamente la energía en las formas cinética y potencial.

Está claro que no se transporta energía a lo largo de la cuerda hacia la derecha o hacia la izquierda, ya que la energía no puede fluir más allá de los nodos de la cuerda, los cuales están permanentemente en reposo. De aquí que la energía permanezca "estacionaria" en la cuerda, si bien alterna entre energía cinética vibratoria y energía potencial elástica. Cuando los antinodos están todos en sus desplazamientos máximos, la energía se almacena enteramente como energía potencial, en especial como una energía potencial elástica asociada al estiramiento de la cuerda. Cuando todas las partes de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio (como en la segunda y cuarta instantáneas de la Fig. 20), la energía se almacena enteramente como energía cinética. La figura 21 muestra una descripción más detallada de la transformación de la energía entre las formas potencial y cinética durante un ciclo de oscilación. Compárese la figura 21 con la figura 6 del capítulo 8 para el sistema oscilatorio bloque-resorte. ¿En qué se parecen estos sistemas?

Podemos considerar de igual manera al movimiento como una oscilación de la cuerda como un todo, experimentando cada partícula un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω y con una amplitud que depende

de su posición. Cada pequeña parte de la cuerda tiene inercia y elasticidad, y la cuerda en su conjunto puede verse como una colección de osciladores acoplados. De aquí que la cuerda vibratoria sea lo mismo en principio que el sistema bloque-resorte, excepto que el sistema bloque-resorte tiene únicamente una frecuencia natural, y la cuerda vibratoria tiene un gran número de frecuencias naturales (véase la sección 19-10).

Una manera fácil de conseguir una onda estacionaria consiste en superponer a una onda que viaje por una cuerda con su onda reflejada que viaje en la dirección opuesta. Consideremos ahora más detenidamente el proceso de reflexión de una onda. Supongamos una pulsación que viaje por una cuerda tensa que está fija en un extremo, como se muestra en la figura 22a. Cuando la pulsación llega a ese extremo, ejerce una fuerza hacia arriba sobre el apoyo. El apoyo es rígido, sin embargo, y no se mueve. Según la tercera ley de Newton, el apoyo ejerce una fuerza igual sobre la cuerda pero directamente opuesta. Esta fuerza de reacción genera una pulsación en el apoyo, el cual viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Decimos que la pulsación incidente ha sido *reflejada* en el punto extremo fijo de la cuerda. Nótese que la pulsación reflejada regresa

con su desplazamiento transversal invertido. Si un tren de ondas es incidente en el punto extremo fijo, se genera un tren de ondas reflejado en ese punto de la misma manera. El desplazamiento de cualquier punto a lo largo de la cuerda es la suma de los desplazamientos causados por las ondas incidente y reflejada. Puesto que el punto extremo está fijo, estas dos ondas deben interferir entre sí siempre destructivamente en ese punto, de modo que el desplazamiento será nulo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre 180° fuera de fase con la onda incidente en un extremo fijo. *Al reflejarse en un extremo fijo, una onda transversal experimenta un cambio de fase de 180° .*

En la figura 22b se representa la reflexión de una pulsación en un extremo libre de una cuerda tensa, es decir, en el extremo que tiene libertad de moverse transversalmente. El extremo de la cuerda está unido a un aro muy ligero que puede deslizarse libremente sin fricción a lo largo de una barra transversal. Cuando la pulsación llega al extremo libre, ejerce una fuerza sobre el elemento de la cuerda allí situado. Este elemento se acelera, y (como en el caso de un péndulo) su movimiento lo lleva más allá del punto de equilibrio; se "pasa de largo" y ejerce una fuerza de reacción sobre la cuerda. Esto genera una pulsación que viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Una vez más tenemos una reflexión, pero ahora en un extremo libre. El extremo libre sufrirá obviamente el desplazamiento máximo de las partículas de la cuerda; un tren de ondas incidente y otro reflejado deben interferir constructivamente en ese punto si han de tener un máximo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre en fase con la onda incidente en ese punto. *En un extremo libre, una onda transversal se refleja sin cambiar de fase.*

La figura 23 muestra exposiciones de tiempo de los patrones de onda estacionaria que pueden obtenerse al sacudir una cuerda tensa que esté fija en un extremo.

Hasta ahora hemos supuesto que la onda se refleja en el extremo sin pérdida de intensidad. En la práctica encontramos que existe siempre una reflexión parcial y una transmisión parcial en cualquier frontera entre dos medios; por ejemplo, si observamos un trozo de vidrio de ventana ordinario, podemos ver que parte de la luz se refleja de regreso hacia uno y parte se transmite a través del vidrio. Podemos demostrar este efecto con ondas transversales en cuerdas amarrando juntas dos cuerdas de densidades de masa diferentes. Cuando una onda que viaja a lo largo de las cuerdas llega al punto en que las cuerdas están unidas, parte de la energía de la onda se transmite a la otra cuerda y parte se refleja de regreso. La amplitud de la onda reflejada es menor que la amplitud de la onda incidente original, porque la onda transmitida a la segunda cuerda transporta parte de la energía incidente.

Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa mayor que la primera, la onda reflejada de regreso hacia la primera cuerda sufre aún un cambio de fase de 180° al ser

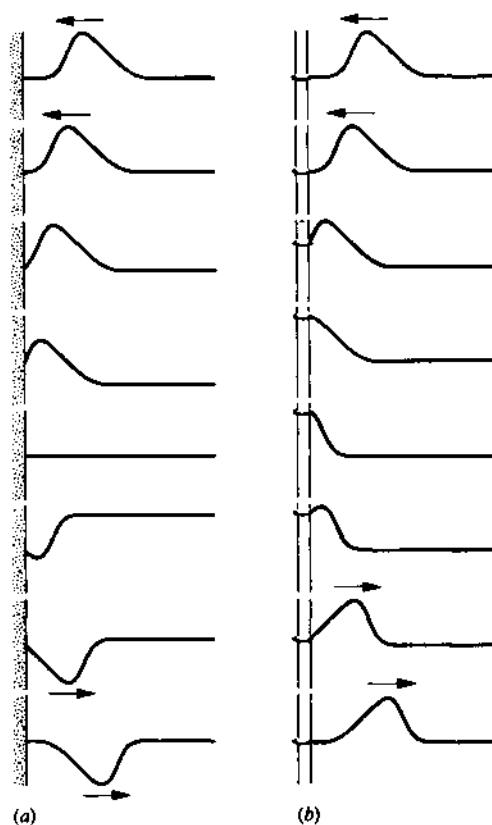


Figura 22 (a) Una pulsación transversal incidente desde la derecha se refleja por una pared rígida. Nótese que la fase de la pulsación reflejada se invierte o se cambia en 180° . (b) Aquí el extremo de la cuerda puede moverse con libertad, estando unida la cuerda a un aro que puede deslizarse libremente a lo largo de la barra. La fase de la pulsación reflejada no cambia.

reflejada. Pero a causa de que su amplitud es menor que la de la onda incidente, el punto frontera no es un nodo y se mueve. Ocurre así una transferencia neta de energía a lo largo de la primera cuerda hacia la segunda. Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa menor que la primera, ocurre una reflexión parcial sin cambio de fase, pero una vez más se transmite energía hacia la segunda cuerda. En la práctica, la mejor manera de comprobar un "extremo libre" en una cuerda consiste en amarrarla a otra cuerda larga y mucho más ligera. La energía transmitida es despreciable, y la segunda cuerda sirve para mantener la tensión en la primera.

Nótese que la onda transmitida viaja con una velocidad diferente de la de las ondas incidente y reflejada. La velocidad de la onda está determinada por la relación $v = \sqrt{F/\mu}$; la tensión es la misma en ambas cuerdas, pero sus densidades son diferentes. De aquí que la onda viaje más lentamente en la cuerda más densa. La frecuencia de la onda transmitida es la misma que la de las ondas incidente y reflejada. (Si no fuera esto así, existiría una

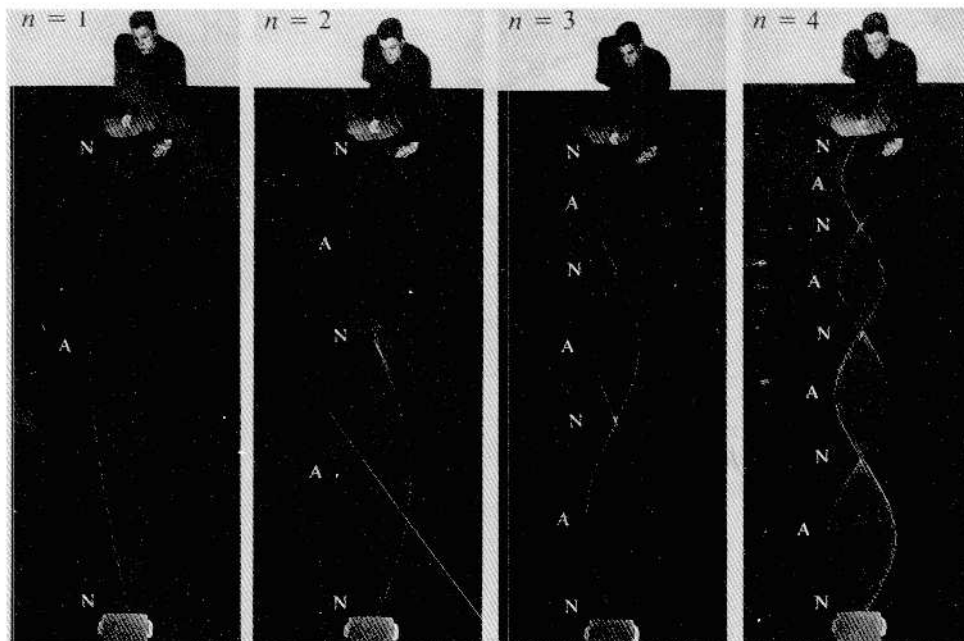


Figura 23 Un estudiante sacude una cuerda tensa (en realidad un tubo de hule) a cuatro frecuencias resonantes, produciendo cuatro patrones diferentes de ondas estacionarias.

discontinuidad en el punto en que las cuerdas están unidas.) Las ondas, que tienen la misma frecuencia pero viajan con velocidades diferentes, tienen longitudes de onda diferentes. Partiendo de la relación $\lambda = v/\nu$, concluimos que la longitud de onda es más corta en la cuerda más densa, donde v es más pequeña. Este fenómeno de cambio de longitud de onda al pasar la onda de un medio a otro lo encontraremos con frecuencia en nuestro estudio de las ondas de luz. También se presenta en las ondas de sonido: una cuerda, como la de una guitarra, vibra con cierta frecuencia y cierta longitud de onda; la onda transmitida al aire tiene la misma frecuencia que la de la cuerda, pero una longitud de onda diferente, debido a que la velocidad de las ondas de la cuerda difiere de su velocidad en el aire.

Las fotos de la figura 23 parecen mostrar un sistema con nodos en ambos extremos. (Si el estudiante está sacudiendo la cuerda en un extremo, lo hace con una amplitud muy pequeña de modo que el extremo sea aproximadamente un nodo.) El espaciamiento entre nodos es siempre de la mitad de la longitud de onda, de modo que la condición para que en la cuerda se produzca una onda estacionaria es que la longitud L de la cuerda sea igual a un número entero n de medias longitudes de onda:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

o bien

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (43)$$

En términos de la frecuencia, podemos escribir la ecuación 43 como:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (44)$$

Es decir, el estudiante debe sacudir la cuerda a estas frecuencias particulares (correspondiendo a $n = 1, 2, 3, y 4$) para producir las ondas estacionarias.

Podemos considerar que las frecuencias de la ecuación 44 son las *frecuencias naturales* del sistema oscilatorio (la cuerda). Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora (la mano del estudiante) concuerda con las frecuencias naturales permitidas, se produce una onda estacionaria y el sistema comienza a moverse con una gran amplitud. Ésta es la condición de *resonancia* que estudiamos anteriormente en la sección 15-9.

19-10 RESONANCIA

Veamos de nuevo los patrones de la onda estacionaria de la figura 23. Podemos ver que pueden presentarse cuatro ondas estacionarias diferentes. El espaciamiento entre los nodos difiere en los cuatro patrones, y puesto que la longitud de onda es el doble de la distancia entre nodos adyacentes, la longitud de onda difiere también. Por otra parte, la velocidad de fase es la misma en las cuatro situaciones, estando determinada únicamente por la tensión de la cuerda. La relación $v = \lambda\nu$ nos dice entonces que si v es constante y λ cambia, la frecuencia ν debe ser ciertamente diferente para las diferentes ondas estacionarias. En las fotografías, el estudiante debe estar por lo tanto sacudiendo la cuerda a ciertas frecuencias diferentes pero bien definidas.

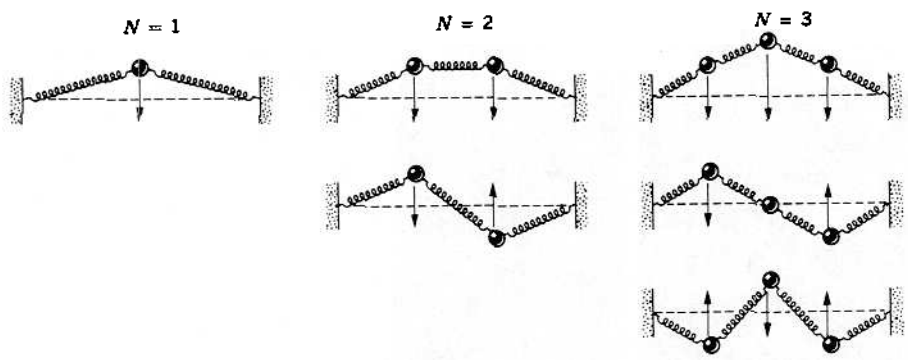


Figura 24 Algunos patrones de oscilación de un oscilador que tiene elementos concentrados, estando conectados los cuerpos oscilatorios en este caso mediante resortes de masa despreciable. Cada patrón de movimiento diferente tiene una frecuencia natural diferente, siendo el número de frecuencias naturales igual al número de cuerpos oscilatorios.

Un bloque colgado de un resorte es también capaz de resonar, pero únicamente a una sola frecuencia. ¿Por qué entonces tiene la cuerda tensa un número infinito de frecuencias resonantes? En el sistema bloque-resorte la inercia (el bloque) está concentrada (“amontonada”) en una parte del sistema mientras que la elasticidad (el resorte) está concentrada en otra. Se dice que tal sistema resonante tiene *elementos concentrados*. Por otra parte, se dice que la cuerda tensa tiene *elementos distribuidos*, porque cada parte de la cuerda tiene propiedades tanto inerciales como elásticas. Son muchas las formas posibles en que la cuerda puede almacenar sus energías cinética y potencial, en contraste con sólo una única manera en el sistema bloque-resorte. Un sistema concentrado de N objetos tiene N frecuencias naturales, cada una de las cuales corresponde a un patrón de oscilación diferente (Fig. 24). El límite cuando N tiende al infinito nos conduce al sistema completamente distribuido de la cuerda tensa, con su número infinito de frecuencias resonantes.

Si la cuerda vibratoria de la figura 23 se pusiera en movimiento y luego se dejara sola, las vibraciones desaparecerían en forma gradual. El movimiento de la cuerda está amortiguado por la disipación de energía a través de los soportes en los extremos y por la resistencia del aire al movimiento. Para mantener la vibración, el estudiante debe suministrar cierta energía al sistema aplicando una fuerza impulsora. Cuando la frecuencia impulsora es muy diferente a la de las frecuencias resonantes, la onda reflejada hace que la cuerda efectúe un trabajo sobre la mano del estudiante; de esta manera, la cuerda pierde energía, a lo que hay que añadir la pérdida por amortiguamiento. En la resonancia, el movimiento de la mano del estudiante está en fase con el de la cuerda, y la cuerda no pierde energía a causa del trabajo efectuado sobre la mano del estudiante. Toda la energía suministrada por el estudiante, menos la pérdida por amortiguamiento, se almacena en la

oscilación, y el resultado es un movimiento de una gran amplitud. Finalmente, se llega a una situación estable en la que la energía suministrada por la fuerza impulsora equilibra exactamente las pérdidas debidas al amortiguamiento.

Este movimiento es análogo al del oscilador armónico amortiguado que hemos estudiado en la sección 15-9. La frecuencia resonante es casi, pero no exactamente, una frecuencia natural de la cuerda. Los nodos aparentes no son verdaderos nodos, porque la energía debe estar fluyendo por ellos a lo largo de la cuerda para compensar las pérdidas debidas al amortiguamiento. Si no existiera un amortiguamiento, la frecuencia resonante sería exactamente una frecuencia natural, y la amplitud aumentaría sin límite al continuar siendo suministrada energía a la cuerda. Finalmente, se excedería el límite elástico y la cuerda se rompería. (El límite elástico puede excederse aunque haya amortiguamiento presente, como se mostró en la figura 21 del capítulo 15.)

Si el estudiante sacude la cuerda con una frecuencia que difiera de una de las frecuencias naturales del sistema, la onda reflejada regresa a la mano del estudiante fuera de fase con el movimiento de la mano. En este caso, la cuerda efectúa un trabajo sobre la mano, en adición al que la mano efectúa sobre la cuerda. No se produce ningún patrón fijo de onda estacionaria. La amplitud del movimiento resultante es pequeña y no muy diferente a la del movimiento de la mano del estudiante. Esta situación es análoga al movimiento errático de un columpio que sea impulsado con una frecuencia diferente a la natural; el desplazamiento resultante del columpio es bastante pequeño.

En la resonancia, la cuerda absorbe tanta energía como puede de la mano del estudiante. Esto sucede así en todo sistema vibratorio. Al sintonizar un aparato de radio, la frecuencia natural de un circuito electrónico se cambia

hasta que concuerda con una frecuencia particular de las ondas de radio que estén siendo transmitidas por la estación. En ese momento el circuito resuena con la señal y absorbe tanta energía de la señal como puede. Otras condiciones de resonancia similares se presentan en el sonido, el electromagnetismo, la óptica, y las físicas atómica y nuclear.

En el capítulo siguiente consideraremos con mayor detalle la importancia de la resonancia para entender las propiedades de diferentes instrumentos musicales y la manera en que se producen sus sonidos característicos. Si bien en esta sección hemos utilizado una cuerda vibrante como ejemplo de un sistema vibratorio, los principios estudiados aquí se aplican a todos los sistemas vibratorios que puedan mantener un movimiento ondulatorio.

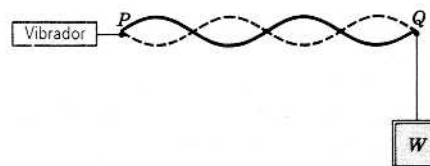


Figura 25 Problema muestra 6. Una cuerda sometida a tensión está conectada a un vibrador. A una frecuencia fija del vibrador, los patrones de la onda estacionaria ocurrirán para ciertos valores discretos de la tensión en la cuerda.

Problema muestra 6 En el arreglo de la figura 25, un vibrador pone en movimiento a la cuerda con una frecuencia de 120 Hz. La cuerda tiene una longitud de $L = 1.2$ m, y su densidad de masa lineal es de 1.6 g/m. ¿A qué valor debe ajustarse la tensión (aumentando el peso colgante) para obtener el patrón de movimiento de cuatro rizados?

Solución Para hallar la tensión, podemos sustituir a la ecuación 18 por la ecuación 44 y obtener

$$F = \frac{4L^2v^2\mu}{n^2}$$

Se encuentra que la tensión correspondiente a $n = 4$ (para cuatro rizados) es

$$F = \frac{4(1.2 \text{ m})^2(120 \text{ Hz})^2(0.0016 \text{ kg/m})}{4^2} = 8.3 \text{ N.}$$

Esto corresponde a un peso colgante de unas 2 lb.

Problema muestra 7 Una cuerda de violín sintonizada en la nota *la* (440 Hz) tiene una longitud de 0.34 m. (a) ¿Cuáles son

las tres longitudes de onda más largas de las resonancias de la cuerda? (b) ¿Cuáles son las longitudes de onda correspondientes que llegan al oído del oyente?

Solución (a) Las longitudes de onda resonantes de una cuerda de longitud $L = 0.34$ m pueden hallarse directamente de la ecuación 43:

$$\lambda_1 = 2L/1 = 2(0.34 \text{ m}) = 0.68 \text{ m,}$$

$$\lambda_2 = 2L/2 = 0.34 \text{ m,}$$

$$\lambda_3 = 2L/3 = 0.23 \text{ m.}$$

(b) Cuando una onda pasa de un medio (la cuerda) a otro (el aire) de velocidad de onda diferente, la frecuencia permanece igual, pero la longitud de onda cambia. La ecuación 19 da la relación entre las longitudes de onda. Para hallar la velocidad de onda de la cuerda, observamos que en el modo resonante más bajo $v = 440$ Hz y $\lambda = 0.68$ m, de modo que

$$v = v\lambda = (440 \text{ Hz})(0.68 \text{ m}) = 299 \text{ m/s.}$$

En el aire, la velocidad de la onda es de 343 m/s, y partiendo de la ecuación 19 obtenemos

$$\lambda_{\text{aire}} = \lambda_{\text{cuerda}} \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{cuerda}}} = \lambda_{\text{cuerda}} \frac{343 \text{ m/s}}{299 \text{ m/s}} = 1.15\lambda_{\text{cuerda}}$$

Entonces hallamos que las longitudes de onda en el aire son:

$$\lambda_1 = 0.78 \text{ m,} \quad \lambda_2 = 0.39 \text{ m,} \quad \lambda_3 = 0.26 \text{ m.}$$

PREGUNTAS

- ¿Cómo podría usted probar experimentalmente que la energía se halla asociada a una onda?
- La energía puede transferirse por partículas y por ondas. ¿Cómo podemos distinguir experimentalmente entre estos métodos de transferencia de la energía?
- ¿Puede generarse un movimiento ondulatorio en el que las partículas del medio vibren con un movimiento angular armónico simple? De ser así, explique cómo y describa la onda.
- Al analizar el movimiento de una onda elástica a través de un medio material, a menudo despreciamos la estructura molecular de la materia. ¿Cuándo se justifica esto y cuándo no?
- ¿Cómo varían la amplitud y la intensidad de las ondas de la superficie del agua con la distancia desde la fuente?
- ¿Cómo podemos crear ondas planas? ¿Y ondas esféricas?
- Al pasar un bote de motor crea una estela que causa ondas que bañan la orilla. Al paso del tiempo, el periodo de las ondas que llegan se hace cada vez más corto. ¿Por qué?
- Las siguientes funciones en las que A es una constante son de la forma $y = f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \quad y = A(x + vt)^2,$$

$$y = A\sqrt{x - vt}, \quad y = A \ln(x + vt).$$

Explique por qué estas funciones no son útiles en el movimiento ondulatorio.

9. ¿Puede uno producir en una cuerda una forma de onda que tenga una discontinuidad en la pendiente en un punto, es decir, una esquina aguda? Explique.
10. La ley del cuadrado inverso no se aplica exactamente a la disminución de la intensidad de los sonidos con la distancia. ¿Por qué?
11. Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿altera una el progreso de la otra?
12. Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿existe pérdida de energía? Explique su respuesta.
13. ¿Por qué no observamos efectos de interferencia entre los haces de luz emitidos por dos lámparas de mano o entre las ondas de sonido emitidas por dos violines?
14. Como lo muestra la figura 20, la configuración de las ondas estacionarias en una cuerda tensa es una línea recta dos veces durante el ciclo, exactamente como sería si la cuerda no vibrara en absoluto. Explique desde el punto de vista de la conservación de la energía.
15. Dos ondas de la misma amplitud y frecuencia están viajando en la misma cuerda. En cierto momento la cuerda se asemeja a una línea recta. ¿Viajan las dos ondas necesariamente en la misma dirección? ¿Cuál es la relación de fase entre las dos ondas?
16. Si dos ondas difieren únicamente en amplitud y se propagan en direcciones opuestas a través de un medio, ¿producirán ondas estacionarias? ¿Se transporta energía? ¿Existen nodos?
17. La reflexión parcial de la energía ondulatoria a causa de discontinuidades en la trayectoria de transmisión es usualmente disipante y puede reducirse a un mínimo por medio de la inserción de aparatos de "igualación de la impedancia" entre las secciones de la trayectoria que limitan con la discontinuidad. Por ejemplo, un megáfono ayuda a igualar la columna de aire de boca y garganta con el aire afuera de la boca. Dé otros ejemplos y explique cualitativamente cómo tales aparatos minimizan las pérdidas por reflexión.
18. Considere que las ondas estacionarias de una cuerda son una superposición de ondas viajeras y explique, usando ideas de superposición, por qué no existen nodos reales en la cuerda resonante de la figura 25, ni siquiera en el extremo "fijo". (*Sugerencia:* Considere los efectos del amortiguamiento.)
19. Las ondas estacionarias de una cuerda se demuestran por medio de un arreglo como el de la figura 25. La cuerda es iluminada por una lámpara fluorescente y el vibrador está impulsado por la misma toma eléctrica que energiza a la lámpara. La cuerda exhibe una variación curiosa del color en dirección transversal. Explique.
20. En la discusión sobre las ondas transversales de una cuerda, hemos tratado únicamente con desplazamientos en un solo plano, el plano xy . Si todos los desplazamientos están en un plano, se dice que la onda es *planamente polarizada*. ¿Pueden existir desplazamientos en otro plano que aquel con el que tratamos? De ser así, ¿pueden combinarse las ondas polarizadas en dos planos diferentes? ¿Qué apariencia tendría tal combinación de ondas?
21. Una onda transmite energía. ¿Transfiere ímpetu? ¿Puede transferir ímpetu angular? (Véase "Energy and Momentum Transport in String Waves", por D. W. Juenker, *American Journal of Physics*, enero de 1976, pág. 94).
22. En el terremoto de la Ciudad de México ocurrido el 19 de septiembre de 1985, se alternaron zonas de mucho daño con zonas de poco daño. También, los edificios de entre 5 y 15 pisos de altura sufrieron el daño mayor. Explique estos efectos en términos de las ondas estacionarias y de la resonancia.

PROBLEMAS

Sección 19-3 Ondas viajeras

1. Una onda tiene una velocidad de onda de 243 m/s y una longitud de onda de 3.27 cm. Calcule (a) la frecuencia y (b) el periodo de la onda.
2. Al mecer un bote, un niño produce ondas de agua en la superficie de un lago previamente tranquilo. Se observa que el bote produce 12 oscilaciones en 30 s y también que la cresta de una onda determinada llega en 5 s a la orilla, que está alejada 15 m. Halle (a) la frecuencia, (b) la velocidad, y (c) la longitud de onda de las ondas.
3. Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. El tiempo para que un punto en particular se mueva desde el desplazamiento máximo hasta el desplazamiento cero es de 178 ms. La longitud de onda de la onda es de 1.38 m. Halle (a) el periodo, (b) la frecuencia, y (c) la velocidad de la onda.
4. Escriba una expresión que describa a una onda transversal que viaje a lo largo de una cuerda en la dirección $+x$ con una longitud de onda de 11.4 cm, una frecuencia de 385 Hz, y una amplitud de 2.13 cm.
5. Escriba la ecuación de una onda que viaje en dirección negativa a lo largo del eje x y tenga una amplitud de 1.12 cm, una frecuencia de 548 Hz, y una velocidad de 326 m/s.
6. Una onda de 493 Hz de frecuencia tiene una velocidad de 353 m/s. (a) ¿A qué distancia entre sí están dos puntos que difieran en fase por 55.0° ? (b) Halle la diferencia de fase entre dos desplazamientos en el mismo punto pero en tiempos que difieran en 1.12 ms.

Sección 19-4 Velocidad de onda

7. Demuestre (a) que la velocidad transversal máxima de una partícula de una cuerda debida a una onda viajera está dada

por $u_{\text{máx}} = \omega y_{\text{máx}}$, y (b) que la aceleración transversal máxima es $a_{\text{máx}} = \omega^2 y_{\text{máx}}$.

8. La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda está dada por

$$y = (2.30 \times 10^{-3}) \text{ sen } (18.2x - 588t),$$

donde x y y están en metros y t está en segundos. Halle (a) la amplitud, (b) la frecuencia, (c) la velocidad, (d) la longitud de onda de la onda, y (e) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

9. La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda muy larga está dada por $y = 6.0 \text{ sen } (0.020\pi x + 4.0\pi t)$, donde x y y están expresadas en centímetros y t en segundos. Calcule (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia, (d) la velocidad, (e) la dirección de propagación de la onda, y (f) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

10. Calcule la velocidad de una onda transversal en una cuerda de 2.15 m de longitud y 62.5 g de masa bajo una tensión de 487 N.

11. La velocidad de una onda de una cuerda es 1 de 72 m/s cuando la tensión es de 123 N. ¿En qué valor deberá ser aumentada la tensión con objeto de elevar la velocidad de la onda a 180 m/s?

12. Demuestre que, en términos del esfuerzo de tensión S y de la densidad de masa ρ , la velocidad v de las ondas transversales de un alambre está dada por $v = (S/\rho)^{1/2}$.

13. La ecuación de una onda transversal de una cuerda es $y = 1.8 \text{ sen } (23.8x + 317t)$, donde x está en metros, y está en milímetros, y t en segundos. La cuerda está sometida a una tensión de 16.3 N. Halle la densidad de masa lineal de la cuerda.

14. Una onda sinusoidal continua viaja por una cuerda con una velocidad de 82.6 cm/s. Se halla que el desplazamiento de las partículas de la cuerda en $x = 9.60$ cm varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación $y = 5.12 \text{ sen } (1.16 - 4.08t)$, donde y está en centímetros y t en segundos. La densidad de masa lineal de la cuerda es de 3.86 g/cm. (a) Halle la frecuencia de la onda. (b) Halle la longitud de onda de la onda. (c) Escriba la ecuación general que da el desplazamiento transversal de las partículas de la cuerda en función de la posición y del tiempo. (d) Calcule la tensión en la cuerda.

15. Una onda transversal armónica simple se está propagando a lo largo de una cuerda hacia la izquierda (ó $-x$). La figura 26 muestra un trazo del desplazamiento en función de la posición en el tiempo $t = 0$. La tensión de la cuerda es de 3.6 N y su densidad lineal es de 25 g/m. Calcule (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la velocidad de la onda, (d) el periodo, y (e) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda. (f) Escriba una ecuación que describa a la onda viajera.

16. Pruebe que la pendiente de una cuerda en cualquier punto es numéricamente igual a la razón entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la onda en ese punto.

17. Para una onda en una cuerda tensa, halle la razón entre la velocidad máxima de una partícula (la velocidad máxima con la cual una sola partícula del cordón se mueve trans-

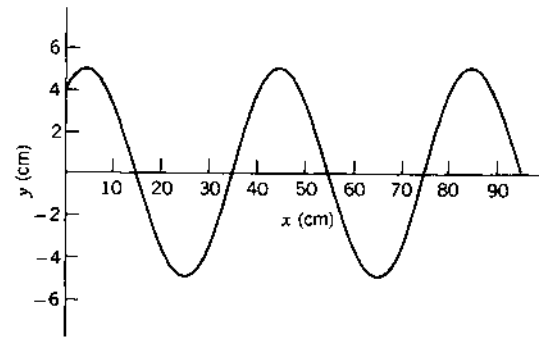


Figura 26 Problema 15.

versalmente a la onda) y la velocidad de la onda. Si una onda que tiene cierta frecuencia y cierta amplitud actúa sobre un cordón, ¿dependería esta razón de velocidades del material de que esté hecha la cuerda, por ejemplo de alambre o de nylon?

18. En la figura 27a, la cuerda #1 tiene una densidad de masa lineal de 3.31 g/m, y la cuerda #2 tiene una densidad de masa lineal de 4.87 g/m. Están bajo tensión debido al bloque colgante de masa $M = 511$ g. (a) Calcule la velocidad de la onda en cada cuerda. (b) El bloque se divide ahora en dos bloques (siendo $M_1 + M_2 = M$) y el aparato se modifica como se muestra en la figura 27b. Halle M_1 y M_2 , de modo que las velocidades de onda de las dos cuerdas sean iguales.

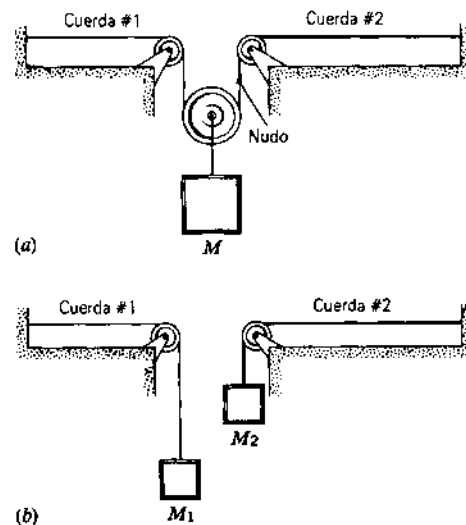


Figura 27 Problema 18.

19. Un alambre de 10.3 m de longitud y una masa de 97.8 g se estira bajo una tensión de 248 N. Si se generan dos pulsaciones, separadas en tiempo por 29.6 ms, una en cada extremo del alambre, ¿en dónde se encuentran las pulsaciones?
20. Halle la velocidad de la onda transversal más rápida que puede ser enviada a lo largo de un alambre de acero.

Permitiendo un factor de seguridad razonable, el esfuerzo máximo de tensión al que podrían estar sujetos los alambres de acero es de 720 MPa. La densidad del acero es de 7.80 g/cm³. Demuestre que la respuesta no depende del diámetro del alambre.

21. El tipo de banda de hule empleado en el interior de algunas bolas de béisbol y de algunas pelotas de golf obedece la ley de Hooke dentro de un amplio intervalo de elongaciones de la banda. Un segmento de este material tiene una longitud L sin estirar y una masa m . Cuando se aplica una fuerza F , la banda se estira una longitud adicional ΔL . (a) ¿Cuál es la velocidad (en términos de m , ΔL , y la constante de fuerza k) de las ondas transversales en esta banda de hule? (b) Usando la respuesta de (a), demuestre que el tiempo requerido para que una pulsación transversal viaje la longitud de la banda de hule es proporcional a $1/\sqrt{\Delta L}$ si $\Delta L \ll L$ y es constante si $\Delta L \gg L$.
22. Un cable uniforme de masa m y longitud L cuelga de un techo. (a) Demuestre que la velocidad de una onda transversal en el cable es una función de y , la distancia desde el extremo inferior, y está dada por $v = \sqrt{gy}$. (b) Demuestre que el tiempo que le toma a una onda transversal viajar la longitud del cable está dada por $t = 2\sqrt{L/g}$. (c) ¿Afecta la masa real del cable a los resultados de (a) y de (b)?
23. Un alambre no uniforme de longitud L y masa M tiene una densidad de masa lineal variable dada por $\mu = kx$, donde x es la distancia desde un extremo del alambre y k es una constante. (a) Demuestre que $M = kL^2/2$. (b) Demuestre que el tiempo t requerido para que una pulsación generada en un extremo del alambre viaje hasta el otro extremo está dado por $t = \sqrt{8ML/9F}$, donde F es la tensión en el alambre.
24. Un aro de cuerda circular y uniforme gira en sentido horario en ausencia de la gravedad (véase la Fig. 28). La velocidad tangencial es v_0 . Halle la velocidad de las ondas en esta cuerda. (Nota: La respuesta es independiente del radio del aro y de la densidad de masa lineal de la cuerda.)

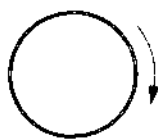


Figura 28 Problema 24.

Sección 19-6 Potencia e intensidad en el movimiento ondulatorio

25. Una cuerda de 2.72 m de longitud tiene una masa de 263 g. La tensión en la cuerda es de 36.1 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas viajeras de amplitud de 7.70 mm para que la potencia promedio transmitida sea de 85.5 W?
26. Una fuente lineal emite una onda cilíndrica expansiva. Suponiendo que el medio no absorbe energía, encuentre (a) cómo dependen la intensidad y (b) la amplitud de la onda de la distancia medida desde la fuente.
27. Una onda se propaga uniformemente en todas direcciones desde un punto fuente. (a) Justifique la expresión para el

desplazamiento y del medio a una distancia r desde la fuente:

$$y = \frac{Y}{r} \text{sen } k(r - vt).$$

- Considere la velocidad, dirección de propagación, periodicidad e intensidad de la onda. (b) ¿Qué dimensiones tiene la constante Y ?
28. Un observador mide una intensidad de 1.13 W/m² a una distancia desconocida medida desde una fuente de ondas esféricas cuya potencia de salida es también desconocida. El observador camina 5.30 m acercándose a la fuente y mide entonces una intensidad de 2.41 W/m² en esta nueva posición. Calcule la potencia de salida de la fuente.
 29. (a) Muestre que la intensidad I es el producto de la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) y la velocidad de propagación v de una perturbación ondulatoria; o sea muestre que $I = uv$. (b) Calcule la densidad de energía en una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de 47.5 kW, suponiendo que las ondas son esféricas, la propagación isotrópica sin haber una absorción atmosférica, y que la velocidad del sonido es de 343 m/s.
 30. Una onda sinusoidal transversal se genera en un extremo de una cuerda larga, horizontal por una barra que se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una distancia de 1.12 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 120 veces por segundo. La cuerda tiene una densidad lineal de 117 g/m y se mantiene bajo una tensión de 91.4 N. Halle (a) el valor máximo de la velocidad transversal u y (b) el valor máximo de la componente transversal de la tensión. (c) Demuestre que los dos valores máximos calculados arriba ocurren a los mismos valores de fase de la onda. ¿Cuál es el desplazamiento transversal y de la cuerda en estas fases? (d) ¿Cuál es la potencia máxima transferida a lo largo de la cuerda? (e) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia máxima de potencia? (f) ¿Cuál es la transferencia mínima de potencia a lo largo de la cuerda? (g) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia mínima de potencia?

Sección 19-8 Interferencia de ondas

31. ¿Qué diferencia de fase entre dos ondas transversales por lo demás idénticas, que se mueven en la misma dirección a lo largo de una cuerda tensa, resultará en la onda combinada que tenga una amplitud de 1.65 veces la de la amplitud común de las dos ondas componentes? Exprese la respuesta tanto en grados como en radianes.
32. Determine la amplitud de la onda resultante cuando se combinan dos ondas sinusoidales que tengan la misma frecuencia y viajen en la misma dirección, si sus amplitudes son de 3.20 cm y 4.19 cm y difieren en fase en $\pi/2$ rad.
33. Dos pulsaciones están viajando a lo largo de una cuerda en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 29. (a) Si la velocidad de onda es de 2.0 m/s y las pulsaciones tienen una separación de 6.0 cm, trace los patrones des-

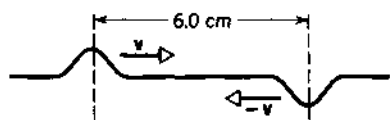


Figura 29 Problema 33.

pués de 5.0, 10, 15, 20, y 25 ms. (b) ¿Qué le ha sucedido a la energía en $t = 15$ ms?

34. Tres ondas sinusoidales viajan en dirección x positiva a lo largo de la misma cuerda. Las tres ondas tienen la misma frecuencia. Sus amplitudes están en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ y sus ángulos de fase son $0, \pi/2, \text{ y } \pi$, respectivamente. Trace la forma de onda resultante y discuta su comportamiento al crecer t .
35. Cuatro ondas sinusoidales viajan en la dirección positiva de x a lo largo de la misma cuerda. Sus frecuencias están en la razón $1:2:3:4$ y sus amplitudes en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, respectivamente. Cuando $t = 0$, en $x = 0$, la primera y la tercera onda están 180° fuera de fase con la segunda y la cuarta. Trace la forma de onda resultante cuando $t = 0$ y discuta su comportamiento al crecer t .
36. Considere dos fuentes puntuales S_1 y S_2 en la figura 30, las cuales emiten ondas de la misma frecuencia y amplitud. Las ondas se inician con la misma fase, y esta relación de fase en las fuentes se mantiene a través del tiempo. Considere puntos P en los cuales r_1 sea casi igual a r_2 . (a) Demuestre que la superposición de estas dos ondas produce una onda cuya amplitud y_m varía con la posición P aproximadamente de acuerdo con

$$y_m = \frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2}(r_1 - r_2),$$

donde $r = (r_1 + r_2)/2$. (b) Demuestre luego que la cancelación total ocurre cuando $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, siendo n cualquier entero, y que el refuerzo total ocurre cuando $r_1 - r_2 = n\lambda$. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia en distancia desde dos puntos fijos es constante es una hipérbola, siendo los puntos fijos los focos. De aquí que cada valor de n produzca una línea hiperbólica de interferencia constructiva y una línea hiperbólica de interferencia destructiva. En los puntos en que r_1 y r_2 no son aproximadamente iguales (como cerca de las fuentes), las amplitudes de las ondas de S_1 y S_2 difieren y las cancelaciones son solamente parciales. (Ésta es la base del sistema de navegación OMEGA.)

37. Una fuente S y un detector D de ondas de alta frecuencia están a una distancia d en el suelo. Se detecta que la onda dirigida desde S está en fase en D con la onda que parte de S , que se refleja por una capa horizontal situada a una altitud H (Fig. 31). Los rayos incidente y reflejado forman el mismo ángulo con la capa reflectora. Cuando la capa se eleva una distancia h , no se detecta ninguna señal en D . Desprecie la absorción de la atmósfera y halle la relación entre d, h, H , y la longitud de onda λ de las ondas.
38. Refiérase al problema 37 y a la figura 31. Suponga que $d = 230$ km y $H = 510$ km. Las ondas son ondas de radio de 13.0 MHz ($v = 3.00 \times 10^8$ m/s). En el detector D la

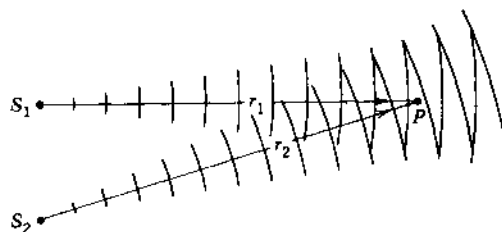


Figura 30 Problema 36.

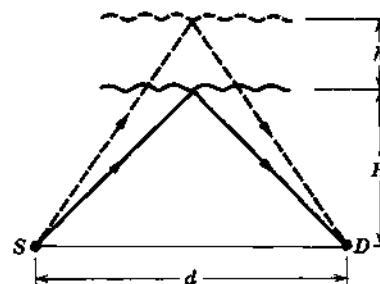


Figura 31 Problemas 37 y 38

intensidad de la señal combinada varía desde un máximo hasta cero y regresa de nuevo a un máximo seis veces en 1 minuto. ¿Con qué velocidad vertical se está moviendo la capa reflectora? (La capa se mueve lentamente, de modo que la distancia vertical desplazada en 1 min es pequeña en comparación con H y d .)

Sección 19-9 Ondas estacionarias

39. Una cuerda fija en ambos extremos tiene una longitud de 8.36 m y una masa de 122 g. Está sujeta a una tensión de 96.7 N y se pone en vibración. (a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda? (b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible? (c) Indique la frecuencia de esa onda.
40. Una cuerda de guitarra de nilón tiene una densidad de masa lineal de 7.16 g/m y está bajo una tensión de 152 N. Los soportes fijos están separados por 89.4 cm. La cuerda vibra según el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura 32. Calcule (a) la velocidad, (b) la longitud de onda, y (c) la frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da lugar a esta vibración.
41. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por

$$y = 0.15 \text{ sen } (0.79x - 13t),$$

donde x y y están expresadas en metros y t en segundos. (a) ¿Cuál es el desplazamiento en $x = 2.3$ m, $t = 0.16$ s? (b) Escriba la ecuación de una onda que, cuando se sume a la dada, produciría ondas estacionarias en la cuerda. (c) ¿Cuál es el desplazamiento de la onda estacionaria resultante en $x = 2.3$ m, $t = 0.16$ s?

42. Una cuerda vibra según la ecuación

$$y = 0.520 \text{ sen } (1.14x) \cos (137t),$$

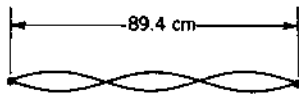


Figura 32 Problema 40.

donde x y y están en centímetros y t en segundos. (a) ¿Cuáles son la amplitud y la velocidad de las ondas componentes cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración? (b) Halle la distancia entre nodos. (c) ¿Cuál es la velocidad de una partícula de la cuerda en posición $x = 1.47$ cm en el tiempo $t = 1.36$ s?

43. Las vibraciones que parten de un diapason de 622 Hz producen ondas estacionarias en una cuerda sujeta en ambos extremos. La velocidad de la onda para la cuerda es de 388 m/s. La onda estacionaria tiene cuatro rizados y una amplitud de 1.90 mm. (a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? (b) Escriba una ecuación para el desplazamiento de la cuerda en función de la posición y del tiempo.
44. Considérese una onda estacionaria que sea la suma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas pero por lo demás son idénticas. Demuestre que la energía cinética máxima en cada rizo de la onda estacionaria es $2\pi^2\mu y_m^2\nu v$.
45. Una onda viajera incidente, de amplitud A , se refleja sólo parcialmente desde un extremo, siendo A_r la amplitud de la onda reflejada. La superposición resultante de dos ondas de amplitudes diferentes que viajan en direcciones opuestas produce un patrón de ondas tipo onda estacionaria cuya envolvente se muestra en la figura 33. La razón de onda estacionaria (SWR, de *standing wave ratio*) se define como $(A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{\text{máx}}/A_{\text{mín}}$, y el porcentaje de reflexión se define como la razón entre la potencia promedio en la onda reflejada y la potencia promedio en la onda incidente, multiplicada por 100. (a) Demuestre que la $\text{SWR} = \infty$ para el 100% de reflexión y que la $\text{SWR} = 1$ cuando no hay reflexión. (b) Demuestre que una medición de la SWR justo antes del extremo revela la reflexión porcentual que ocurre en el extremo de acuerdo con la fórmula

$$\% \text{ de reflejo} = [(SWR - 1)^2 / (SWR + 1)^2](100).$$

46. Calcule (a) la SWR (razón de onda estacionaria) y (b) la reflexión porcentual en el extremo para la envolvente del patrón de onda estacionaria mostrado en la figura 33.

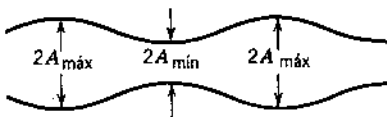


Figura 33 Problemas 45 y 46.

47. Dos cuerdas de densidad de masa lineal μ_1 y μ_2 están anudadas entre sí en $x = 0$ y estiradas a una tensión F . Una onda $y = A \sin k_1(x - v_1t)$ en la cuerda de densidad μ_1 llega a la unión de las dos cuerdas, en donde parte se transmite

por la cuerda de densidad μ_2 parte se refleja. Llamemos a estas ondas $B \sin k_2(x - v_2t)$ y $C \sin k_1(x + v_1t)$, respectivamente. (a) Suponiendo que $k_2v_2 = k_1v_1 = \omega$ y que el desplazamiento del nudo que surge de las ondas incidente y reflejada sea el mismo que el que surge de la onda transmitida, demuestre que $A = B + C$. (b) Si se supone que ambas cuerdas tienen cerca del nudo la misma pendiente (¿por qué?), es decir, dy/dx en la cuerda 1 = dy/dx en la cuerda 2, demuestre que

$$C = A \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

¿En qué condiciones es C negativa?

Sección 19-10 Resonancia

48. Una cuerda de violín de 15 cm, fija en ambos extremos, está vibrando en su modo $n = 1$. La velocidad de las ondas en este alambre es de 250 m/s, y la velocidad del sonido en el aire es de 348 m/s. ¿Cuáles son (a) la frecuencia y (b) la longitud de onda de la onda sonora emitida?
49. ¿Cuáles son las tres frecuencias más bajas de las ondas estacionarias en un alambre de 9.88 m de longitud que tiene una masa de 0.107 kg, y que está estirado bajo una tensión de 236 N?
50. Un alambre de 1.48 m de longitud tiene una masa de 8.62 g y se halla bajo una tensión de 122 N. El alambre está sujeto rígidamente en ambos extremos y se pone en vibración. Calcule (a) la velocidad de las ondas en el alambre, (b) las longitudes de onda de las ondas que producen ondas estacionarias de uno y dos rizados en el alambre y (c) las frecuencias de las ondas en (b).
51. Un extremo de una cuerda de 120 cm se mantiene fijo. El otro extremo está unido a un anillo sin peso que puede deslizarse a lo largo de una barra sin fricción como se muestra en la figura 34. ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más grandes posibles de ondas estacionarias en la cuerda? Trace las ondas estacionarias correspondientes.

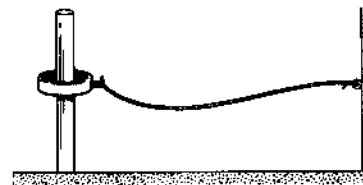


Figura 34 Problema 51.

52. Una cuerda de 75.6 cm está estirada entre soportes fijos. Se observa que tiene frecuencias de resonancia de 420 y 315 Hz, y ninguna otra entre estas dos. (a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia más baja de esta cuerda? (b) ¿Cuál es la velocidad de onda en esta cuerda?
53. En un experimento sobre ondas estacionarias, una cuerda de 92.4 cm de longitud se une al vástago de un diapason eléctrico que vibra en dirección perpendicular a la longitud de la cuerda con una frecuencia de 60.0 Hz. La masa de la cuerda es 44.2 g. ¿A qué tensión debe someterse la

cuerda (en el otro extremo tiene conectadas a ella pesas) para que vibre con cuatro rizos?

54. Un alambre de aluminio de longitud $L = 60.0$ cm y área de la sección transversal 1.00×10^{-2} cm² de área en su sección transversal está conectado a un alambre de acero de la misma área de su sección transversal. El alambre compuesto, cargado con un bloque de 10.0 kg de masa m , está dispuesto como se muestra en la figura 35 de modo que la distancia L_2 desde la junta a la polea de soporte es de 86.6 cm. Se inducen ondas trasversales en el alambre usando una fuente externa de frecuencia variable. (a) Halle la frecuencia de excitación de ondas estacionarias más baja observada de modo que la unión del alambre sea un nodo. (b) ¿Cuál es el número total de nodos observado a esta frecuencia, excluyendo los dos de los extremos del alambre? La densidad del aluminio es de 2.60 g/cm³ y la del acero es de 7.80 g/cm³.

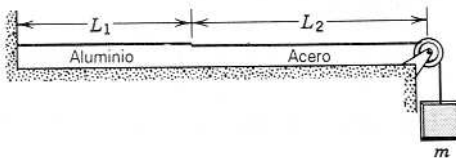


Figura 35 Problema 54.

55. Una cuerda de piano de 1.4 m de longitud está hecha de acero con una densidad de 7.8 g/cm³ y un módulo de Young de 220 MPa. La tensión en la cuerda produce una deformación de 1.0%. Calcule la frecuencia de resonancia más baja de la cuerda.

Proyectos de computación

56. (a) Inicialmente una cuerda tensa tiene una forma dada por $f_1(x) = 0.02e^{-x-3t/9}$, en donde f y x están en metros. Supongamos una pulsación que se mueva con una velocidad $v = 25$ m/s en dirección x positiva, de modo que el desplazamiento de la cuerda en la coordenada x y en el tiempo t esté dada por $y_1(x,t) = f(x - vt) = 0.02e^{-x - (x-25t)/9}$. Úsese un programa de computación o una hoja de cálculo para trazar $y_1(x,t)$ en función de x desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0, 0.5, 1.0$, y 1.5 s. Con preferencia trace las gráficas en la pantalla de un monitor y diseñe el programa de modo que pueda cambiarse fácilmente el valor de t y se pueda volver a trazar. Observe la posición del máximo de la pulsación en cada gráfica y verifique que las gráficas dibujan una pulsación que viaja en dirección x positiva, con una velocidad de 25 m/s, y se mueve sin cambiar de forma. (b) Una segunda pulsación tiene la forma $f_2(x) = 0.02e^{-x-45t/9}$ en $t = 0$ y se mueve en la dirección x negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_2(x,t) = f_2(x + vt)$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0, 0.5, 0.8, 1.0$, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan una pulsación que se mueve en la dirección x negativa. (c) Suponga que ambas pulsaciones están en la cuerda al mismo tiempo. Use su programa para trazar $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0, 0.5, 1.0$, y 1.5 s.

Verifique que las gráficas dibujan las pulsaciones moviéndose una hacia la otra y que cuando se reúnen el desplazamiento de la cuerda es grande en la región donde se superponen. Las pulsaciones se mueven luego alejándose entre sí sin cambiar de forma. (d) Suponga que la segunda onda tiene la forma $f_2(x,t) = -0.02e^{-(x-45t)/9}$ en $t = 0$ y que viaja en dirección x negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0, 0.5, 0.8, 1.0$, y 1.5 s. Cuando se reúnen las dos pulsaciones, la acción de una tiende a anular la acción de la otra. Para un valor del tiempo, el desplazamiento de la cuerda es cero en cualquier parte. Las pulsaciones continúan luego su camino sin cambiar de forma.

57. Pueden generarse ondas en una cuerda tensa moviendo uno de sus extremos. Supongamos que la cuerda sea extremadamente larga y hagamos que $g(t)$ sea el desplazamiento del extremo que se mueve, el cual se presume que está en $x = 0$. Si la cuerda se tira a lo largo del eje x positivo, en el tiempo t el desplazamiento en el punto en x es el mismo que el desplazamiento en el extremo pero en un tiempo $t - x/v$ anterior, donde v es la velocidad de la onda. Entonces, el desplazamiento en x está dado por $y(x,t) = g(t - x/v)$. (a) Supongamos que, comenzando en $t = 0$ y continuando durante 0.20 s, la cuerda en $x = 0$ se jala hacia arriba en la dirección y positiva con una velocidad constante de 0.15 m/s. Luego es mantenida en su desplazamiento final. Entonces $g(t) = 0$ para $t < 0$, $g(t) = 0.15t$ para $0 < t < 0.20$ s, y $g(t) = 0.15 \times 0.20 = 0.030$ m para $t > 0.20$ s. Considere que la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y use un programa de computadora para hacer gráficas separadas de $y(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0, 0.1, 0.2, 1.0, 2.0$, y 3.0 s. Para esto, haga que la computadora calcule $u = x - vt$ para cada valor de x seleccionado, luego haga $a = 0$ si $u < 0$, $a = 0.15u$ si $0 < u < 0.20$, y $a = 0.03$ si $u > 0.20$. (b) Considere que la velocidad de la onda sea de 15 m/s y trace $y(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0$, y 1.25 s. (c) ¿Qué determina la pendiente de la cuerda al moverse la pulsación a lo largo de ella? Si el extremo de la cuerda se eleva más rápidamente, ¿aumenta la pendiente de la cuerda o disminuye? Si la velocidad de la onda aumenta, ¿aumenta la pendiente o disminuye?
58. Comenzando en el tiempo $t = 0$ y continuando durante 0.40 s, el extremo de una cuerda tensa se mueve ligeramente hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. Su desplazamiento está dado por $g(t) = 0.020 \text{ sen}(31.4t)$, donde g está en metros y t en segundos. Use una computadora para hacer gráficas separadas del desplazamiento $y(x,t)$ de la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para cada uno de los tiempos $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$, y 2.5 s. Véase el proyecto anterior para algunas sugerencias.
59. Una cuerda tensa tiene inicialmente una forma distorsionada dada por $f(x) = 0.02e^{-x-3t/9}$, donde f y x están en metros. La pulsación viaja 5.0 m/s en la dirección x positiva a lo largo de la cuerda hasta que llega al extremo fijo en $x = 20$ m, en donde se refleja. El desplazamiento de la cuerda está dado por $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$, en donde y_1 es la pulsación incidente y y_2 es la pulsación

reflejada. Por supuesto, la pulsación incidente está dada por $y_1(x, t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x-vt-5)^2/4.5}$. Demuestre que la pulsación reflejada está dada por $y_2(x, t) = -f(2L - x - vt) = -0.02e^{-(2L-x-vt-5)^2/4.5}$, donde L es la coordenada del punto fijo. Ésta es la única función de $x + vt$ tal que $y_1(L, t) + y_2(L, t) = 0$. Use un programa de computadora o una hoja de cálculo para hacer graficas separadas del desplazamiento de la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0, 1.0, 2.0, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 4.0,$ y 5.0 s. La función a trazar es $y(x, t) = 0.020e^{-(x-vt-5)^2/4.5} - 0.020e^{-(2L-x-vt-5)^2/4.5}$.

60. Una cuerda tensa que transporta una onda tiene energía: energía cinética porque se mueve y energía potencial porque está distorsionada. Si μ es la densidad de masa lineal, entonces la energía cinética en una longitud infinitesimal dx está dada por $\frac{1}{2}\mu(\partial y/\partial t)^2 dx$. Si F es la tensión en la cuerda, entonces la energía potencial en una longitud infinitesimal está dada por $\frac{1}{2}F(\partial y/\partial x)^2 dx$. Puesto que $y(x, t) = f(x \pm vt)$ y $v = \sqrt{F/\mu}$, estas dos cantidades son exactamente iguales para cuerdas de la misma longitud. Entonces la energía mecánica total en la cuerda desde x hasta $x + \Delta x$ está dada por

$$E \approx \mu \int_x^{x+\Delta x} (\partial y/\partial t)^2 dx.$$

Puede usarse el programa de integración numérica descrito en los proyectos de computación del capítulo 8 para evaluar integrales de esta forma.

(a) La tensión en una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 0.080 kg/m es de 2.0 N. En el tiempo $t = 0$ la cuerda está distorsionada de modo que tiene la forma dada por $f(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, donde f y x están en metros. Suponga que la pulsación se mueve en la dirección x positiva. Demuestre que

$$E = (0.04/9)^2 \mu v^2 \int_x^{x+\Delta x} (x - vt - 5)^2 e^{-(x-vt-5)^2/4.5} dx.$$

- (b) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m en $t = 1$ s. Este segmento incluye a todas las pulsaciones excepto en las colas muy pequeñas. El uso de 200 intervalos produciría una precisión de cuatro cifras significativas. (c) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 30$ m hasta $x = 50$ m en $t = 7$ s. El resultado sería el mismo que en la parte (b) y le indicaría que la energía se ha movido desde la región de alrededor de $x = 10$ m hasta la región de alrededor de $x = 40$ m. Esto tiene sentido, porque la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y la onda viajó 30 m en los 6 s transcurridos. (d) La cantidad a la que la energía pasa el punto en x está dada por $P = -F(\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)$, así que en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ la energía que pasa por x está dada por

$$E = \int_t^{t+\Delta t} P dt = -F \int_t^{t+\Delta t} (\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t) dt.$$

Para la pulsación descrita arriba demuestre que

$$E = (0.04/9)^2 F v \int_t^{t+\Delta t} (x - vt - 5)^2 e^{-(x-vt-5)^2/4.5} dt.$$

Use una integración numérica para calcular la energía que pasó por el punto en $x = 25$ m desde $t = 1$ hasta $t = 7$ s. El resultado es de nuevo el mismo que antes, indicando que toda la energía alrededor de $x = 10$ m en $t = 1$ s pasó por $x = 25$ m en su camino hacia la región alrededor de $x = 40$ m.

CAPÍTULO 20

ONDAS SONORAS

En el capítulo 19 hemos estudiado las ondas mecánicas transversales, como las de las vibraciones de una cuerda en tensión. En una onda mecánica longitudinal, las partículas de material que transmiten la onda vibran en dirección de la propagación de la onda. La onda mecánica longitudinal más conocida es la onda sonora. El ser humano puede detectar estas ondas en la gama de frecuencias que va de unos 20 Hz a unos 20,000 Hz, gama que recibe el nombre de intervalo audible. Las ondas mecánicas longitudinales de frecuencia más alta se llaman ultrasónicas y se emplean para localizar objetos bajo el agua y para visualizar los órganos internos del cuerpo humano, en medicina; las ondas de frecuencia más baja se llaman infrasónicas, y un ejemplo de éstas son las ondas de presión sísmica producidas durante un terremoto.

Las ondas sonoras viajan a través de sólidos, líquidos, y gases: estudiaremos principalmente la propagación del sonido en el aire. Un sistema vibratorio (por ejemplo, la cuerda de una guitarra, nuestras cuerdas vocales, la membrana de un tambor) pone en movimiento al aire en su vecindad inmediata. Esa perturbación se propaga por el aire hasta llegar a nuestros tímpanos, donde un receptor y un amplificador asombrosamente delicados convierten esta perturbación mecánica en una señal eléctrica que va hasta el cerebro.

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las ondas sonoras, su propagación, y su producción mediante sistemas vibratorios.

20-1 LA VELOCIDAD DEL SONIDO

Si bien las ondas sonoras viajan normalmente en tres dimensiones, simplificaremos un poco nuestro análisis al considerar un sistema unidimensional. La figura 1 muestra un tubo equipado en un extremo con un émbolo móvil, el cual representa, por ejemplo, el cono móvil de un altoparlante. Suponemos que el tubo está lleno de un medio compresible, como el aire, y que es muy largo, de modo que no precisamos considerar las reflexiones desde el extremo lejano. Cuando el émbolo se mueve hacia atrás y hacia adelante, alternativamente comprime y enrarece el medio. Estas compresiones y enrarecimientos pueden considerarse (respectivamente) incrementos y decrementos de la densidad local con relación a su valor promedio en el medio, o quizá como incrementos y decrementos en la presión local con relación a su valor promedio. Estas dos descripciones nos transmiten la misma información pero tienen formas matemáticas diferentes, como veremos en la sección 20-2.

Como resultado de las fuerzas mecánicas internas del medio, las compresiones y enrarecimientos viajan a lo

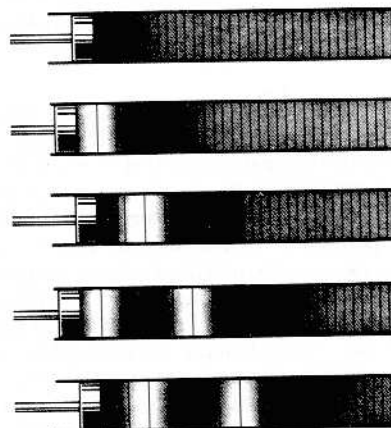


Figura 1 Ondas sonoras generadas dentro de un tubo por medio de un émbolo móvil que podría representar el cono móvil de un altoparlante. Las líneas verticales dividen al medio compresible dentro del tubo en capas de igual masa.

largo del tubo. Como en todas las ondas mecánicas, la velocidad de propagación depende de la razón entre una propiedad elástica del medio (la tensión, en el caso de las ondas transversales de una cuerda) y una propiedad inercial del medio (la densidad de masa lineal, en el caso de la cuerda). En ondas longitudinales, la propiedad elástica describe cómo responde el medio a los cambios de presión con un cambio de volumen; esto es el módulo volumétrico* presentado en la ecuación 5 del capítulo 17:

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V}, \quad (1)$$

donde Δp es el cambio de presión, y ΔV es el cambio del volumen V . El signo menos implica que un aumento de presión ($\Delta p > 0$) causa una disminución de volumen ($\Delta V < 0$).

La propiedad inercial del medio debe estar dada por su densidad ρ . Podemos llevar a cabo un análisis dimensional para determinar cómo depende la velocidad de B y ρ usando el mismo procedimiento empleado en la sección 19-4, y el resultado es

$$v = C \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad (2)$$

donde una vez más la constante sin dimensiones C no puede determinarse a partir de este método de análisis. Para completar la derivación nos remitimos, como hicimos en la sección 19-4, a un análisis mecánico basado en las leyes de Newton.

Análisis mecánico

La esencia de esta derivación sigue muy de cerca la de la sección 19-4. Consideremos, para simplificar, una sola pulsación de compresión, como la que pudiera producirse por una sola carrera del émbolo de la figura 1.

Supongamos que la pulsación de compresión viaja a través del tubo de izquierda a derecha con velocidad v .

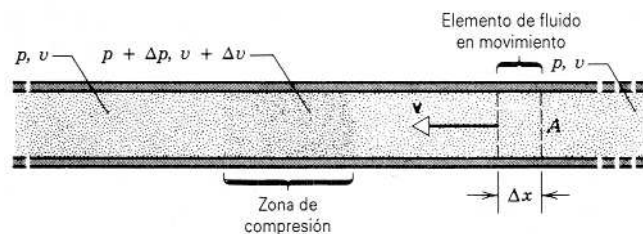


Figura 2 Una pulsación (compresión) se envía a través de un tubo largo. Se elige que el marco de referencia de esta figura sea el de la pulsación, de modo que el fluido corre de derecha a izquierda. Una rebanada de fluido de ancho Δx se mueve hacia la zona de compresión con velocidad v .

Para simplificar suponemos que la pulsación tiene caras anterior y posterior bien definidas y que tiene una presión y una densidad uniformes en su interior. Cuando analizábamos el movimiento de una pulsación transversal en una cuerda tensa en la sección 19-4, hallamos conveniente elegir un marco de referencia en el que la pulsación permaneciese estacionaria. Como lo indicamos en la figura 2, aquí lo hacemos así también. En esa figura, la pulsación (llamada “zona de compresión”) permanece estacionaria en nuestro marco de referencia mientras que el fluido se mueve a través de ella de derecha a izquierda con velocidad v .

Sigamos el movimiento del elemento de fluido móvil contenido entre las líneas verticales en la figura 2. Este elemento se mueve hacia la izquierda con velocidad v hasta que choca con la zona de compresión. El borde izquierdo del elemento de fluido entra a la zona de compresión en el tiempo t , y el borde derecho entra en el tiempo $t + \Delta t$. El intervalo de tiempo Δt depende del ancho Δx del elemento de acuerdo con $\Delta t = \Delta x/v$.

Durante el intervalo Δt , en que el elemento entra a esta zona, existe una presión $p + \Delta p$ en la cara anterior del elemento de fluido y una presión p en la cara posterior. Como resultado de la diferencia de presión Δp a través del elemento de fluido, se comprime y se decelera. Dentro de la zona, el elemento se mueve con una velocidad más baja $v + \Delta v$, siendo la cantidad Δv negativa. El elemento emerge finalmente de la cara izquierda de la zona, donde se expande hasta su volumen original y se acelera de nuevo a su velocidad original v como resultado del diferencial de presión Δp .

Apliquemos las leyes de Newton al elemento de fluido durante el intervalo de tiempo Δt durante el cual entra en la zona. La fuerza resultante que actúa durante este intervalo es

$$F = pA - (p + \Delta p)A = -\Delta p A, \quad (3)$$

donde A es el área de la sección transversal del tubo. Aquí hemos considerado que la dirección positiva es la de la velocidad, es decir, hacia la izquierda en la figura 2. El

* Un cambio de presión dado puede dar lugar a cambios diferentes en el volumen de un medio compresible, dependiendo de las circunstancias por las cuales cambie de presión. Por ejemplo, puesto que una compresión tiende a aumentar la temperatura del medio, podríamos dejar que escapase calor con el fin de que la temperatura permanezca constante. En tal caso, siendo un ejemplo los procesos fluidos estáticos estudiados en el capítulo 17, observaríamos un módulo volumétrico *isotérmico* (temperatura constante). Sin embargo, la capacidad de un gas para conducir calor (su *conductividad térmica*: véase la sección 25-7) es demasiado pequeña para que pueda fluir el calor entre las compresiones, más calientes, y los enrarecimientos, más fríos, a frecuencias audibles. En este caso, necesitamos el módulo volumétrico *adiabático* (sin transferencia de calor). En gases típicos, el módulo volumétrico adiabático es de alrededor de 1.4 veces el módulo volumétrico isotérmico. Los procesos isotérmicos y adiabáticos se estudian con mayor detalle en el capítulo 25.

TABLA 1 LA VELOCIDAD DEL SONIDO¹

Medio	Velocidad (m/s)
Gases	
Aire (0° C)	331
Aire (20° C)	343
Helio	965
Hidrógeno	1284
Líquidos	
Agua (0° C)	1402
Agua (20° C)	1482
Agua de mar ²	1522
Sólidos	
Aluminio	6420
Acero	5941
Granito	6000

¹ A 0° C y 1 atm de presión, a menos que se indique lo contrario.

² A 20° C y 3.5% de salinidad.

volumen original V del elemento es $A \Delta x = A v \Delta t$, y su masa es $\rho v A \Delta t$, donde ρ es la densidad sin perturbación del fluido afuera de la zona de compresión. La aceleración a es $\Delta v / \Delta t$, y puesto que Δv es negativa, a es negativa. La segunda ley de Newton da entonces

$$F = ma$$

$$-\Delta p A = (\rho v A \Delta t) \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

la cual podemos escribir como:

$$\rho v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta v / v} \quad (4)$$

Durante el intervalo Δt , el borde anterior del elemento de fluido se mueve con velocidad $v + \Delta v$, y por tanto se mueve una distancia $(v + \Delta v)\Delta t$. En ese mismo tiempo, el borde posterior se mueve una distancia $v \Delta t$. El ancho del elemento de fluido cambia entonces en ese intervalo en una cantidad negativa $\Delta v \Delta t$, y el volumen cambia en correspondencia en la cantidad $\Delta V = A \Delta v \Delta t$. De aquí que

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta v \Delta t}{A v \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

y obtenemos, usando la ecuación 1,

$$\rho v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta V / V} = B. \quad (5)$$

Entonces

$$v = \sqrt{B/\rho}, \quad (6)$$

lo cual demuestra que la constante C de la ecuación 2 tiene el valor 1.

Si el medio en el que viaja la pulsación es una barra delgada y sólida en vez de un fluido, el módulo volumétrico B de la ecuación 6 debe ser reemplazado por el módulo de Young (véase la sección 14-5). Si el sólido es extenso, debemos tener en cuenta el hecho de que

un sólido ofrece una resistencia elástica a las fuerzas tangenciales o cortantes, y la velocidad de las ondas longitudinales depende del módulo cortante al igual que del módulo volumétrico. (Tanto las ondas longitudinales como las transversales pueden propagarse en un sólido extenso. Aquí consideraremos únicamente las ondas longitudinales.) La tabla 1 ofrece algunos valores representativos de la velocidad del sonido en diversos medios.

20-2 ONDAS VIAJERAS LONGITUDINALES

Consideremos un tren continuo de compresiones y enrarecimientos que viajan a lo largo de un tubo lleno de fluido, como en la figura 3. Si nos colocamos en alguna posición fija a lo largo del tubo, existen dos formas de observar esta onda viajera. (1) Podemos enfocar nuestra atención al *desplazamiento* oscilatorio hacia atrás y hacia adelante de un elemento de fluido en nuestra posición al pasar la onda a través de ella. (2) Por otra parte, podemos centrarnos en las variaciones periódicas de *presión* que ocurren en nuestro punto de observación. En esta sección exploraremos la conexión entre estas descripciones de una onda sonora como una onda de desplazamiento y una onda de presión.

Al avanzar la onda a lo largo del tubo, cada pequeño elemento de volumen del fluido oscila respecto a su posición de equilibrio. El desplazamiento es hacia la derecha o hacia la izquierda a lo largo de la dirección de propagación de la onda, la cual hemos considerado en dirección x positiva. Representamos al desplazamiento del elemento de volumen a partir de su posición de equilibrio en x (nuestro lugar de observación) por $s(x, t)$. Esta función es análoga al desplazamiento transversal $y(x, t)$ estudiado en el capítulo 19, con una excepción importante: el desplazamiento s es *a lo largo de la dirección de propagación* en una onda longitudinal, mientras que en una onda transversal el desplazamiento y es *en ángulo recto con la dirección de la propagación*. En el caso de una onda sinusoidal, podemos escribir, por lo tanto, la ecuación del desplazamiento longitudinal como:

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t), \quad (7)$$

donde hemos supuesto que la onda viaja en dirección positiva x . También hemos hecho una elección particular de la constante de fase para la onda de desplazamiento, lo cual nos permite expresarla en términos de función coseno. La amplitud s_m es bastante pequeña en las ondas sonoras: véase el problema muestra 1.

Por lo general, es más recomendable tratar con variaciones de presión en una onda sonora que con los desplazamientos reales de las partículas. Escribamos por lo tanto

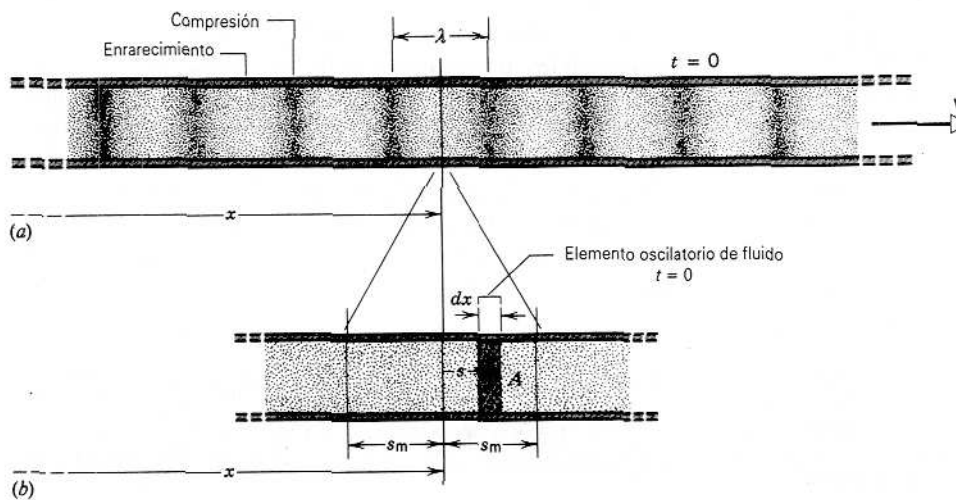


Figura 3 (a) Instantánea, tomada en $t = 0$, de una onda sonora sinusoidal que se mueve con velocidad v a través de un tubo largo lleno de fluido. (b) Vista ampliada de una región cercana a la posición x . Un elemento de fluido oscila respecto a su posición de equilibrio al pasar la onda a través de él. En el momento que se ilustra, el plano central del elemento se halla desplazado una distancia s de su posición de equilibrio.

la ecuación de la onda en términos de la variación de presión en lugar de hacerlo en términos del desplazamiento.

De la ecuación 1, podemos escribir

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}.$$

Igual que hicimos que s representara el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio, hagamos ahora que Δp represente el cambio desde la presión p_0 no perturbada. Buscamos una expresión del cambio de presión Δp en función de la posición x y del tiempo t , es decir, $\Delta p(x, t)$. La presión real en cualquier punto será entonces $p_0 + \Delta p(x, t)$, que podría ser mayor o menor que p_0 dependiendo de si Δp es positiva o negativa en ese punto y en ese momento.

Una capa de fluido a presión p_0 con un espesor Δx y un área A en su sección transversal tiene un volumen $V = A \Delta x$. Cuando la presión cambia, el volumen cambia en $A \Delta s$, donde Δs es la cantidad en que cambia el espesor de la capa durante la compresión o el enrarecimiento. De aquí que

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{A \Delta s}{A \Delta x}.$$

Cuando hacemos que $\Delta x \rightarrow 0$ de modo que la capa de fluido se contraiga hasta un espesor infinitesimal, obtenemos

$$\Delta p = -B \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (8)$$

Hemos empleado una notación de derivada parcial porque s es una función tanto de x como de t . Si el desplazamiento

de la partícula es sinusoidal, entonces, según la ecuación 7, obtenemos

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -ks_m \text{ sen}(kx - \omega t),$$

y de la ecuación 8

$$\Delta p(x, t) = Bks_m \text{ sen}(kx - \omega t). \quad (9)$$

De aquí que la variación de la presión en cada posición x sea también sinusoidal.

A causa de que $v = \sqrt{B/\rho}$, podemos escribir la ecuación 9 más convenientemente como:

$$\Delta p(x, t) = [k\rho v^2 s_m] \text{ sen}(kx - \omega t). \quad (10)$$

Recordemos que Δp representa el cambio a partir de la presión p_0 no perturbada. El término entre corchetes representa el cambio máximo de la presión y se denomina *amplitud de la presión*. Si denotamos a ésta por Δp_m , entonces

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \text{ sen}(kx - \omega t), \quad (11)$$

donde

$$\Delta p_m = k\rho v^2 s_m. \quad (12)$$

De aquí que una onda sonora pueda considerarse bien como una onda de desplazamiento o bien como una onda de presión. Si la primera se escribe como una función coseno, la otra será una función seno. La onda de desplazamiento está entonces a 90° fuera de fase con la onda de presión. Es decir, cuando el desplazamiento a partir del equilibrio en un punto sea un máximo o un mínimo, la presión en exceso ahí será de cero; cuando el despla-

miento en un punto sea cero, el exceso o deficiencia de presión será ahí un máximo. La ecuación 12 da la relación entre la amplitud de la presión (variación máxima de la presión a partir del equilibrio) y la amplitud del desplazamiento (variación máxima de la posición a partir del equilibrio). Conviene que usted compruebe la consistencia de las dimensiones de cada lado de la ecuación 12.

Si bien hemos descrito a una onda sonora en términos ya sea de una onda de presión o de una onda de desplazamiento, las dos descripciones no son equivalentes, por lo general. Podemos escoger fácilmente entre cualquiera de las dos descripciones sólo cuando una sola onda longitudinal se propaga en una sola dirección. Cuando consideramos la reflexión de una onda sonora en el extremo de un tubo, o cuando superponemos dos ondas sonoras que interfieren en un punto, el uso de la descripción de la onda de desplazamiento puede conducir a errores serios.* Por ejemplo, consideremos dos ondas sonoras que parten de fuentes diferentes (quizá, dos altoparlantes) y que viajan en direcciones diferentes e interfiere en un punto, de modo que una onda da un cambio de presión Δp y la otra $-\Delta p$. Mediante la descripción basada en la presión, esperamos una interferencia completamente destructiva en ese punto, porque las presiones se suman como escalares. Sin embargo, la suma de los desplazamientos (que tienen lugar en las direcciones de viaje de las dos ondas) no da cero, porque son vectores en direcciones diferentes. *Suele ser preferible describir a una onda sonora como una onda de presión* para evitar tales dificultades. Además, como veremos en la sección siguiente, es el cambio de la presión, y no el cambio del desplazamiento, lo que se detecta por el oído y por el micrófono.

Por último, observemos que en esta sección hemos tratado al fluido como un medio continuo. Sin embargo, en un gas los espacios entre las moléculas son grandes (en comparación con el tamaño de las moléculas), y las moléculas se mueven con un movimiento térmico al azar. Las oscilaciones producidas por una onda sonora se superponen a estos movimientos térmicos al azar. El impulso dado a una molécula se transmite a otra molécula luego de que la primera se mueve en el espacio vacío entre ellas y choca con la segunda. Existe entonces una conexión íntima entre la velocidad molecular promedio en un fluido y la velocidad del sonido en ese fluido. En particular, al aumentar la temperatura, la velocidad molecular promedio y la velocidad del sonido en un gas crecen exactamente de la misma manera.

Problema muestra 1 La variación máxima de presión Δp_m que puede tolerar el oído humano en sonidos fuertes es de

* Para un estudio cuidadoso de este punto, véase "Pressure and Displacement in Sound Waves", por C. T. Tindle, *American Journal of Physics*, septiembre de 1984, pág. 749.

alrededor de 28 Pa a 1000 Hz. El sonido más débil que puede captar el oído a 1000 Hz tiene una amplitud de presión de alrededor de 2.8×10^{-5} Pa. Halle las amplitudes de desplazamiento correspondientes.

Solución Partiendo de la tabla 1, $v = 343$ m/s en el aire a la temperatura ambiente, de modo que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{v} = \frac{2\pi \times 10^3 \text{ Hz}}{343 \text{ m/s}} = 18.3 \text{ rad/m.}$$

La densidad del aire en estas condiciones es de 1.21 kg/m^3 . De aquí que, para $\Delta p_m = 28$ Pa, obtengamos, usando la ecuación 12,

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{k\rho v^2} = \frac{28 \text{ Pa}}{(18.3 \text{ rad/m})(1.21 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

Las amplitudes del desplazamiento para los sonidos más fuertes son de alrededor de 10^{-5} m, realmente un valor muy pequeño. Para los sonidos más débiles, obtenemos de manera similar

$$s_m = \frac{2.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}}{(18.3 \text{ rad/m})(1.21 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Esto es de alrededor de un décimo del radio de un átomo típico y sugiere cuán sensible debe ser el oído para detectar vibraciones de una amplitud tan pequeña.

20-3 POTENCIA E INTENSIDAD DE LAS ONDAS SONORAS

Seguiremos los métodos del capítulo 19 para calcular la potencia liberada por una onda sonora, siendo ahora la principal diferencia que la velocidad u de la partícula es a lo largo de la dirección de la onda. Al viajar la onda de presión, cada elemento de fluido ejerce una fuerza sobre el elemento que está adelante de él; la magnitud de la fuerza neta es $F = A \Delta p$, donde A es el área de la sección transversal del elemento de fluido. Usando la ecuación 11 para Δp , hallamos que la fuerza es

$$F = A \Delta p_m \text{ sen}(kx - \omega t). \quad (13)$$

La velocidad de la delgada rebanada de fluido, como se indica en la figura 3, es

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m [-\text{sen}(kx - \omega t)]. \quad (14)$$

La potencia abastecida al elemento de fluido es

$$P = uF = A\omega \Delta p_m s_m \text{ sen}^2(kx - \omega t). \quad (15)$$

Usando la ecuación 12, podemos escribir esto como:

$$P = \frac{A(\Delta p_m)^2}{\rho v} \text{ sen}^2(kx - \omega t). \quad (16)$$

Como lo hicimos en el capítulo 19 para el caso de una onda transversal que viaja a lo largo de la cuerda, prome-

diamos la potencia dentro de un ciclo; puesto que el valor promedio de $\sin^2 \theta$ es $\frac{1}{2}$, la potencia promedio es

$$\bar{P} = \frac{A(\Delta p_m)^2}{2\rho v} \quad (17)$$

Como en el caso de la onda transversal, la potencia depende del *cuadrado* de la amplitud, en este caso la amplitud de presión. Obsérvese también que la frecuencia no aparece explícitamente en la ecuación 17 (aunque aparecería si, en cambio, expresáramos la potencia promedio en términos de la amplitud del desplazamiento). De aquí que, midiendo las amplitudes de presión, podamos comparar directamente las intensidades de los sonidos que tienen frecuencias *diferentes*. Por esta razón, los instrumentos que miden los cambios de presión son preferibles a los que miden los desplazamientos; además, como lo aprendimos en el problema muestra 1, los desplazamientos de los sonidos audibles más débiles son muy pequeños y sería difícil medirlos directamente.

Cuando comparamos sonidos diferentes, es más útil usar la *intensidad* (la potencia promedio por unidad de área) de la onda. Partiendo de la ecuación 17, podemos obtener de inmediato la intensidad I :

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v} \quad (18)$$

Puesto que el oído es tan sensible (es capaz de responder a intensidades dentro de un intervalo de 12 órdenes de magnitud), introducimos una escala logarítmica de intensidades llamada *nivel de sonido SL* (de *sound level*)

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (19)$$

El SL se define respecto a una intensidad de referencia I_0 , la cual se escoge igual a 10^{-12} W/m^2 (valor típico del umbral de la audición humana). Los niveles de sonido definidos de esta manera se miden en unidades de *decibel* (dB). Un sonido de intensidad I_0 tiene un nivel de sonido de 0 dB, mientras que el sonido en la parte superior del espectro de audición humana, llamada umbral del dolor, tiene una intensidad de 1 W/m^2 y un SL de 120 dB. Cada aumento de la intensidad I multiplicada por un factor de 10 corresponde a añadir 10 dB al SL .

Podemos usar también el dB como una medida *relativa* para comparar diferentes sonidos entre sí, en lugar de usar la intensidad de referencia. Supongamos que deseamos comparar dos sonidos de intensidades I_1 e I_2 :

$$\begin{aligned} SL_1 - SL_2 &= 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} \\ &= 10 \log \frac{I_1}{I_2} \end{aligned} \quad (20)$$

Por ejemplo, dos sonidos, cuya razón de intensidades sea 2, difieren en SL en $10 \log 2 = 3 \text{ dB}$.

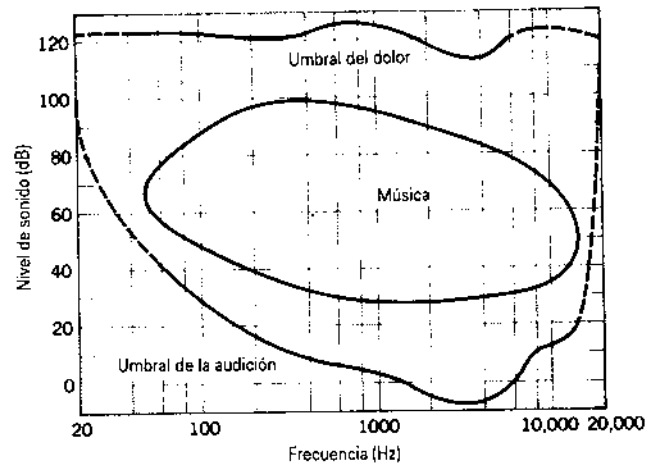


Figura 4 Banda promedio de los niveles de sonido de la audición humana. Observe la dependencia de los niveles de umbral de la frecuencia. Un sonido que apenas podemos oír a 100 Hz debe tener 1000 veces la potencia acústica (un nivel de sonido de 30 dB mayor) que uno que apenas podemos oír a 1000 Hz, porque nuestro oído es mucho menos sensible a 100 Hz.

La sensibilidad del oído humano varía con la frecuencia. El umbral de 10^{-12} W/m^2 se aplica únicamente en las frecuencias intermedias de alrededor de 1000 Hz. A frecuencias más elevadas, digamos 10,000 Hz, el umbral se eleva a alrededor de 10 dB (10^{-11} W/m^2), mientras que a una frecuencia más baja de 100 Hz el umbral está en unos 30 dB (10^{-9} W/m^2). Se necesitan 1000 veces la intensidad del sonido a 100 Hz para producir la misma respuesta fisiológica que una intensidad de sonido dada a 1000 Hz. La figura 4 muestra la variación con la frecuencia de los umbrales de la audición y del dolor, y la tabla 2 muestra algunos niveles de sonido representativos y sus intensidades correspondientes.

Problema muestra 2 Se emiten ondas de sonido esféricas uniformemente en todas direcciones a partir de una fuente puntual, siendo de 25 W la potencia irradiada P . ¿Cuáles son la intensidad y el nivel de sonido de la onda de sonido a una distancia $r = 2.5 \text{ m}$ desde la fuente?

Solución Toda la potencia irradiada P debe pasar a través de una esfera de radio r centrada en la fuente. Entonces

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Vemos que la intensidad del sonido disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia desde la fuente. Numéricamente, tenemos que

$$I = \frac{25 \text{ W}}{(4\pi)(2.5 \text{ m})^2} = 0.32 \text{ W/m}^2$$

TABLA 2 ALGUNAS INTENSIDADES Y NIVELES DE SONIDO

<i>Sonido</i>	<i>Intensidad (W/m²)</i>	<i>Intensidad relativa (I/I₀)</i>	<i>Nivel de sonido (dB)</i>
Umbral de la audición	1 × 10 ⁻¹²	10 ⁰	0
El murmullo de las hojas	1 × 10 ⁻¹¹	10 ¹	10
Un murmullo (a 1 m)	1 × 10 ⁻¹⁰	10 ²	20
Calle de la ciudad, sin tránsito	1 × 10 ⁻⁹	10 ³	30
Oficina, aula	1 × 10 ⁻⁷	10 ⁵	50
Conversación normal (a 1 m)	1 × 10 ⁻⁶	10 ⁶	60
Martillo perforador (a 1 m)	1 × 10 ⁻³	10 ⁹	90
Grupo de rock	1 × 10 ⁻¹	10 ¹¹	110
Umbral del dolor	1	10 ¹²	120
Motor de propulsión a chorro (a 50 m)	10	10 ¹³	130
El cohete Saturno (a 50 m)	1 × 10 ⁸	10 ²⁰	200

$$\begin{aligned}
 SL &= 10 \log \frac{I}{I_0} \\
 &= 10 \log \frac{0.32 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 115 \text{ dB.}
 \end{aligned}$$

Una comparación de este resultado con la tabla 2 sugiere el planteamiento de dudas acerca de la cordura de comprar amplificadores de 100 W para uso en el hogar.

20-4 ONDAS LONGITUDINALES ESTACIONARIAS

Consideraremos ahora lo que sucede cuando una onda sonora como la mostrada en la figura 1 llega al extremo del tubo. En analogía con la onda transversal de la cuerda (véase la figura 22 del capítulo 19), ocurre una reflexión, y la onda reflejada viaja de regreso por el tubo en dirección opuesta. El comportamiento de la onda en el extremo reflejante depende de si el extremo del tubo está abierto o cerrado.

Consideremos primero un tubo cerrado por un extremo. Al viajar la onda por el tubo y llegar al extremo, puede comprimir a las capas de aire en el extremo cerrado contra la barrera fija. En ese extremo, la presión puede por lo tanto variar con su amplitud máxima, y *el extremo cerrado es un antinodo de presión*. En un extremo cerrado una onda de presión se refleja de manera similar en que se refleja una onda de desplazamiento transversal en el extremo libre de una cuerda (Fig. 22b del capítulo 19). Si, por ejemplo, una compresión incide sobre el extremo cerrado, se refleja de regreso a lo largo del tubo como una compresión. En analogía con nuestra discusión de las ondas transversales en las cuerdas, decimos que *una onda de presión longitudinal se refleja desde un extremo cerrado sin cambiar de fase*. El mismo efecto ocurre en el caso de una onda longitudinal que viaje en una cuerda,

como puede ser en un juguete *Slinky*, y se refleja a partir del extremo *fijo*: una compresión se refleja como una compresión.

Consideremos ahora lo que sucede si el extremo del tubo está abierto. La presión en el extremo abierto del tubo es la misma que la presión del ambiente p_0 en el salón que lo rodea. No podemos cambiar la presión en ese extremo del tubo a menos que cambiemos la presión en todo el salón. La presión en el extremo abierto permanece por lo tanto en el valor p_0 , y *el extremo abierto es un nodo de presión*. La comparación con la figura 22 del capítulo 19 muestra que este caso es análogo a la onda de desplazamiento transversal que se refleja en el extremo fijo de la cuerda. El intento de la onda incidente sobre el extremo abierto de comprimir el aire en ese extremo causa un enrarecimiento, el cual viaja de regreso por el tubo en dirección opuesta. Así, *una onda de presión longitudinal se refleja en el extremo abierto con un cambio de fase de 180°*. Una vez más puede observarse el mismo efecto en un resorte enrollado: una compresión se refleja como un enrarecimiento.

Supongamos ahora que tenemos un tren de ondas sinusoidales que viaja por el tubo. Las ondas se reflejan en el extremo, el cual se comportará ya sea como un nodo de presión (si el extremo está abierto) o bien como un antinodo de presión (si el extremo está cerrado). Supongamos que la fuente del tren de ondas sea un altoparlante en el extremo opuesto. El movimiento de la bocina envía una onda de compresión por el tubo, y la superposición de las ondas original y reflejada produce un patrón de ondas estacionarias, precisamente como en el caso de las ondas transversales en la cuerda. Dentro del tubo habrá un patrón de nodos y antinodos de presión (que no son puntos, como en el caso de las ondas transversales en una cuerda, sino planos).

Si se elige que la frecuencia (o la longitud de onda) de la fuente de ondas tenga un valor particular que dependa de la longitud del tubo, entonces se establece un patrón de ondas estacionarias a lo largo de todo el tubo, en analogía

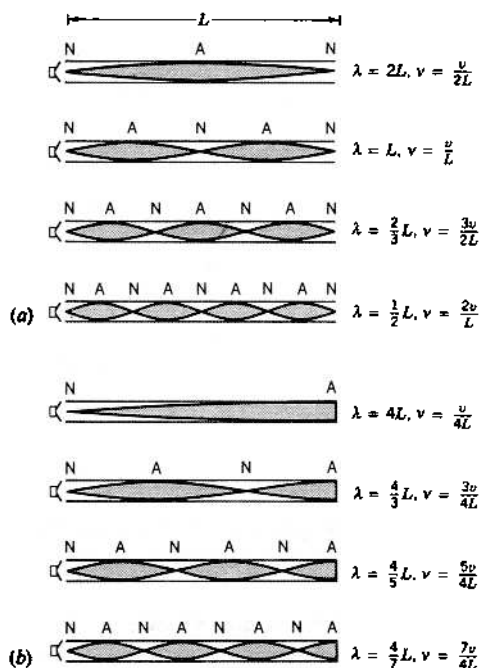


Figura 5 (a) Ondas de presión de los primeros cuatro modos resonantes de un tubo impulsado por una bocina y abierto en el otro extremo. Existe un nodo N de presión en cada extremo, y los antinodos A se ubican entre los nodos. Las curvas sugieren la variación sinusoidal de presión dentro del tubo. (b) Ondas de presión de los primeros cuatro modos resonantes de un tubo que está cerrado en un extremo. El extremo cerrado es un antinodo de presión. Obsérvense las diferencias en los patrones vibratorios y en las longitudes de onda entre los tubos abierto y cerrado.

con el caso de los patrones de una onda estacionaria mostrados en la figura 23 del capítulo 19. Si existe un nodo de presión en el extremo de la bocina, entonces se regresa poca energía a la bocina a partir del patrón de onda estacionaria dentro del tubo, y tenemos una condición de resonancia. La frecuencia impulsora debe ser igual a una de las frecuencias naturales del sistema, las cuales están determinadas por la longitud del tubo.

La figura 5a muestra un tubo impulsado por una bocina en un extremo y abierto en el otro extremo. Como vimos previamente, el extremo de la bocina es un nodo de presión en resonancia y el extremo abierto es igualmente un nodo de presión. En la figura 5a se muestran las variaciones de la amplitud de presión resultantes de las ondas estacionarias.* Estos patrones se parecen mucho a

* Con un tubo de llama Rubens puede obtenerse una bella demostración de las ubicaciones de los nodos y antinodos de presión. Véase "Rubens Flame-tube Demonstration", por George W. Ficken y Francis C. Stephenson, *The Physics Teacher*, mayo de 1979, pág. 306.

los de la figura 23 del capítulo 19. En el primer modo de oscilación, la longitud L del tubo es igual a $\lambda/2$, donde λ es la longitud de onda de la onda producida por la bocina en esta condición de resonancia en particular. La longitud de onda es por lo tanto $2L$, y la frecuencia correspondiente es $\nu = \nu/\lambda = \nu/2L$. Las otras resonancias que se muestran en la figura 5a tienen longitudes de onda más pequeñas en forma sucesiva, lo cual puede escribirse en general como:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Las frecuencias de resonancia correspondientes, determinadas al usar la expresión $\nu = \nu/\lambda$ con las longitudes de onda de arriba, son

$$\nu_n = n \frac{\nu}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{tubo abierto}). \quad (22)$$

Aquí ν representa la velocidad de la onda en el medio que llena el tubo, usualmente aire.

La figura 5b muestra el caso en que el tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro. En este caso, el extremo cerrado debe ser un antinodo de presión. En el primer modo resonante, la longitud L del tubo es $\frac{1}{4}\lambda$, y así la fuente debe estar produciendo una onda cuya longitud de onda es $4L$. En el modo siguiente, la longitud de onda cambia de modo que ahora L es $\frac{3}{4}\lambda$, y entonces $\lambda = \frac{4}{3}L$. Al continuar la serie, vemos que en este caso la expresión general para las longitudes de onda de los modos resonantes es

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (23)$$

Nótese que sólo aparecen los valores impares del entero n en este caso. Las frecuencias resonantes correspondientes son

$$\nu_n = n \frac{\nu}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{tubo cerrado}). \quad (24)$$

Como lo estudiaremos en la sección siguiente, las frecuencias resonantes dadas por las ecuaciones 22 ó 24 determinan las notas musicales tocadas por los instrumentos de aliento.

La ubicación real del nodo de presión en un extremo abierto no está *exactamente* en el extremo del tubo. La onda se extiende ligeramente en el medio más allá del tubo, así que la verdadera longitud del tubo es un poco mayor y las frecuencias resonantes son un poco menores. En tubos angostos de forma cilíndrica, la corrección de la longitud es aproximadamente igual a $0.6R$, donde R es el radio del tubo. En un tubo abierto en ambos extremos, la corrección de la longitud debe aplicarse en cada extremo. En un tubo de 0.6 m de longitud y 1 cm de radio (valores típicos para los instrumentos de aliento más pequeños, como el clarinete o la flauta), la frecuencia más baja sin la corrección del extremo sería de 286 Hz si

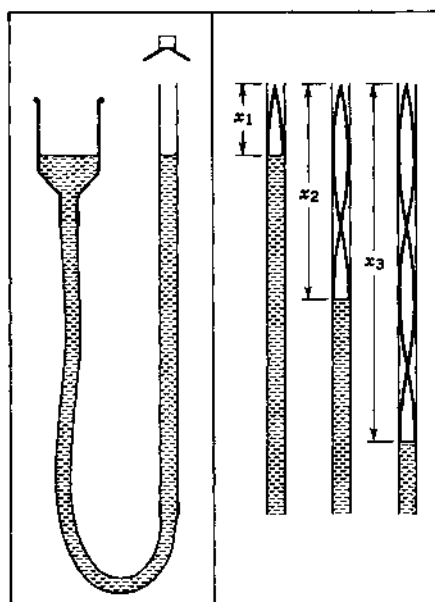


Figura 6 Problema muestra 3. Aparato para medir la velocidad del sonido en el aire. El nivel del agua puede ajustarse elevando o bajando el recipiente de la izquierda, el cual está conectado al tubo por medio de una manguera. A la derecha se muestran las formas de la onda de presión de los primeros tres modos resonantes para una longitud de onda determinada.

el tubo fuese abierto y de 143 Hz si el tubo fuese cerrado. Con la corrección del extremo, los valores correspondientes serían de 280 Hz y 142 Hz. Las correcciones son pequeñas, y sin embargo muy importantes.

Problema muestra 3 La figura 6 muestra un aparato que puede emplearse para medir la velocidad del sonido en el aire usando la condición de resonancia. Encima de un tubo cilíndrico parcialmente lleno de agua se sostiene una pequeña bocina. Al ajustar el nivel de agua, la longitud de la columna de aire puede cambiarse hasta que el tubo esté en resonancia, en cuyo punto puede oírse un incremento en la intensidad del sonido. En un experimento, la bocina se impulsa a una frecuencia fija de 1080 Hz, y se observan tres resonancias cuando el nivel de agua está a las distancias $x_1 = 6.5$ cm, $x_2 = 22.2$ cm, y $x_3 = 37.7$ cm por debajo de la parte superior del tubo. Halle el valor de la velocidad del sonido a partir de estos datos.

Solución La columna de aire actúa como un tubo de longitud variable cerrado en un extremo. El patrón de ondas estacionarias muestra un nodo de presión cerca de la bocina y un antinodo de presión en la superficie del agua. Puesto que no conocemos la corrección del extremo, no podemos usar directamente los datos dados para hallar la velocidad del sonido a partir de la ecuación 24. Sin embargo, observamos por las condiciones de resonancia mostradas en la figura 5b que la distancia entre nodos de presión adyacentes es de $\frac{1}{2}\lambda$; lo mismo sucede para la distancia entre antinodos adyacentes. A partir de los datos dados, concluimos por lo tanto, partiendo de las primeras dos resonancias, que

$$\frac{1}{2}\lambda = x_2 - x_1 = 22.2 \text{ cm} - 6.5 \text{ cm} = 15.7 \text{ cm},$$

y similarmente, partiendo de la segunda y tercera resonancias,

$$\frac{1}{2}\lambda = x_3 - x_2 = 37.7 \text{ cm} - 22.2 \text{ cm} = 15.5 \text{ cm}.$$

El promedio de estos dos valores, que tomamos como nuestro mejor valor de esta medición, es de 15.6 cm, correspondiente a una longitud de onda de $2(15.6 \text{ cm}) = 31.2 \text{ cm} = 0.312 \text{ m}$. Por lo tanto, deducimos que la velocidad del sonido es de

$$v = \lambda\nu = (0.312 \text{ m})(1080 \text{ Hz}) = 337 \text{ m/s}.$$

Aparte de la corrección del extremo, ¿qué factores físicos de este experimento (incluyendo las propiedades del aire) podrían influir en el valor medido?

20-5 SISTEMAS VIBRATORIOS Y FUENTES DE SONIDO*

Un sistema vibratorio transmite una onda a través del aire hasta los oídos del oyente. Éste es el principio básico de la producción de sonido por medio de la voz o de un instrumento musical. Ya hemos estudiado la propagación de la onda sonora; aquí estudiaremos ahora el sistema vibratorio que la produce para entender la naturaleza del sonido.

Como vimos en la sección 19-10 en el caso de la cuerda vibratoria y en la sección anterior en el caso de una columna de aire, un sistema distribuido tiene un número grande (quizás infinito) de frecuencias vibratorias naturales o de resonancia. Éstas son las frecuencias a las cuales puede vibrar. La frecuencia que se halla en la vibración depende de cómo se pone el sistema en vibración.

Supongamos que el sistema es capaz de vibrar en un número de frecuencias $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$. Escribimos éstas en orden ascendente, de modo que $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$. La frecuencia más baja ν_1 , se llama la *frecuencia fundamental*, y el modo de oscilación correspondiente se llama modo fundamental. Las frecuencias más elevadas se llaman *sobretonos*, siendo ν_2 el primer sobretono superior, ν_3 el segundo sobretono, y así sucesivamente.

En ciertos sistemas, los sobretonos son todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

$$\nu_n = n\nu_1, \tag{25}$$

donde n es un entero. En tal caso, los sobretonos se llaman simplemente *armónicos*. El primer miembro de una secuencia armónica es el fundamental, el segundo armónico es el primer sobretono, y así sucesivamente.

* Para una lista de referencias sobre la física de los instrumentos musicales y temas relacionados, véase "Resource Letter MA-2: Musical Acoustics", por Thomas D. Rossing, *American Journal of Physics*, julio de 1987, pág. 589.

¿Por qué producen algunos sistemas sonidos agradables mientras que otros producen sonidos desagradables o discordantes? Cuando se oyen varias frecuencias simultáneamente, resulta una sensación agradable si las frecuencias están en razón de números pequeños y enteros tales como 3:2 ó 5:4. Si un sistema produce sobretonos que sean armónicos, sus vibraciones incluirán frecuencias que tienen estas razones, y producirán un sonido agradable. Si los sobretonos no son armónicos, es probable que el sonido resulte discordante. Muchos de los esfuerzos en el diseño de instrumentos musicales están dedicados a la producción de secuencias armónicas de sobretonos. Algunos instrumentos, como en el caso de los basados en cuerdas vibratoria, producen sobretonos que son automáticamente armónicos cuando las vibraciones tienen una amplitud pequeña. En otros casos, la forma del instrumento debe diseñarse cuidadosamente para hacerlo armónico; una campana es un ejemplo de tal instrumento. Los armónicos que produce un instrumento le dan su riqueza y diversidad de tono, y son determinantes de la belleza del sonido del instrumento. Si los instrumentos produjesen únicamente sonidos fundamentales, todos sonarían exactamente igual.

Podemos clasificar a los instrumentos musicales en tres categorías: los basados en cuerdas vibratorias, los basados en columnas de aire vibratorias, y los sistemas más complejos que incluyen platillos, barras, y membranas vibratorias.

Cuerdas vibratorias

Estos instrumentos incluyen las cuerdas frotadas (por ejemplo, los violines), las cuerdas punteadas (la guitarra, el clavicordio), y las cuerdas percutidas (el piano).

Si una cuerda fija en ambos extremos es frotada, punteada, o percutida, a lo largo de la cuerda viajan vibraciones transversales; estas perturbaciones se reflejan en los extremos fijos, y se forma un patrón de onda estacionaria. Los modos naturales de vibración de la cuerda son excitados, y estas vibraciones dan origen a ondas longitudinales en el aire del entorno, el cual los transmite a nuestros oídos en forma de sonido musical.

Hemos visto (sección 19-10) que una cuerda de longitud L , fija en ambos extremos, puede resonar a frecuencias dadas por

$$v_n = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Aquí v es la velocidad en la cuerda de las ondas que viajan transversalmente de cuya superposición puede pensarse que da origen a las vibraciones; la velocidad $v (= \sqrt{F/\mu})$ es la misma para todas las frecuencias. (Obsérvese que v no es la velocidad del sonido en el aire; aunque la ecuación 26 se vea exactamente igual a la ecuación 22, v representa

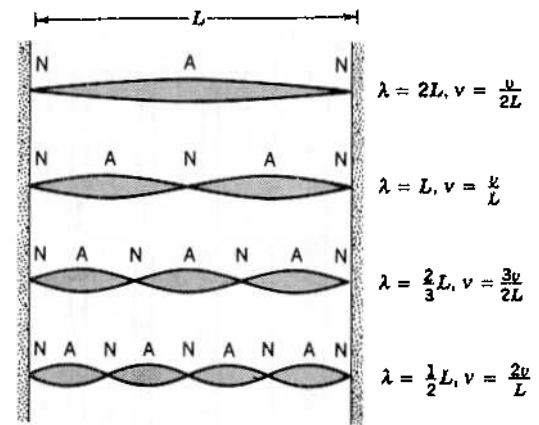


Figura 7 Los primeros cuatro modos resonantes de una cuerda vibratoria fija en ambos extremos. Los nodos y los antinodos de desplazamiento se denotan por N y A, respectivamente.

cantidades diferentes en las dos ecuaciones.) A cualquiera de estas frecuencias la cuerda contiene un número entero n de rizos entre sus extremos; tiene nodos en cada extremo y $n - 1$ nodos adicionales igualmente espaciados a lo largo de su longitud (Fig. 7).

Si la cuerda es inicialmente deformada de modo que su forma sea la misma que *cualquiera* de la de los armónicos posibles, vibrará únicamente a la frecuencia de ese armónico en particular. Sin embargo, las condiciones iniciales suelen surgir de percudir o de frotar la cuerda y en tales casos, no solamente el fundamental sino muchos sobretonos están presentes en la vibración resultante. Tenemos una superposición de varios modos naturales de oscilación. El desplazamiento real es la suma de los varios armónicos con amplitudes diversas. Los impulsos que se envían a través del aire hasta el oído y el cerebro dan lugar a un efecto neto, el cual es característico del instrumento de cuerda en particular. La calidad del sonido de determinada nota (frecuencia fundamental) tocada por un instrumento se define por el número de sobretonos presentes y sus respectivas intensidades. La figura 8 muestra los espectros del sonido y las formas de onda correspondientes al violín y al piano.

Columnas de aire vibratorias

Un tubo de órgano es un ejemplo sencillo de sonido que se origina en una columna de aire vibratoria. Si ambos extremos de un tubo están abiertos y se dirige una corriente de aire contra un borde en un extremo, se forman ondas longitudinales en el tubo. La columna de aire resuena entonces a sus frecuencias de vibración naturales, dadas por la ecuación 22. Como en el caso de la cuerda frotada, el sonido fundamental y los sobretonos (que son armóni-

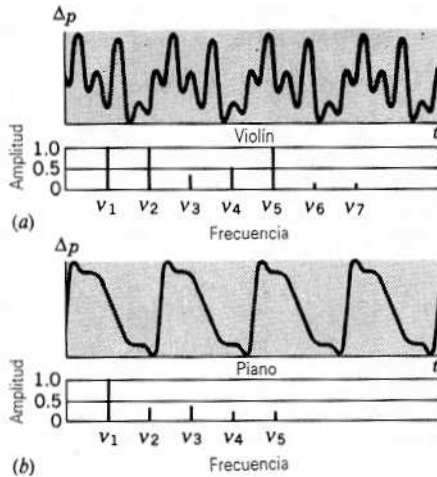


Figura 8 Formas de onda y espectros de sonido de dos instrumentos de cuerda, (a) violín, y (b) piano; cada uno de ellos toca una nota de frecuencia fundamental $\nu_1 = 440$ Hz (la nota La de la escala musical). El espectro del sonido abajo de cada forma de onda muestra los armónicos que están presentes en el tono complejo y sus correspondientes amplitudes.

cos) se producen al mismo tiempo. Si un extremo del tubo se cierra, la frecuencia fundamental se reduce en un medio, con relación a su valor para un tubo abierto de la misma longitud, y únicamente estarán presentes los armónicos impares, los cuales cambian la calidad del sonido. Es decir, un tubo abierto produce el mismo tono fundamental que un tubo cerrado de la mitad de longitud, pero a causa de que la mezcla de los armónicos es diferente en los dos tubos, la calidad de los tonos difiere.

Los instrumentos de lengüeta, como el clarinete, producen tonos de modo distinto. El aire se sopla a través de una abertura angosta, uno de cuyos lados está cubierto por una lengüeta que tiene propiedades elásticas. Según la ecuación de Bernoulli el aire, al pasar a alta velocidad a través de una abertura angosta, forma una región local de baja presión dentro de la embocadura. La presión exterior supera a la presión interior, lo cual fuerza a la lengüeta hacia adentro de modo que cubre la abertura. Tan pronto como se cubre la abertura, se interrumpe el flujo de aire, se elimina la región de baja presión dinámica, y la lengüeta se abre súbitamente permitiendo que el flujo de aire comience de nuevo. Este abrir y cerrar repetido del conducto de aire causa variaciones de presión máximas en la embocadura del instrumento, el cual se comporta por lo tanto como un antinodo de presión. En un clarinete, el otro extremo del instrumento está abierto, y por lo tanto las resonancias del instrumento son aquellas dadas por la ecuación 24 para un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro. Ciertos instrumentos de aliento, como la flauta, usan un método similar al tubo de órgano para producir el

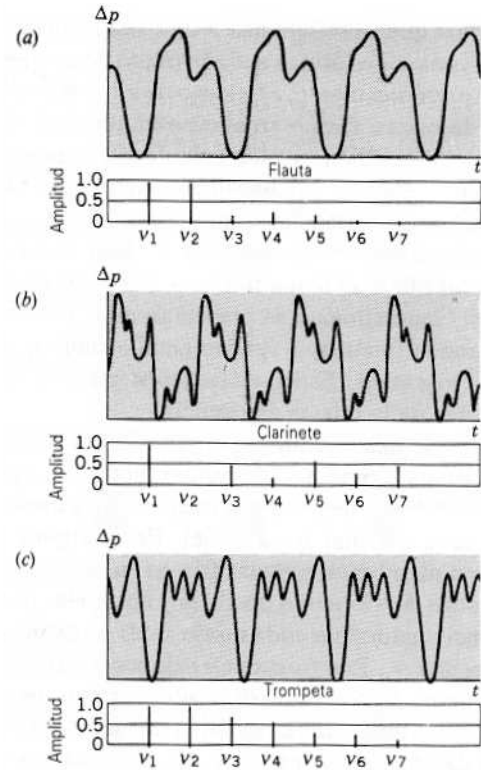


Figura 9 Formas de onda de algunos instrumentos de aliento: (a) flauta, (b) clarinete, y (c) trompeta, y sus espectros de sonido, como en la figura 8. Obsérvese que el espectro del clarinete contiene principalmente armónicos impares, mientras que la flauta y la trompeta tienen armónicos tanto impares como pares.

tono, de modo que la embocadura se comporta como un extremo abierto; sus frecuencias resonantes están dadas por la ecuación 22. Otros más, como el oboe y el saxofón, que usan una lengüeta para producir su tono, tienen un barreno cónico (es decir, ahusado) en lugar de cilíndrico, lo cual produce en ellos sobretonos que son aproximadamente armónicos, tanto impares como pares. Los instrumentos de metal (por ejemplo, la trompeta o el trombón) se llaman también instrumentos de *lengüeta labial*, porque los labios del ejecutante actúan como lengüeta, pero de nuevo el barreno está ligeramente ahusado, y como resultado los sobretonos contienen todos los armónicos. La figura 9 muestra las formas de onda de algunos instrumentos de viento.

Otros sistemas vibratorios

Las barras vibratorias, los platillos, y las membranas estiradas producen también ondas sonoras. Consideremos una membrana flexible estirada, como la de un tambor. Si se golpea, a partir del punto golpeado viaja una pulsación

bidimensional que se refleja una y otra vez en la frontera de la membrana. Si se obliga a algún punto de la membrana a vibrar periódicamente, a lo largo de ella viajan trenes continuos de ondas. Como en el caso unidimensional de la cuerda, aquí también pueden establecerse ondas estacionarias en la membrana bidimensional. Cada una de estas ondas estacionarias tiene una cierta frecuencia natural (o característica) de la membrana. Una vez más la frecuencia más baja se llama fundamental, y las otras son sobretonos. Generalmente se presentan muchos sobretonos junto con la frecuencia fundamental cuando la membrana está vibrando. Estas vibraciones pueden excitar ondas sonoras de la misma frecuencia.

Los nodos de una membrana vibratoria son líneas más bien que puntos (como en la cuerda vibratoria) o planos (como en un tubo). Puesto que la frontera de la membrana está fija, debe ser una línea nodal. En la figura 10 se muestra una membrana circular fija en sus bordes, junto con los modos de vibración posibles y sus líneas nodales. La frecuencia natural de cada modo se da en términos de la fundamental ν_1 . Las frecuencias de los sobretonos no son armónicos; esto es, no son múltiplos enteros de ν_1 . Las barras vibratorias tienen también un juego de frecuencias naturales que no son armónicos. Por esta razón, las barras y los platillos tienen un uso limitado como instrumentos musicales. En instrumentos como el xilófono y la marimba, se ponen en vibración pequeñas barras de madera o de metal que se golpean. La forma de las barras es cuidadosamente modificada, haciéndolas más delgadas en el centro, de modo que los sobretonos resulten aproximadamente armónicos.

20-6 PULSACIONES

Hemos considerado previamente el efecto de ondas que se superponen para producir regiones de intensidad máxima y mínima (cero), tal como en el caso de una onda estacionaria en un tubo. Esto ilustra un tipo de interferencia que podemos llamar *interferencia en el espacio*.

El mismo principio de superposición nos conduce a otro tipo de interferencia, al cual podemos llamar *interferencia en el tiempo*. En este caso examinamos la superposición de dos ondas en un punto dado en función del tiempo. Esta superposición, que en general puede dar por resultado formas de onda bastante complejas, adquiere una forma sencilla, particularmente cuando las dos ondas tienen casi la misma frecuencia. Con el sonido una condición así se da cuando, por ejemplo, se afinan entre sí dos instrumentos o dos cuerdas de guitarra.

Consideremos un punto en el espacio a través del cual estén pasando ondas. La figura 11a muestra la presión producida en ese punto por las dos ondas separadamente, en función del tiempo. Para simplificar hemos supuesto

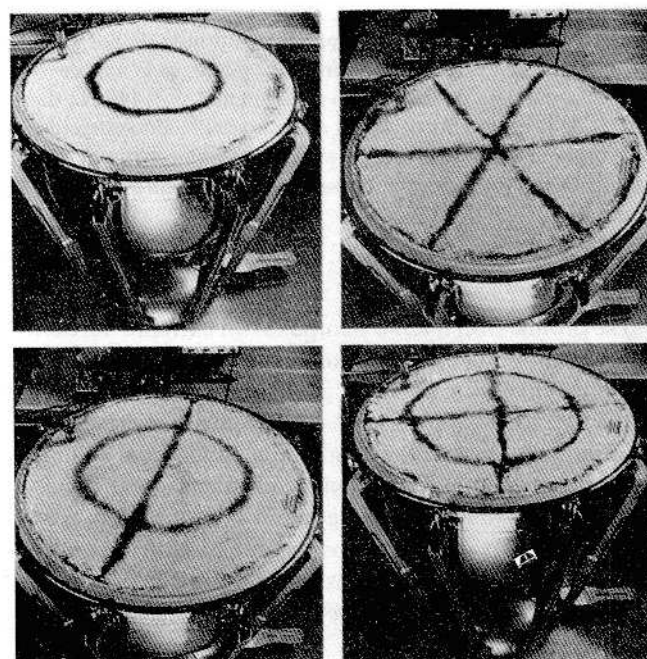
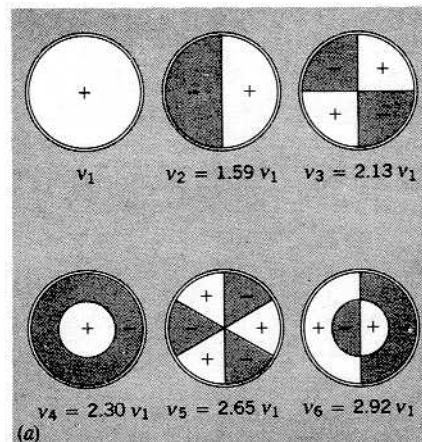


Figura 10 (a) Los seis modos resonantes más bajos de un parche circular sujeto en los bordes. Las líneas representan nodos; el borde es también una línea nodal. Los signos + o - indican que una región particular se está moviendo hacia afuera de la página o hacia adentro de la página. En este caso, los sobretonos no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental y, por lo tanto, no son armónicos. (b) Patrones de vibración de un timbal en los modos numerados 4, 5, y 6, y un modo adicional no ilustrado en (a). Se hacen visibles esparciendo un polvo oscuro sobre el parche y poniendo a éste en vibración a la frecuencia apropiada usando un vibrador mecánico. Al vibrar el parche, el polvo es sacudido y finalmente reposa sobre las líneas nodales, donde no existe movimiento.

que las dos ondas tienen igual amplitud, aunque esto no es necesario. La presión resultante en ese punto en función

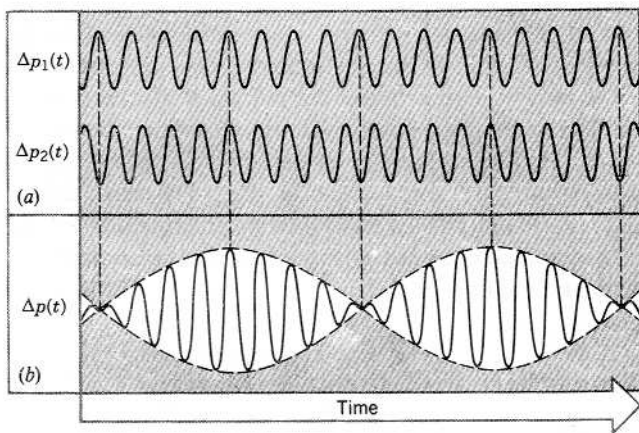


Figura 11 (a) Dos formas de onda sinusoidales de frecuencias casi iguales. (b) Superposición de las dos formas de onda. Nótese que las dos ondas de la parte (a) van de estar en fase, dando una resultante de gran amplitud, a estar fuera de fase, dando una resultante de amplitud cero. Las curvas puntuadas muestran la variación sinusoidal de la envolvente modulante con frecuencia angular ω_{amp} .

del tiempo es la suma de las presiones individuales y su gráfica se ilustra en la figura 11b. Vemos que la amplitud de la onda resultante no es constante sino que varía con el tiempo. En el caso del sonido la amplitud variable da lugar a variaciones en la sonoridad, llamadas *pulsaciones*.

Representemos la variación de la presión con el tiempo (para x constante) producida por una onda como:

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_m \text{ sen } \omega_1 t,$$

donde hemos elegido a la constante de fase para tener la posibilidad de escribir a la onda en esta forma sencilla. La variación de la presión en el mismo punto producida por la otra onda de igual amplitud se representa como

$$\Delta p_2(t) = \Delta p_m \text{ sen } \omega_2 t.$$

Según el principio de superposición, la presión resultante es

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= \Delta p_1(t) + \Delta p_2(t) \\ &= \Delta p_m (\text{sen } \omega_1 t + \text{sen } \omega_2 t). \end{aligned} \quad (27)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \cos \frac{A - B}{2} \text{ sen } \frac{A + B}{2},$$

La ecuación 27 puede describirse como

$$\Delta p(t) = \left[2\Delta p_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right] \text{sen} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \quad (28)$$

Hasta ahora, todo lo que hemos hecho se aplica a dos ondas cualesquiera, sin importar cuáles sean sus frecuen-

cias. Cuando las frecuencias son casi las mismas, la ecuación 28 puede simplificarse escribiendo el segundo factor en términos de la frecuencia angular promedio $\bar{\omega}$ de las dos ondas,

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (29)$$

El primer factor, contenido entre los corchetes de la ecuación 28, da una amplitud variable con el tiempo a la variación sinusoidal del segundo factor. Este factor de la amplitud varía con una frecuencia angular

$$\omega_{amp} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}. \quad (30)$$

En términos de $\bar{\omega}$ y de ω_{amp} , podemos escribir la ecuación 28 como:

$$\Delta p(t) = [2\Delta p_m \cos \omega_{amp} t] \text{sen } \bar{\omega} t. \quad (31)$$

Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, la frecuencia de la amplitud ω_{amp} es pequeña, y la amplitud fluctúa lentamente. La figura 11 muestra la superposición de las dos ondas de acuerdo con la ecuación 28. Obsérvese que, en el caso de frecuencias casi iguales, la variación rápida de la onda resultante ocurre con una frecuencia que es aproximadamente la de cualquiera de las dos ondas sumadas. La amplitud total de la resultante varía lentamente con la frecuencia de la amplitud ω_{amp} , la cual define una "envolvente" dentro de la cual ocurre la variación más rápida. Este fenómeno es una forma de *modulación de la amplitud*, que tiene una contraparte (bandas laterales) en los receptores de radio de AM.

En el caso mostrado en la figura 11b, el oído percibiría un tono con una frecuencia $\nu (= \bar{\omega} / 2\pi)$, que es aproximadamente igual que las frecuencias $\nu_1 (= \omega_1 / 2\pi)$ o $\nu_2 (= \omega_2 / 2\pi)$ de las dos ondas componentes. El tono crece alternativamente fuerte y débil al variar con el tiempo la amplitud de la resultante, dando máximos y mínimos como se muestra en la figura 11b.

Siempre que $\cos \omega_{amp} t$ sea igual a +1 o a -1 ocurre una pulsación, es decir, un máximo de intensidad, puesto que la intensidad depende del *cuadrado* de la amplitud. Cada uno de estos valores ocurre una vez en cada ciclo de la envolvente (véase la fig. 11), de modo que el número de pulsaciones por segundo es el doble del número de ciclos por segundo de la envolvente. La frecuencia angular de la pulsación ω_{puls} es entonces

$$\omega_{puls} = 2\omega_{amp} = |\omega_1 - \omega_2|. \quad (32)$$

Usando $\omega = 2\pi\nu$, podemos reescribir esta expresión como:

$$\nu_{puls} = |\nu_1 - \nu_2|. \quad (33)$$

De aquí que *el número de pulsaciones por segundo sea igual a la diferencia de las frecuencias de las ondas componentes*. Las pulsaciones entre dos tonos pueden ser

detectadas por el oído hasta una frecuencia de unos 15 Hz. A frecuencias más elevadas no pueden distinguirse las pulsaciones individuales en el sonido producido. Los músicos tratan de escuchar a menudo las pulsaciones al afinar ciertos instrumentos. La afinación es cambiada hasta que la frecuencia de la pulsación disminuye y las pulsaciones desaparecen.

Problema muestra 4 Una cuerda de violín que va a ser afinada con la nota La de la escala musical (440 Hz) está ligeramente fuera de tono. Se escuchan 3 pulsaciones por segundo cuando la cuerda de violín se toca en su modo fundamental junto con un diapasón en La. (a) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia fundamental de la cuerda? (b) Supóngase que la cuerda fuese tocada en su primer sobretono simultáneamente con un diapasón de una octava arriba de La (880 Hz). ¿Cuántas pulsaciones por segundo se oirían? (c) Cuando se aumenta ligeramente la tensión de la cuerda, el número de pulsaciones por segundo en el modo fundamental aumenta. ¿Cuál era la frecuencia original de la fundamental?

Solución (a) Partiendo de la ecuación 33, sabemos que la frecuencia v , de la cuerda difiere en la frecuencia de pulsación (3 Hz) de la frecuencia v_1 del diapasón (440 Hz), pero no podemos decir que la cuerda tenga una frecuencia más alta o más baja a partir únicamente del número de pulsaciones por segundo. Así, las frecuencias posibles son

$$v_1 = 440 \text{ Hz} \pm 3 \text{ Hz} = 443 \text{ Hz} \quad \text{or} \quad 437 \text{ Hz}.$$

(b) En el primer sobretono, la frecuencia de la cuerda es el doble de su frecuencia fundamental, y por lo tanto, puede ser 886 Hz o bien 874 Hz. Cuando se toca enfrente de un diapasón de 880 Hz, la diferencia de la frecuencia en cualquier caso es de 6 Hz, y por lo tanto se escucharían 6 pulsaciones por segundo.

(c) El hecho de aumentar la tensión de la cuerda eleva la velocidad de las ondas transversales v , y por lo tanto, eleva la frecuencia fundamental (véase la ecuación 26). Puesto que se nos dice que esto eleva la frecuencia de pulsación, concluimos que la frecuencia del modo fundamental era anteriormente mayor de 440 Hz, puesto que el aumento de la frecuencia hizo que la diferencia con respecto a 440 Hz fuese aún más grande. Entonces, la cuerda estaba afinada originalmente a 443 Hz, y la tensión debe ser reducida para llevarla a su afinación correcta.

20-7 EL EFECTO DOPPLER

Cuando un oyente está móvil hacia una fuente estacionaria de sonido, el tono (frecuencia) del sonido escuchado es más alto que cuando el oyente está en reposo. Si el oyente está móvil alejándose de la fuente estacionaria, se oirá un tono más bajo. Obtenemos resultados similares cuando la fuente está móvil acercándose o alejándose de un oyente estacionario. El tono del silbato de una locomotora o de la sirena de un carro de bomberos es más alto cuando la fuente se aproxima al oyente que cuando ha pasado y se aleja.

En un trabajo escrito en 1842, Christian Johann Doppler (1803-1853, austriaco) llamó la atención sobre el hecho de que el color de un cuerpo luminoso debe ser cambiado por el movimiento relativo del cuerpo y el observador. Este *efecto Doppler*, como se llama, se aplica a las ondas en general. El propio Doppler menciona la aplicación de su principio a las ondas sonoras. En 1845 Buys Ballot llevó a cabo una prueba experimental en Holanda, “usando una locomotora que transportaba a varios trompeteros en un carro abierto”.

Observador móvil, fuente en reposo

Consideraremos ahora el efecto Doppler en las ondas sonoras, tratando únicamente el caso especial en el que la fuente y el observador se mueven a lo largo de la línea que los une. Adoptemos un marco de referencia en reposo en el medio a través del cual viaja el sonido. La figura 12 muestra una fuente de sonido S en reposo en este marco y a un observador O que se mueve hacia la fuente con una velocidad v_o . Los círculos representan frentes de onda, separados por la distancia de una longitud de onda, que viaja a través del medio. Un observador en reposo en el medio recibiría vt/λ ondas en el tiempo t , donde v es la velocidad del sonido en el medio y λ es la longitud de onda. Sin embargo, a causa del movimiento hacia la fuente, el observador recibe $v_o t/\lambda$ ondas adicionales en este mismo tiempo t . La frecuencia v' que se oye realmente es el número de ondas recibidas por unidad de tiempo, o sea

$$v' = \frac{vt/\lambda + v_o t/\lambda}{t} = \frac{v + v_o}{\lambda} = \frac{v + v_o}{v/v}$$

Esto es,

$$v' = v \frac{v + v_o}{v} = v \left(1 + \frac{v_o}{v} \right). \quad (34)$$

La frecuencia v' captada por el oído del observador es la frecuencia v oída en reposo más el incremento $v(v_o/v)$ que surge del movimiento del observador. Cuando el observador está móvil *alejándose* de la fuente estacionaria, existe una *disminución* de la frecuencia $v(v_o/v)$ correspondiente a las ondas que no llegan al observador en cada unidad de tiempo a causa del alejamiento. Entonces

$$v' = v \frac{v - v_o}{v} = v \left(1 - \frac{v_o}{v} \right). \quad (35)$$

De aquí que la relación general que prevalece cuando la *fuente está en reposo* respecto al medio pero el *observador se mueve* a través de él sea

$$v' = v \frac{v \pm v_o}{v}, \quad (36)$$

donde el signo más se tiene para el movimiento hacia la fuente y el signo menos se tiene para el movimiento que

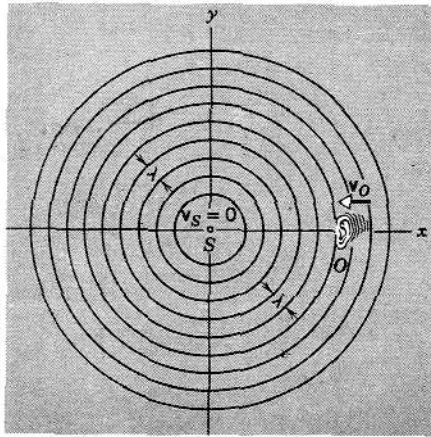


Figura 12 Una fuente estacionaria de sonido S emite frentes de onda esféricos, mostrados con la separación de una longitud de onda. Un observador O , representado por la oreja, se mueve con velocidad v_0 hacia la fuente. El observador en movimiento encuentra más ondas por segundo que un observador en reposo y por lo tanto mide una frecuencia más elevada. El observador mediría una frecuencia *más baja* para el movimiento que se aleja de la fuente.

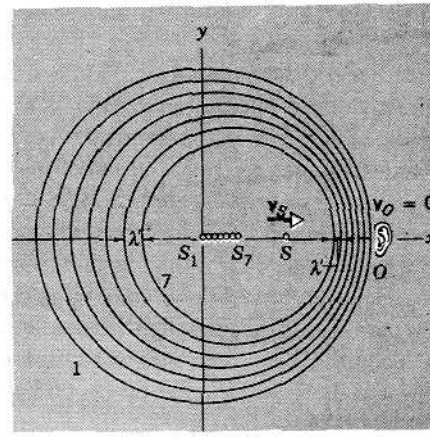


Figura 13 Aquí el observador O está en reposo, y la fuente se mueve hacia él con una velocidad v_s . El frente de onda 1 fue emitido cuando la fuente estaba en S_1 , el frente de onda 7 cuando la fuente estaba en S_7 , y así sucesivamente. En el instante de esta ilustración, la fuente está en S . El observador mide una longitud de onda más corta a causa del "apíñamiento" de los frentes de onda a lo largo del movimiento. Un observador situado en el eje x negativo, a partir del cual se estaría alejando la fuente, mediría una longitud de onda más larga.

se aleja de la fuente. Nótese que el cambio de frecuencia ocurre porque el observador intercepta más o menos ondas en cada segundo como resultado del movimiento a través del medio.

Fuente móvil, observador en reposo

Cuando la fuente está móvil *hacia* un observador estacionario, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda (véase la Fig. 13), ya que la fuente está viajando tras las ondas que se aproximan, y, por lo tanto, las crestas se juntan más entre sí. Si la frecuencia de la fuente es ν y su velocidad es v_s , entonces durante cada vibración viaja una distancia v_s/ν , y cada longitud de onda se acorta en esta cantidad. De aquí que la longitud de onda del sonido que llega al observador no sea $\lambda = \nu/\nu$ sino $\lambda' = \nu/\nu - v_s/\nu$. La frecuencia del sonido que el observador oye aumenta y está dada por

$$\nu' = \frac{\nu}{\lambda'} = \frac{\nu}{(\nu - v_s)/\nu} = \nu \frac{\nu}{\nu - v_s}. \quad (37)$$

Si la fuente se mueve *alejándose* del observador, la longitud de onda emitida es v_s/ν mayor que λ , de modo que el observador oye una frecuencia disminuida, es decir,

$$\nu' = \frac{\nu}{(v + v_s)/\nu} = \nu \frac{\nu}{\nu + v_s}. \quad (38)$$

De aquí que la relación general que prevalece cuando el observador está en reposo respecto al medio pero la fuente se mueve a través de él sea

$$\nu' = \nu \frac{\nu}{\nu \pm v_s}, \quad (39)$$

donde el signo menos rige para el movimiento hacia el observador y el signo más para el movimiento alejándose del observador. Nótese que el cambio aquí es el acortamiento o el aumento de la longitud de onda transmitida en el medio debido al movimiento de la fuente en el medio.

Si tanto la fuente como el observador se mueven en el medio transmisor, puede demostrarse que el observador oye una frecuencia dada por

$$\nu' = \nu \frac{\nu \pm v_0}{\nu \mp v_s}, \quad (40)$$

donde los signos superiores (+ en el numerador, - en el denominador) corresponden a la fuente y al observador cuando se acercan, y los signos inferiores cuando se aleja uno del otro. La ecuación 40 incorpora a las cuatro posibilidades distintas, como lo muestra el problema muestra 5. Obsérvese que la ecuación 40 se reduce a la ecuación 36 cuando $v_s = 0$ y a la ecuación 39 cuando $v_0 = 0$, como debe ser.

Si una fuente de sonido se mueve alejándose de un observador y hacia una pared, el observador oye dos notas de frecuencia diferente. La nota oída directamente a partir de la fuente en retroceso baja de tono debido al movimiento. La otra nota se debe a las ondas reflejadas en la pared, y ésta se eleva de tono (porque la fuente se mueve *hacia* la pared, y la pared "oye" la frecuencia más alta). La superposición de estos dos trenes de ondas produce pul-

saciones. Un efecto similar ocurre si una onda que parte de una fuente estacionaria se refleja en un objeto en movimiento. La frecuencia de pulsación puede emplearse para deducir la velocidad del objeto. Éste es el principio básico de los monitores de velocidad por medio de radar, y también se utiliza para rastrear a los satélites.

Lo expuesto en esta sección se aplica al corrimiento Doppler de las ondas sonoras y de otras ondas mecánicas similares. Las ondas de luz muestran también el efecto Doppler; sin embargo, puesto que no existe un medio de propagación para la luz, las fórmulas desarrolladas en esta sección no son aplicables. Véanse los capítulos 21 y 42 para un estudio del efecto Doppler en las ondas de luz.

Problema muestra 5 La sirena de un auto de la policía emite un tono puro a una frecuencia de 1125 Hz. Halle la frecuencia que usted percibiría en su automóvil bajo las siguientes circunstancias: (a) su auto está en reposo, el de la policía se mueve hacia usted a 29 m/s (65 mi/h); (b) el auto de la policía está en reposo, su auto se mueve hacia él a 29 m/s; (c) su auto y el de la policía se mueven uno hacia el otro a 14.5 m/s; (d) su auto se mueve a 9 m/s, y el de la policía le sigue a usted a 38 m/s.

Solución Las cuatro partes de este problema pueden resolverse usando la ecuación 40. (a) Aquí $v_o = 0$ (su auto está en reposo) y $v_s = 29$ m/s. Escogemos el signo de arriba (menos) en el denominador de la ecuación 40, porque el auto de la policía se está moviendo hacia usted. Entonces obtenemos, usando $v = 343$ m/s como la velocidad del sonido en aire tranquilo,

$$v' = v \frac{v}{v - v_s} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 29 \text{ m/s}} = 1229 \text{ Hz}.$$

(b) En este caso $v_s = 0$ (el auto de la policía está en reposo) y $v_o = 29$ m/s. Escogemos el signo de arriba (más) en el numerador de la ecuación 40, porque usted se mueve hacia el auto de la policía, y hallamos

$$v' = v \frac{v + v_o}{v} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 29 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} = 1220 \text{ Hz}.$$

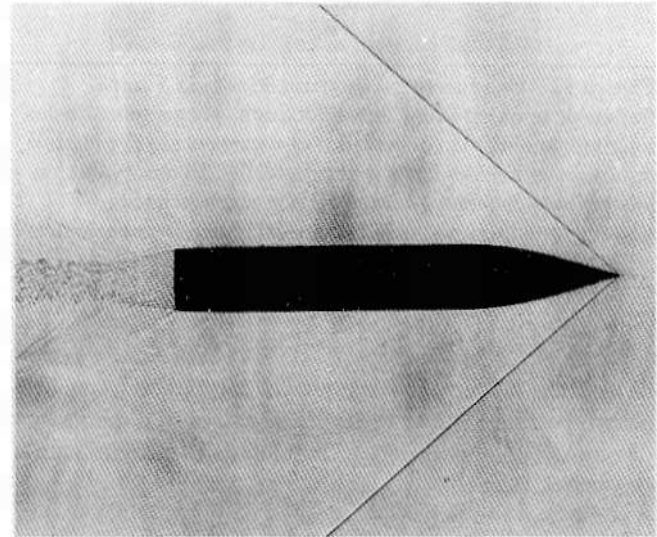
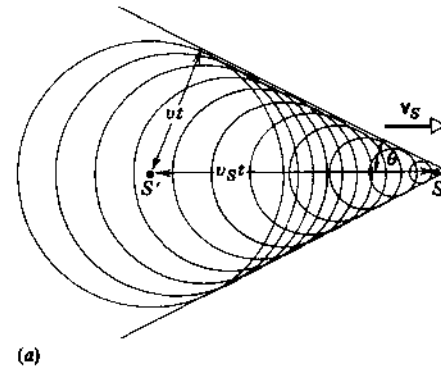
(c) En este caso $v_s = 14.5$ m/s y $v_o = 14.5$ m/s. Escogemos los signos de arriba tanto en el numerador como en el denominador de la ecuación 40, porque su auto y el de la policía se mueven uno hacia el otro. Entonces obtenemos

$$v' = v \frac{v + v_o}{v - v_s} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 14.5 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 14.5 \text{ m/s}} = 1224 \text{ Hz}.$$

(d) Aquí $v_o = 9$ m/s y $v_s = 38$ m/s. Su auto se mueve alejándose del auto de la policía, así que elegimos el signo de abajo (menos) en el numerador, pero el auto de la policía se está moviendo hacia usted, de modo que elegimos el signo de arriba (menos) en el denominador. El resultado es

$$v' = v \frac{v - v_o}{v - v_s} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 38 \text{ m/s}} = 1232 \text{ Hz}.$$

Obsérvese que en los cuatro casos de este problema, la velocidad relativa entre usted y el auto de la policía es la misma, es decir, 29 m/s, pero las frecuencias percibidas son diferentes en los cuatro casos. La desviación Doppler del sonido se determina no sólo por la velocidad relativa entre la fuente y el



(b)

Figura 14 (a) Frentes de onda de una fuente que se mueve a velocidad supersónica. Los frentes de onda son esféricos y su envolvente es un cono. Compare esta figura con la figura 13. (b) Fotografía de un proyectil disparado por un arma en Mach 2. Obsérvese el cono Mach.

observador, sino también por sus velocidades relativas al medio que transporta al sonido.

Efectos a grandes velocidades (Opcional)

Cuando v_o o v_s resultan comparables a v en magnitud, las fórmulas dadas antes para el efecto Doppler deben modificarse. Se requiere una modificación, porque la relación lineal entre la fuerza de restauración y el desplazamiento que hasta ahora hemos supuesto ya no es válida en el medio. La velocidad de propagación de la onda ya no es la velocidad de fase normal, y la onda cambia de forma en el tiempo. Las componentes del movimiento en ángulos rectos a la línea que une a la fuente con el observador contribuyen también al efecto Doppler a estas grandes velocidades. Cuando v_o o v_s excede a v , la fórmula Doppler ya no tiene validez; por ejemplo, si $v_s > v$, la fuente se adelanta a la onda en una dirección; si $v_o > v$ y el observador se aleja de la fuente, la onda nunca llega al observador.

Hay muchos ejemplos en los que la fuente se mueve en el medio a una velocidad mayor que la velocidad de fase de la onda en ese medio. En tales casos, el frente de onda toma la forma de un cono en cuyo vértice se halla el cuerpo en movimiento. Otros ejemplos son la onda arqueada de un bote rápido sobre el agua y la "onda de choque" de un aeroplano o proyectil que se mueve por el aire a una velocidad mayor que la del sonido en ese medio (velocidades supersónicas). Otro ejemplo es la radiación Cerenkov, que consiste en ondas de luz emitidas por partículas cargadas que se mueven en un medio con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en ese medio. El resplandor azul del agua que a menudo rodea el núcleo de un reactor nuclear es un tipo de radiación Cerenkov.

En la figura 14a mostramos las posiciones actuales de las ondas esféricas que se originan en diversas posiciones de una fuente durante su movimiento. El radio de cada esfera en este tiempo es el producto de la velocidad de la onda v y el tiempo t que ha transcurrido desde que la fuente estaba en su centro. La envolvente de estas ondas es un cono cuya superficie forma un ángulo θ con la dirección del movimiento de la fuente. A partir de la figura obtenemos el resultado

$$\text{sen } \theta = \frac{v}{v_s}. \quad (41)$$

En las ondas que se forman en la superficie del agua el cono se reduce a un par de líneas que se intersecan. En aerodinámica la razón v_s/v se llama el *número Mach*. Un aeroplano que viaje a una velocidad supersónica genera un *cono Mach* similar al mostrado en la figura 14. Cuando el borde de ese cono intercepta al terreno que está abajo, oímos un "estampido sónico", el cual (contrario a la creencia común) *no* tiene nada que ver con el aeroplano que "rompe la barrera del sonido". El estampido sónico es simplemente el efecto total de la concentración sobre una superficie de la energía sónica irradiada por el aeroplano, la cual se irradiaría normalmente en todas direcciones a velocidades subsónicas. Como lo muestra la fotografía de la figura 14b, podría ser posible oír dos estampidos sónicos provenientes del mismo aeroplano, uno que partiese del borde anterior y otro que partiese del borde posterior. (Obsérvese también que el cono Mach nunca intercepta al proyectil en sí mismo; así, los pasajeros del aeroplano no oyen el estampido sónico.) ■

PREGUNTAS

1. ¿Por qué no viaja el sonido en el vacío?
2. Liste algunas fuentes de ondas infrasonicas y de ondas ultrasónicas.
3. Las ondas ultrasónicas pueden emplearse para revelar estructuras internas del cuerpo humano. Por ejemplo, pueden distinguir entre los tejidos líquidos y los tejidos blandos del organismo humano mucho mejor que los rayos X. ¿Cómo? ¿Por qué se emplean aún los rayos X?
4. ¿Qué evidencia experimental existe para suponer que la velocidad del sonido en el aire es la misma para todas las longitudes de onda?
5. Ofrezca una explicación cualitativa de por qué la velocidad del sonido en el plomo es menor que en el cobre.
6. Las ondas transversales de una cuerda pueden ser polarizadas planas. ¿Pueden ser polarizadas las ondas de sonido?
7. Las campanas suelen tener un sonido menos agradable que el de un piano o el de un violín. ¿Por qué?
8. En una escuela hacen sonar una campana durante un tiempo corto. Después de un rato su sonido es inaudible. Trace las ondas de sonido y la energía que transfieren a partir del tiempo de emisión hasta que se vuelven inaudibles.
9. Cuando una orquesta "entra en calor", el tono de los instrumentos de aliento se eleva y el de los instrumentos de cuerda decae. Explique por qué.
10. Explique cómo se afina un instrumento de cuerdas.
11. ¿Es la resonancia una característica deseable en todos los instrumentos musicales? Dé ejemplos.
12. Cuando se golpea una de las ramas del diapason, la otra rama vibra también, incluso cuando se afianza firmemente el mango de la horquilla en un tornillo de banco. ¿Por qué sucede esto? Es decir, ¿cómo "sabe" esa segunda rama de la horquilla que alguien ha golpeado a la otra?
13. ¿Cómo puede viajar una onda de sonido por un tubo de órgano y reflejarse en su extremo abierto? Parecería que allí no existe nada que la refleje.
14. ¿Cómo podemos localizar experimentalmente las posiciones de los nodos y de los antinodos en una cuerda, en una columna de aire, y sobre una superficie vibratoria?
15. Explique cómo se produce una nota al soplar a través de la parte superior de un tubo de pruebas. ¿Cuál sería el efecto de soplar más fuerte? ¿Cuál sería el efecto si se elevara a la temperatura del aire que está dentro del tubo de pruebas?
16. ¿Qué podría usted hacer para reducir el nivel de ruido en un taller de máquinas herramienta?
17. Las trompetas para niebla emiten sonidos de tono muy bajo. ¿Con qué objeto?
18. ¿Son siempre audibles como sonido las ondas longitudinales en el aire, cualquiera que sea la frecuencia o la intensidad? ¿Qué frecuencias producirían en una persona la mayor sensibilidad, la mayor tolerancia, y la gama más amplia?
19. ¿Cuál es el objetivo común de las válvulas de un cornetín y de la barra deslizante de un trombón? Un clarín no tiene válvulas. ¿Entonces cómo podemos hacer sonar notas diferentes en él? ¿A qué notas se limita la persona que toca un clarín? ¿Por qué?
20. Explique por qué el arco hace vibrar a una cuerda de violín.
21. ¿Cuál es el significado de cero decibeles? ¿Podría establecerse la intensidad de referencia del sonido audible con el

- fin de permitir niveles de sonido negativos en decibelios? De ser así, ¿cómo?
22. Explique los factores que determinan la gama de frecuencias y el timbre de nuestra voz.
 23. Explique el origen del sonido en un silbido ordinario.
 24. ¿Qué propiedades físicas de una onda sonora corresponden a las sensaciones humanas de tono, sonoridad, y timbre?
 25. ¿Cuál es la diferencia entre una nota de violín y la misma nota emitida por la voz humana que nos permite distinguir entre una y otra?
 26. ¿Suena nuestra voz al cantar realmente mejor en la regadera? De ser así, ¿cuáles son las razones físicas?
 27. Explique el sonido audible producido al rozar el borde de una copa de vino con el dedo húmedo.
 28. ¿Oscilaría una cuerda de violín punteada durante un tiempo más largo o más corto si el violín careciera de caja de resonancia? Explique.
 29. ¿Es una cuerda de violín frotada por el arco un ejemplo de oscilaciones amortiguadas forzadas? ¿Cómo sonaría la cuerda si no fuese amortiguada?
 30. Un tubo puede actuar como filtro acústico, discriminando el paso a través de él de sonidos de frecuencias diferentes de las frecuencias naturales del tubo. El silenciador de un automóvil es un ejemplo. (a) Explique cómo trabaja esta clase de filtro. (b) ¿Cómo podemos determinar la frecuencia de corte, por debajo de la cual no se transmite el sonido?
 31. Exponga los factores que mejoran la acústica en las salas de concierto.
 32. ¿Cuál es el efecto de usar un megáfono o de ahuecar las manos delante de la boca para proyectar la voz a distancia?
 33. Un relámpago disipa una cantidad enorme de energía y en esencia es instantáneo. ¿Cómo esa energía se transforma en las ondas sonoras del trueno? (Véase "Thunder", por Arthur A. Few, *Scientific American*, julio de 1975, pág. 80.)
 34. Las ondas sonoras pueden emplearse para medir la velocidad a la que fluye la sangre por arterias y venas. Explique cómo.
 35. Suponga que Jorge silba y que Gloria lo oye. Ella oíría una frecuencia aumentada si estuviese corriendo hacia Jorge o si Jorge estuviese corriendo hacia ella. ¿Son los aumentos de frecuencia iguales en cada caso? Suponga las mismas velocidades al correr.
 36. Suponga que, en el efecto Doppler del sonido, la fuente y el receptor están en reposo en algún marco de referencia pero el medio de transmisión (el aire) se está moviendo respecto a este marco. ¿Existirá un cambio en la longitud de onda, o en la frecuencia, recibida?
 37. Usted está parado en el centro de una carretera y hacia usted viene un autobús a una velocidad constante, haciendo sonar su claxon. ¿Se eleva, decae, o es constante el tono del claxon a causa del efecto Doppler?
 38. ¿Cómo podría emplearse el efecto Doppler en un instrumento para detectar el latido de un corazón fetal? (Tales mediciones se practican rutinariamente; véase "Ultrasound in Medical Diagnosis", por Gilbert D. Devey y Peter N. T. Wells, *Scientific American*, mayo de 1978, pág. 98.)
 39. Los murciélagos pueden conocer las características de los objetos (como su tamaño, forma, distancia, dirección, y movimiento) percibiendo la manera en que se reflejan hacia ellos los objetos mediante los sonidos de alta frecuencia que emiten. Exponga cualitativamente cómo afectan cada una de estas características a las ondas de sonido reflejadas. (Véase "Information Content of Bat Sonar Echoes", por J. A. Simmons, D. J. Howell, y N. Suga, *American Scientific*, marzo-abril de 1975, pág. 204.)
 40. Supongamos que podemos detectar a un objeto por las ondas que rebotan de él (como en el caso del sonar o del radar, por ejemplo) siempre que el objeto sea más grande que la longitud de onda de las ondas. Consideremos luego que los murciélagos y las marsopas pueden emitir ondas sonoras de 100 kHz de frecuencia; sin embargo, los murciélagos pueden detectar objetos tan minúsculos como un insecto y, en cambio, las marsopas únicamente peces pequeños. ¿Por qué la diferencia?
 41. ¿Existe un efecto Doppler para el sonido cuando el observador o la fuente se mueven en ángulo recto con la línea que los une? ¿Cómo podemos entonces determinar el efecto Doppler cuando el movimiento tenga una componente en ángulo recto con esa línea?
 42. Dos buques con sirenas de vapor del mismo tono las hacen sonar en el puerto. ¿Cabe esperar que ello produzca un patrón de interferencia con regiones de intensidad alta y baja? Si no, ¿por qué no?
 43. Un satélite emite ondas de radio de frecuencia constante. Estas ondas se recogen en tierra y se las hace pulsar contra alguna frecuencia estándar. La frecuencia de pulsación se envía luego por un altavoz y uno "oye" las señales del satélite. Describa cómo cambia el sonido a medida que el satélite se aproxima, pasa por encima, y retrocede respecto al detector en tierra.
 44. ¿Cómo y en qué difieren los efectos Doppler de la luz y del sonido? ¿En qué aspecto son iguales?

PROBLEMAS

Según sea necesario en los problemas, tome la velocidad del sonido en el aire = 343 m/s y la densidad del aire = 1.21 kg/m³ a menos que se den otros valores.

Sección 20-1 La velocidad del sonido

1. Para diagnosticar y examinar tumores en tejidos blandos se emplea un ultrasonido de 4.50 MHz de frecuencia. (a)

¿Cuál es la longitud de onda en el aire de esa onda de sonido? (b) Si la velocidad del sonido en el tejido humano es de 1500 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de esta onda en el tejido?

- Si la longitud de onda del sonido es grande en un factor de alrededor de 10 con relación al recorrido libre medio de las moléculas, entonces las ondas de sonido pueden propagarse a través de un gas. En aire a la temperatura ambiente, el recorrido libre medio es de alrededor de $0.1 \mu\text{m}$. Calcule la frecuencia por encima de la cual no podrían propagarse las ondas de sonido.
- La figura 15 muestra una imagen notablemente detallada del transistor de un circuito microelectrónico, formada por un microscopio acústico. Las ondas de sonido tienen una frecuencia de 4.2 GHz. La velocidad de tales ondas en el helio líquido en el que se encuentra sumergido el espécimen es de 240 m/s. (a) ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas acústicas de frecuencia ultraelevada? (b) Los conductores a modo de listón en la figura tienen un ancho de unos $2 \mu\text{m}$, aproximadamente. ¿A cuántas longitudes de onda corresponde esta cantidad?

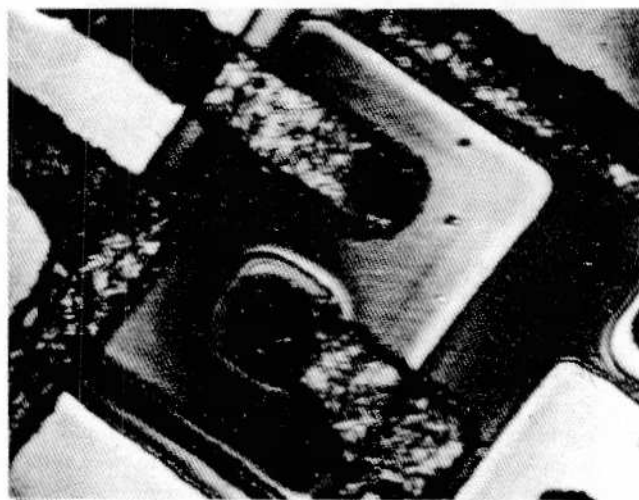


Figura 15 Problema 3.

- (a) Una regla para hallar la distancia a la que se forma un relámpago consiste en contar los segundos a partir del tiempo en que vemos el relámpago hasta que oímos el trueno y luego dividir esa cantidad entre 5. Si el resultado debe dar la distancia en millas. Explique esta regla y determine el porcentaje de error en ella a 0°C y 1 atm de presión. (b) Elabore una regla similar para calcular la distancia en kilómetros.
- Una columna de soldados que marcha a 120 pasos por minuto se mantiene al paso con la música de una banda que encabeza la columna. Se observa que los hombres que van atrás de la columna dan el paso con el pie izquierdo cuando los de la banda lo dan con el pie derecho. ¿Cuál es la longitud de la columna, aproximadamente?
- Está usted presente en un gran recinto de concierto al aire libre sentado a 300 m del micrófono del escenario. El

concierto está siendo radiado en vivo, en estéreo, alrededor del mundo vía satélite. Considere a un oyente a 5000 km de distancia. ¿Quién oye la música primero y con qué diferencia de tiempo?

- La velocidad del sonido en cierto metal es V . El extremo de un tubo largo de ese metal, de longitud L , se percute con un golpe fuerte. Un oyente en el otro extremo oye dos sonidos, uno que parte de la onda que ha viajado por el tubo y otro que parte de la onda que ha viajado por el aire. (a) Si v es la velocidad del sonido en el aire, ¿qué intervalo de tiempo t transcurre entre la llegada de los dos sonidos? (b) Un martillo golpea una barra larga de aluminio en un extremo. Un oyente, cuya oreja está cerca del otro extremo de la barra, oye el sonido del golpe dos veces, con un intervalo de 120 ms intermedio. ¿Cuál es la longitud de la barra?
- Los terremotos generan ondas de sonido en la Tierra. A diferencia de un gas, existen en un sólido ondas de sonido tanto transversales (S) como longitudinales (P). Típicamente, la velocidad de las ondas S es de alrededor de 4.5 km/s y la de las ondas P es de 8.2 km/s. Un sismógrafo registra las ondas P y S de un terremoto. Las primeras ondas P llegan 3 min antes que las primeras ondas S; véase la figura 16. ¿A qué distancia ocurre el terremoto?

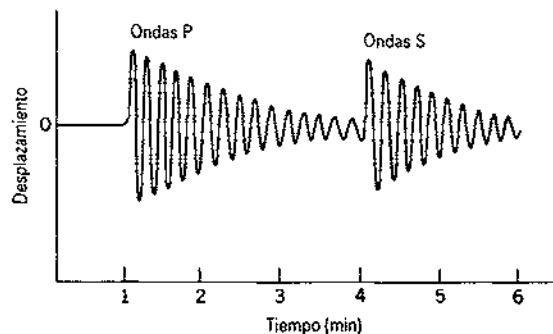


Figura 16 Problema 8.

- Una piedra se deja caer en un pozo. El sonido del chapoteo se oye 3.00 s más tarde. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

Sección 20-2 Ondas viajeras longitudinales

- Una onda longitudinal sinusoidal continua se envía a lo largo de un resorte enrollado desde una fuente vibratoria unida a él. La frecuencia de la fuente es de 25 Hz, y la distancia entre enrarecimientos sucesivos en el resorte es de 24 cm. (a) Halle la velocidad de la onda. (b) Si el desplazamiento longitudinal máximo de una partícula del resorte es de 0.30 cm y la onda se mueve en dirección $-x$, escriba la ecuación de la onda. Considere que la fuente está en $x = 0$ y el desplazamiento es $s = 0$ en la fuente cuando $t = 0$.
- La presión de una onda sonora viajera está dada por la ecuación

$$\Delta p = (1.48 \text{ Pa}) \sin (1.07\pi x - 334\pi t),$$

donde x está en metros y t en segundos. Halle (a) la amplitud de la presión, (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda, y (d) la velocidad de la onda.

Sección 20-3 Potencia e intensidad de las ondas sonoras

12. Demuestre que la intensidad I de la onda de sonido puede expresarse en términos de la frecuencia ν y de la amplitud del desplazamiento s_m en la forma

$$I = 2\pi^2\rho\nu^2s_m^2.$$

13. Una fuente emite ondas esféricas isotrópicamente (es decir, con igual intensidad en todas las direcciones). La intensidad de la onda a 42.5 m de la fuente es de $197 \mu\text{W}/\text{m}^2$. Halle la salida de potencia de la fuente.
14. Una nota de 313 Hz de frecuencia tiene una intensidad de $1.13 \mu\text{W}/\text{m}^2$. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones del aire causadas por este sonido?
15. Una onda de sonido de $1.60 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ de intensidad atraviesa una superficie de 4.70 cm^2 de área. ¿Cuánta energía pasa por la superficie en 1 h?
16. Halle la razón entre las intensidades de dos sonidos cuyos niveles de sonido difieren en 1.00 dB.
17. Cierta nivel de sonido se aumenta en 30 dB adicionales. Demuestre que (a) su intensidad aumenta en un factor de 1000 y (b) su amplitud de presión aumenta en un factor de 32.
18. Un vendedor asegura que un sistema de estéreo tiene 110 W de potencia de audio. Al probar el sistema con varias bocinas dispuestas de modo que simulen una fuente puntual, la compradora advierte que puede acercarse hasta 1.3 m, estando el sistema a pleno volumen, antes de que el sonido lastime sus oídos. ¿Puede ella denunciar a la firma ante la Procuraduría del Consumidor?
19. Cierta bocina produce un sonido con una frecuencia de 2.09 kHz y una intensidad de $962 \mu\text{W}/\text{m}^2$ a una distancia de 6.11 m. Suponga que no existen reflexiones y que la bocina emite igualmente en todas las direcciones. (a) Halle la intensidad a 28.5 m. (b) Halle la amplitud del desplazamiento a 6.11 m. (c) Calcule la amplitud de presión a 6.11 m.
20. (a) Si dos ondas de sonido, una en el aire y la otra en el agua, son iguales en intensidad, ¿cuál es la razón entre la amplitud de presión de la onda en el agua a la de la onda en el aire? (b) Si, en vez de esto, las amplitudes de presión son iguales, ¿cuál es la razón entre las intensidades de las ondas? Suponga que el agua está a 20°C .
21. Halle la densidad de energía de una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de emergencia nuclear de 5.20 kW (véase la Fig. 17), suponiendo que las ondas son esféricas y que la propagación es isotrópica sin que exista absorción atmosférica.
22. Una fuente lineal (por ejemplo, un tren de carga largo en una vía recta) emite una onda expansiva cilíndrica. Suponiendo que el aire no absorbe energía, halle cómo dependen (a) la intensidad y (b) la amplitud de la onda de la distancia a la fuente. Desprecie las reflexiones y considere puntos cerca del centro del tren.

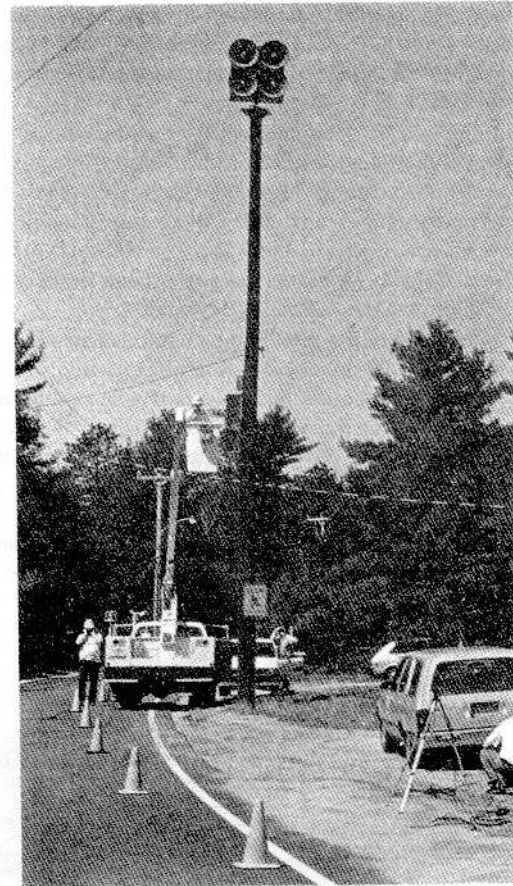


Figura 17 Problema 21.

23. En la figura 18 mostramos un interferómetro acústico, usado para demostrar la interferencia de las ondas de sonido. S es una fuente de sonido (por ejemplo, una bocina), y D es un detector de sonido, como lo es el oído o un micrófono. La trayectoria SBD puede variarse en longitud, pero la trayectoria SAD es fija. El interferómetro contiene aire, y se halla que la intensidad del sonido tiene un valor mínimo de $10 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ en una posición de B y sube continuamente hasta un valor máximo de $90 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ en una segunda posición a 1.65 cm de la primera. Halle (a) la frecuencia del sonido emitido por la fuente y (b) las amplitudes relativas de las ondas que llegan al detector para cada una de las dos posiciones de B . (c) ¿Por qué estas ondas tienen amplitudes diferentes, considerando que se originan en la misma fuente?
24. Está usted de pie a una distancia D de una fuente isotrópica de ondas sonoras. Camina 51.4 m hacia la fuente y observa que la intensidad de estas ondas se ha duplicado. Calcule la distancia D .
25. Calcule el nivel de sonido máximo posible en decibeles de las ondas sonoras en el aire. (Sugerencia: Tome la amplitud de presión igual a 1 atm.)
26. Suponga que el nivel de sonido promedio de la conversación humana es de 65 dB. ¿Cuántas personas se necesitan

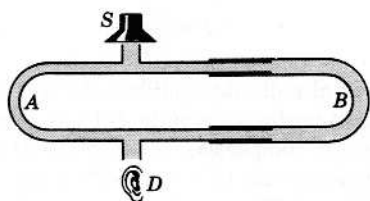


Figura 18 Problema 23.

para producir un nivel de sonido de 80 dB en un salón donde todos hablan al mismo tiempo a 65 dB?

27. Supongamos que el rumor de una hoja genera 8.4 dB de sonido. Halle el nivel de sonido de un árbol que tenga 2.71×10^7 hojas.
28. En una prueba, un aeroplano de propulsión a chorro subsónico vuela a una altitud de 115 m. El nivel de sonido en tierra al pasar el aeroplano sobre el punto de observación es de 150 dB. ¿A qué altitud debe volar el aeroplano para que el ruido en tierra no supere los 120 dB, el umbral de dolor? Desprecie el tiempo finito necesario para que el sonido llegue al suelo.
29. Cierta bocina (suponiendo que sea una fuente puntual) emite 31.6 W de potencia acústica. A 194 m se halla un pequeño micrófono de 75.2 mm^2 de área efectiva en su sección transversal. Calcule (a) la intensidad del sonido en el micrófono, (b) la potencia que incide en el micrófono, y (c) la cantidad de energía que choca contra el micrófono en 25.0 min.
30. Una onda sonora de 42.0 cm de longitud de onda entra en el tubo que se muestra en la figura 19. ¿Cuál debe ser el radio r más pequeño para que se escuche un mínimo en el detector?

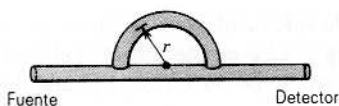


Figura 19 Problema 30.

31. Dos bocinas de un sistema de estéreo están separadas por una distancia de 2.12 m. Suponga que la amplitud del sonido que parte de cada bocina es la misma en la posición de un oyente que está a 3.75 m directamente enfrente de una de las bocinas; véase la figura 20. (a) ¿Para qué frecuencias en la gama audible (20 a 20,000 Hz) existirá una señal mínima? (b) ¿Para qué frecuencias es máximo el sonido?
32. Una fuente esférica de sonido está situada en P_1 cerca de una pared reflejante AB , y en el punto P_2 está colocado un micrófono, como se muestra en la figura 21. La frecuencia de la fuente de sonido es variable. Halle las dos frecuencias más bajas para las cuales la intensidad del sonido observada en P_2 será un máximo. No existe cambio de fase con la reflexión; el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

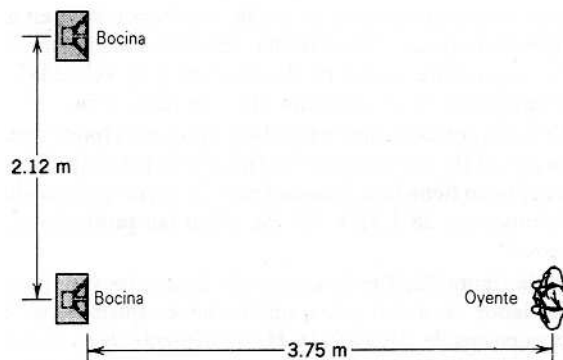


Figura 20 Problema 31.

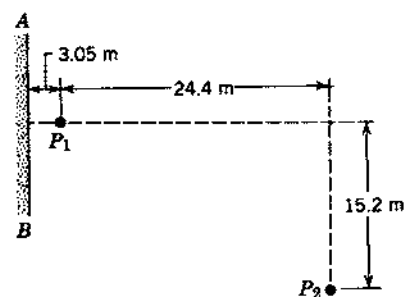


Figura 21 Problema 32.

33. Dos fuentes de sonido están separadas por una distancia de 5.00 m. Ambas emiten sonido a la misma amplitud y frecuencia, 300 Hz, pero están 180° fuera de fase. ¿En qué puntos a lo largo de la línea que los une será la intensidad del sonido la más grande?
34. El tiempo de reverberación de un auditorio o de una sala de conciertos es el necesario para que la intensidad del sonido (en W/m^2) disminuya en un factor de 10^6 . El tiempo de reverberación depende de la frecuencia del sonido. Suponga que en una sala de conciertos en particular el tiempo de reverberación de una nota de cierta frecuencia es de 2.6 s. Si la nota se emite a un nivel de sonido de 87 dB, ¿cuánto tiempo le tomará al nivel de sonido caer a 0 dB (el umbral de audición del oído humano)?
35. Un gran reflector parabólico que tiene una abertura circular de 0.50 m de radio se usa para enfocar el sonido. Si la energía se emite desde el foco hasta el oído de un detective que escucha a través de un tubo de 1.0 cm de diámetro con una eficiencia del 12%, ¿a qué distancia puede captarse, de modo que se entienda, una conversación en tono de susurro? (Suponga que el nivel de un susurro es de 20 dB a 1.0 m de la fuente, considerada como puntual, y que el umbral de audición del oído humano es de 0 dB.)

Sección 20-4 Ondas longitudinales estacionarias

36. Las cuerdas de un violonchelo tienen una longitud L . (a) ¿En qué longitud ΔL deben ser acortadas digitando para cambiar el tono en una razón de frecuencia r ? (b) Halle ΔL , cuando $L = 80.0 \text{ cm}$ y $r = \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

37. Una onda de sonido en un medio fluido se refleja en una barrera de modo que se forma una onda estacionaria. La distancia entre nodos es de 3.84 cm y la velocidad de propagación es de 1520 m/s. Halle la frecuencia.
38. Un pozo con costados verticales y agua en el fondo resuena a 7.20 Hz y a ninguna otra frecuencia más baja. El aire en el pozo tiene una densidad de 1.21 kg/m^3 y un módulo volumétrico de $1.41 \times 10^5 \text{ Pa}$. ¿Qué tan profundo es el pozo?
39. En la figura 22, S es una pequeña bocina movida por un oscilador de audio y un amplificador, ajustable en las frecuencias de 1000 a 2000 Hz únicamente. D es un trozo de tubo cilíndrico de metal laminado de 45.7 cm de longitud y está abierto en ambos extremos. (a) ¿A qué frecuencias ocurrirá una resonancia cuando la frecuencia emitida por la bocina varíe entre 1000 y 2000 Hz? (b) Dibuje los nodos del desplazamiento para cada resonancia. Desprecie los efectos del extremo.

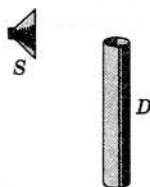


Figura 22 Problema 39.

40. El ancho de las terrazas de un anfiteatro en Los Angeles, California, figura 23, es de 36 in ($\approx 0.914 \text{ m}$). El aplauso producido por una sola persona desde el centro del escenario se reflejará al escenario como un tono, ¿de qué frecuencia?

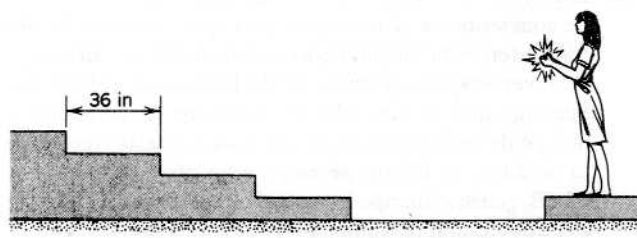


Figura 23 Problema 40.

41. Un túnel que pasa recto a través de una montaña amplifica en gran manera tonos a 135 y a 138 Hz. Halle la longitud más corta que puede tener el túnel.
42. El periodo de una estrella variable pulsante puede calcularse considerando que la estrella esté efectuando pulsaciones longitudinales radiales en el modo fundamental de una onda estacionaria; es decir, el radio varía periódicamente con el tiempo, con un antinodo de desplazamiento en la superficie. (a) ¿Cabe suponer que el centro de la estrella sea un nodo o un antinodo (de desplazamiento)? (b) Por analogía con el tubo de órgano abierto, demuestre que el periodo T de la pulsación está dado por

$$T = \frac{4R}{v_s},$$

donde R es el radio de equilibrio de la estrella y v_s es la velocidad media del sonido. (c) Las estrellas enanas blancas están compuestas de un material con un módulo volumétrico de $1.33 \times 10^{22} \text{ Pa}$ y una densidad de $1.0 \times 10^{10} \text{ kg/m}^3$. Tienen radios iguales a 0.009 del radio solar. ¿Cuál es el periodo de pulsación aproximado de una estrella enana blanca? (Véase "Pulsating Stars", por John R. Percy, *Scientific American*, junio de 1975, pág. 66.)

43. En la figura 24, una barra está sujeta en su centro; un disco D colocado en su extremo se proyecta dentro de un tubo de vidrio que tiene granulillos de corcho esparcidos en su interior. El tubo está provisto de un émbolo P en el otro extremo. La barra se pone en vibración longitudinal y el émbolo se mueve hasta que los granulillos de corcho forman un patrón de nodos y antinodos (los granulillos forman bordes bien definidos en los antinodos de presión). Si conocemos la frecuencia ν de las vibraciones longitudinales de la barra, una medición de la distancia promedio d entre antinodos sucesivos determina la velocidad del sonido v en el gas contenido en el tubo. Demuestre que

$$v = 2\nu d.$$

Éste es el método de Kundt para determinar la velocidad del sonido en diversos gases.

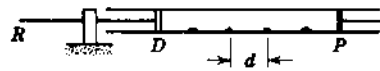


Figura 24 Problema 43.

Sección 20-5 Sistemas vibratorios y fuentes de sonido

44. (a) Halle la velocidad de las ondas de una cuerda de violín de 820 mg y 22.0 cm de longitud si la frecuencia de la fundamental es de 920 Hz. (b) Calcule la tensión en la cuerda.
45. Si una cuerda de violín está afinada en cierta nota, ¿en qué factor deberá aumentarse la tensión en la cuerda si ha de emitir una nota del doble de la frecuencia original (es decir, una nota a una octava más alta)?
46. Cierta cuerda de violín tiene 30 cm de longitud entre sus extremos fijos y una masa de 2.0 g. La cuerda emite un La (440 Hz) cuando se pulsa sin digitar. ¿Dónde deberá ponerse el dedo para que suene un Do (528 Hz)?
47. Un tubo abierto de órgano tiene una frecuencia fundamental de 291 Hz. El primer sobretono ($n = 3$) de un tubo cerrado de órgano tiene la misma frecuencia que el segundo armónico del tubo abierto. ¿Qué longitud tiene cada tubo?
48. Un tubo de 1.18 m de longitud está cerrado en un extremo. Cerca del extremo abierto se coloca un alambre tenso. El alambre tiene 33.2 cm de longitud y 9.57 g de masa. Está fijo en ambos extremos y vibra en su modo fundamental. Pone en vibración a la columna de aire del tubo a su frecuencia fundamental por resonancia. Halle (a) la fre-

cuencia de oscilación de la columna de aire y (b) la tensión en el alambre.

49. Una cuerda de violín de 30.0 cm con una densidad de masa lineal de 0.652 g/m está situada cerca de un bocina alimentada por un oscilador de audio de frecuencia variable. Se halla que la cuerda se pone en oscilación únicamente a las frecuencias de 880 Hz y 1320 Hz cuando la frecuencia del oscilador se varía continuamente dentro de la gama de 500 a 1500 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

Sección 10-6 Pulsaciones

50. Un diapasón de frecuencia desconocida produce tres pulsaciones por segundo contra un diapasón estándar de 384 Hz de frecuencia. La frecuencia de la pulsación disminuye cuando se pone en una punta del primer diapasón un pequeño trozo de cera. ¿Cuál es la frecuencia de este diapasón?
51. Una cuerda La de un violín está un poco más tensa de la cuenta. Se oyen cuatro pulsaciones por segundo cuando se hace sonar junto con un diapasón que está vibrando precisamente al tono La de concierto (440 Hz). ¿Cuál es el periodo de vibración de la cuerda de violín?
52. Se le dan a usted cuatro diapasones. El diapasón con la frecuencia más baja vibra a 500 Hz. Usando dos diapasones al mismo tiempo, se escuchan las siguientes frecuencias de pulsación: 1, 2, 3, 5, 7, y 8 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias posibles de los otros tres diapasones?
53. Se le dan a usted cinco diapasones, cada uno de ellos con una frecuencia diferente. Ensayando con cada par de diapasones, (a) ¿cuál es el número máximo de frecuencias de pulsación diferentes que podrían obtenerse? (b) ¿Cuál es el número mínimo de frecuencias de pulsación diferentes que podrían obtenerse?

Sección 20-7 El efecto Doppler

54. Una fuente S genera ondas circulares en la superficie de un lago, mostrándose en la figura 25 el patrón de las crestas de las ondas. La velocidad de las ondas es de 5.5 m/s y la separación entre crestas es de 2.3 m. Usted está en un pequeño bote enfilado directamente hacia S a una velocidad constante de 3.3 m/s respecto a la orilla. ¿Qué frecuencia observa usted en las ondas?
55. ¿A qué frecuencia se oye el chillido de 15.8 kHz de las turbinas de los motores de un aeroplano que vuela a una velocidad de 193 m/s por el piloto de un segundo aeroplano que trata de adelantar al primero con una velocidad de 246 m/s?
56. Una ambulancia que emite un chillido de 1602 Hz se empareja y rebasa a un ciclista que pedalea una bicicleta a 2.63 m/s. Después de haberlo rebasado, el ciclista oye una frecuencia de 1590 Hz. ¿A qué velocidad se mueve la ambulancia?
57. Un silbato de 538 Hz de frecuencia se mueve en un círculo de 71.2 cm de radio con una velocidad angular de 14.7 rad/s. ¿Cuáles son (a) la frecuencia más baja, y (b) la frecuencia más alta captada por un oyente que está a gran distancia en reposo respecto al centro del círculo?

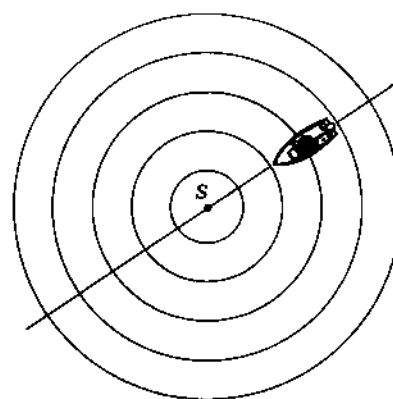


Figura 25 Problema 54.

58. En 1845, Buys Ballot probó por primera vez el efecto Doppler en el sonido. Colocó a un trompetista en un carro de plataforma jalado por una locomotora y a otro trompetista cerca de las vías. Si cada uno de los trompetistas tocaba una nota de 440 Hz, y si existían 4.0 pulsaciones por segundo cuando se aproximaban entre sí, ¿cuál era la velocidad de la plataforma?
59. Una bala se dispara con una velocidad de 2200 ft/s. Halle el ángulo formado por el cono de choque con la línea de movimiento de la bala.
60. Calcule la velocidad del proyectil ilustrado en la fotografía de la figura 14. Suponga que la velocidad del sonido en el medio en que está viajando el proyectil es de 380 m/s.
61. La velocidad de la luz en el agua es de 2.25×10^8 m/s (alrededor de las tres cuartas partes de la velocidad en el vacío). Un haz de electrones a alta velocidad que parte de un betatrón emite radiación Cerenkov en el agua, formando el frente de onda un cono de un ángulo de 58.0° . Halle la velocidad de los electrones en el agua.
62. Dos diapasones idénticos oscilan a 442 Hz. Una persona está situada en alguna parte de la línea que los une. Calcule la frecuencia de la pulsación medida por este individuo si (a) está parado y quieto y los diapasones se mueven ambos hacia la derecha a 31.3 m/s, y (b) los diapasones están estacionarios y el oyente se mueve hacia la derecha a 31.3 m/s.
63. Un aeroplano vuela a 396 m/s a una altitud constante. El choque sónico llega a un observador en tierra 12.0 s después de que el aeroplano ha pasado sobre su cabeza. Halle la altitud del aeroplano. Suponga que la velocidad del sonido es de 330 m/s.
64. Un avión de propulsión a chorro pasa sobre un punto situado en tierra a una altura de 5140 m y a una velocidad de 1.52 Mach (1.52 veces la velocidad del sonido). (a) Halle el ángulo formado por la onda de choque con la línea de movimiento del avión. (b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a tierra la onda de choque después de que el avión ha pasado sobre el punto? Use 331 m/s como velocidad del sonido.
65. La figura 26 muestra a un transmisor y a un receptor de ondas contenidos en un solo instrumento. Se emplean para medir la velocidad V de un objeto-blanco (idealizado

como una placa plana) que se mueve directamente hacia la unidad, analizando las ondas reflejadas por él. (a) Aplique las ecuaciones de Doppler dos veces, primero con el blanco como observador y luego con el blanco como fuente, y demuestre que la frecuencia ν_r de las ondas reflejadas en el receptor se relaciona con la frecuencia ν_s de su fuente según

$$\nu_r = \nu_s \left(\frac{v + V}{v - V} \right),$$

donde v es la velocidad de las ondas. (b) En un gran número de situaciones prácticas, $V \ll v$. En este caso, demuestre que la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx \frac{2V}{v}.$$

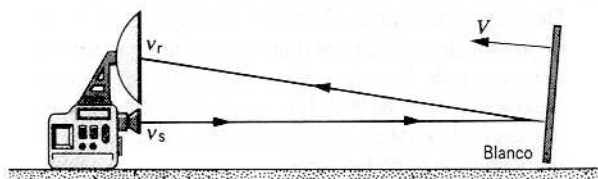


Figura 26 Problema 65.

66. Un aparato de sonar envía ondas de sonido de 148 kHz desde un auto de la policía a un camión que se aproxima con una velocidad de 44.7 m/s. Calcule la frecuencia de las ondas reflejadas detectada en el auto de la policía.
67. Una alarma acústica contra ladrones consta de una fuente que emite ondas de 28.3 kHz de frecuencia. ¿Cuál será la frecuencia de pulsación de las ondas reflejadas en un intruso que camine a razón de 0.95 m/s alejándose directamente de la alarma?
68. Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz de frecuencia se mueve alejándose de usted hacia un peñasco con una velocidad de 10.0 m/s. (a) ¿Cuál es la frecuencia del sonido que usted oye directamente procedente de la sirena? (b) ¿Cuál es la frecuencia del sonido que usted oye reflejándose en el peñasco? (c) Halle la frecuencia de la pulsación. ¿Podría usted oír las pulsaciones? Considere que la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s.
69. Una persona que viaja en un auto sopla una trompeta que suena a 438 Hz. El auto avanza hacia una pared a 19.3 m/s. Calcule (a) la frecuencia del sonido como se recibiría en la pared y (b) la frecuencia del sonido reflejado que regresa a la fuente.
70. Dos submarinos se encuentran en ruta de colisión frontal durante unas maniobras en el Atlántico Norte. El primer submarino se mueve a 20.2 km/h y el segundo a 94.6 km/h. El primero envía una señal de sonar (onda sonora en el agua) de 1030 Hz. Las ondas de sonar viajan a 5470 km/h. (a) El segundo submarino capta la señal. ¿Qué frecuencia oye el detector de sonar de este segundo submarino? (b) El primer submarino capta la señal reflejada. ¿Qué fre-

cuencia oye el detector de sonar de este primer submarino? Véase la figura 27. El océano está en calma; suponga que no hay corrientes.

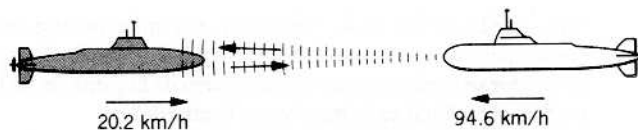


Figura 27 Problema 70.

71. Un auto de la policía hace sonar su sirena cuando se mueve a 27 m/s y se aproxima a un peatón estacionario. El policía que va en el auto oye la sirena a 12.6 kHz pero el peatón la oye a 13.7 kHz. Halle la temperatura del aire. (Suponga que la velocidad del sonido aumenta linealmente con la temperatura entre 0° C y 20° C; véase la tabla 1.)
72. En una conferencia sobre las desviaciones Doppler de las ondas ultrasónicas (de alta frecuencia) usadas en el diagnóstico médico, los autores decían: "La frecuencia de la onda ultrasónica incidente se desvía en unos 1.3 Hz/MHz aproximadamente por cada milímetro por segundo que se mueva una estructura en el cuerpo". ¿Qué velocidad de las ondas ultrasónicas en el tejido humano puede usted deducir de tal afirmación?
73. Un murciélago revolotea en una cueva, navegando muy eficazmente al utilizar emisiones ultrasónicas (emisiones cortas de sonido de alta frecuencia que duran un milisegundo o menos y se repiten varias veces por segundo). Suponga que la frecuencia de la emisión de los sonidos de un murciélago es de 39.2 kHz. Durante una zambullida rápida en línea recta hacia una pared de superficie plana, el murciélago se mueve a 8.58 m/s. Calcule la frecuencia del sonido del eco que escucha el murciélago reflejado por la pared.
74. Un submarino que se mueve hacia el norte con una velocidad de 75.2 km/h respecto al fondo del océano emite una señal de sonar (ondas sonoras en el agua empleadas de modo similar al radar; véase la tabla 1) de 989 Hz de frecuencia. Si en ese punto el océano tiene una corriente que se mueve hacia el norte a 30.5 km/h con relación a tierra, ¿qué frecuencia capta un buque que es arrastrado por la corriente al norte del submarino? (Sugerencia: Todas las velocidades que aparecen en las ecuaciones Doppler deben considerarse respecto al medio.)
75. Una sirena 2000 Hz y un oficial de la defensa civil están ambos en reposo con respecto a la Tierra. ¿Qué frecuencia oye el oficial si el viento sopla a 12 m/s (a) de la fuente hacia el observador y (b) del observador hacia la fuente?
76. Dos trenes que corren en vías paralelas viajan uno hacia el otro a 34.2 m/s con relación al suelo. Un tren hace sonar el silbato a 525 Hz. (a) ¿Qué frecuencia se oirá en el otro tren en aire tranquilo? (b) ¿Qué frecuencia se oirá en el otro tren si el viento sopla a 15.3 m/s paralelo a las vías y hacia el silbato? (c) ¿Qué frecuencia se oirá si se invierte la dirección del viento?

CAPÍTULO 22

TEMPERATURA

Hasta aquí hemos tratado, en su momento, la mecánica de las partículas aisladas, los sistemas de partículas, los cuerpos rígidos, y los fluidos. En cada caso, hemos utilizado de una forma u otra las leyes de Newton para analizar la dinámica del sistema y estudiar a la vez los movimientos de la partícula por separado o los movimientos de los elementos del sistema.

A partir de este capítulo, ampliamos ahora nuestra perspectiva para tratar con sistemas que resultan demasiado complejos como para tratarlos en términos del movimiento de la partícula por separado. Estos sistemas aparecen por lo general desordenados debido al gran número de partículas implicadas y a las muy diferentes maneras en que pueden compartir la energía del sistema. Para analizar estos sistemas hacemos uso de los principios de la termodinámica. En nuestro estudio de la termodinámica definiremos un nuevo conjunto de variables físicas para describir el estado de un sistema, y deduciremos un nuevo conjunto de leyes que rigen el comportamiento de los sistemas. También demostraremos cómo pueden entenderse estas nuevas leyes sobre la base de nuestras leyes previas de la mecánica.

Un concepto central de la termodinámica es la temperatura. En este capítulo damos la definición de la temperatura y exponemos la forma de medirla.

22-1 DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA Y DESCRIPCIÓN MICROSCÓPICA

Un litro de gas contiene unas 3×10^{22} moléculas. Tomemos el caso más sencillo posible y tratemos a las moléculas del gas como partículas puntuales que chocan elásticamente entre sí y con las paredes del recipiente que las contiene. Si especificamos la posición y la velocidad iniciales de cada partícula, podemos entonces aplicar las leyes de Newton y deducir la posición y la velocidad de cada partícula en cualquier momento futuro. Dada esa información, podemos calcular ciertas propiedades mensurables del sistema, tales como la fuerza impulsiva neta ejercida sobre un elemento de área del recipiente. Llamamos a esto la descripción *microscópica* del sistema. Puesto que el número de partículas es tan grande, nos resulta ventajoso tratar al sistema usando valores promedio de las cantidades microscópicas. Este enfoque se llama *mecánica estadística* y se discute en el capítulo 24.

Un enfoque distinto se basa en la pregunta siguiente: ¿Podemos describir al sistema, incluyendo sus interacciones mutuas con su entorno, en términos de un número

pequeño de propiedades del conjunto que sean mensurables por medio de operaciones relativamente sencillas llevadas a cabo en el laboratorio? En el caso de un gas confinado en un recipiente, podemos realmente obtener tal descripción en términos de las cantidades *macroscópicas*, como presión, volumen, temperatura, cantidad de materia, y energía interna, entre otras. En sistemas diferentes a un gas, podemos definir y medir diferentes variables macroscópicas. Por ejemplo, en un material ferromagnético como el hierro, las partículas no interactúan por fuerzas impulsoras en las colisiones sino por fuerzas magnéticas; en la descripción macroscópica de un material ferromagnético, la magnetización debe ser incluida entre las cantidades macroscópicas.

Usualmente las propiedades macroscópicas pueden medirse directamente en el laboratorio, por ejemplo, la presión de un gas confinado o la magnetización de un trozo de hierro. Podemos también medir fácilmente la variación de cualquiera de tales propiedades con la temperatura y derivar una *ecuación de estado* que describa la dependencia de las variables macroscópicas entre sí.

En cualquier sistema, las cantidades macroscópicas y las microscópicas deben relacionarse porque son modos sim-

plemente diferentes de describir la misma situación. En particular, deberíamos ser capaces de expresarla una en términos de la otra. La presión de un gas, una cantidad macroscópica, se mide operativamente usando un manómetro. Microscópicamente, la presión se relaciona con la cantidad promedio por unidad de área en que las moléculas del gas liberan impetu al fluido del manómetro al chocar con su superficie. En la sección 23-3 cuantificamos esta definición microscópica de la presión. De igual forma (véase la sección 23-4), la temperatura de un gas (cantidad macroscópica también) se relaciona con la energía cinética promedio de traslación de las moléculas.

Si las cantidades macroscópicas pueden expresarse en términos de las cantidades microscópicas, entonces las leyes de la termodinámica pueden expresarse cuantitativamente en términos de la mecánica estadística. Esta posibilidad es uno de los logros en el desarrollo de la física. Este tema de la relación entre las variables macroscópicas y microscópicas surgirá con frecuencia según avancemos en el estudio de la termodinámica.

22-2 TEMPERATURA Y EQUILIBRIO TÉRMICO

Consideremos los dos sistemas A y B ilustrados en la figura 1a. Están “aislados” uno del otro y del entorno. Por “aislados” queremos decir que ni la energía ni la materia pueden entrar o salir de cualquiera de los sistemas. Por ejemplo, los sistemas podrían estar rodeados por paredes hechas de placas gruesas de espuma de poliestireno (styrofoam), las que supuestamente son tanto rígidas como impermeables. En este caso se dice que las paredes son *adiabáticas*. (El término “adiabático” proviene del griego y quiere decir “que no puede ser atravesado”. Así, “adiabático” puede entenderse como “aislante”.) Los cambios en las propiedades de un sistema no tienen efecto sobre el otro sistema.

Podemos sustituir la pared adiabática que separa a A y a B por otra que permita el flujo de la energía (Fig. 1b) en una forma que conoceremos como calor. Un ejemplo podría ser una lámina de cobre delgada pero rígida. Esta pared se llama *diatérmica* (Este término, que también proviene del griego, significa que “el calor pasa a través de él”, por lo que podemos tomarlo con la connotación de “conductor de calor”).

Cuando dos sistemas están en mutuo contacto a través de una pared diatérmica, el intercambio de energía causa que las propiedades macroscópicas de los dos sistemas cambien. Por ejemplo, si los sistemas son gases confinados, la presión debería ser una de las cantidades macroscópicas que cambian. Los cambios son relativamente rápidos al principio, pero se vuelven cada vez más lentos en el transcurso del tiempo, hasta que finalmente las

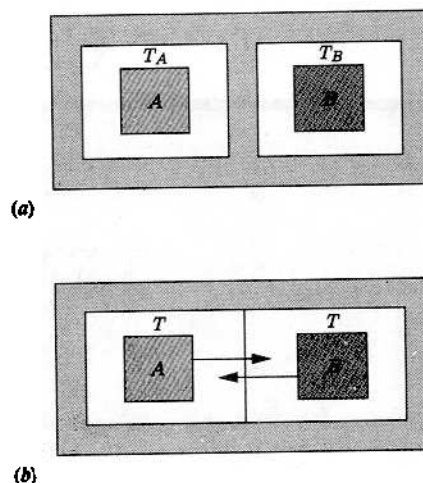


Figura 1 (a) Los sistemas A y B están separados por una pared adiabática. Los sistemas tienen temperaturas diferentes T_A y T_B . (b) Los sistemas A y B están separados por una pared diatérmica. Los sistemas, por haber llegado al equilibrio térmico, tienen la misma temperatura T .

propiedades macroscópicas se aproximan a valores constantes. Cuando ocurre esto, decimos que los dos sistemas están en *equilibrio térmico* entre sí.

Una manera de probar si los cuerpos están en equilibrio térmico es ponerlos en contacto a través de una pared diatérmica y observar si las propiedades macroscópicas de los sistemas cambian con el tiempo después de haber sido puestos en contacto. Si con el tiempo no se observan cambios en las propiedades macroscópicas, los sistemas estaban originalmente en equilibrio térmico. Sin embargo, pudiera ser inconveniente y hasta imposible mover a los dos sistemas con el fin de ponerlos en contacto entre sí. (Los sistemas podrían ser demasiado voluminosos para moverlos fácilmente, o podrían estar separados por una distancia muy grande.) Por lo tanto, generalizamos el concepto de equilibrio térmico de modo que los sistemas no necesariamente tienen que estar en contacto entre sí. Se dice que los cuerpos separados están en equilibrio térmico cuando están en estados tales que, si *estuviesen* conectados, estarían en equilibrio térmico.

La manera de probar si tales sistemas separados están en equilibrio térmico es usar un tercer sistema C . Al poner a C en contacto con A y luego con B , podríamos saber si A y B están en equilibrio térmico sin poner en contacto directo a A y a B . Esto se resume en un postulado llamado la *ley cero de la termodinámica* que se enuncia como sigue:

Si los sistemas A y B están cada uno en equilibrio térmico con un tercer sistema C , entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

Esta ley puede parecer simple, pero no es del todo obvia. Si A , B , y C fueran personas, podría ser cierto que

A y C conocieran a B y que no se conocieran entre sí. Si A y C son trozos de hierro no imantados y B es un imán, entonces A y C son ambos atraídos por B sin ser atraídos entre sí.

A la ley cero se le ha llamado idea lógica tardía. Salió a la luz la década de 1930, mucho tiempo después de que la primera y segunda leyes de la termodinámica hubieran sido propuestas y aceptadas. Como veremos más adelante, la ley cero define en efecto el concepto de temperatura, fundamental en las leyes primera y segunda de la termodinámica. La ley que establece la temperatura debería tener un número más bajo; de aquí que se le llame ley cero.

La temperatura

Cuando dos sistemas están en equilibrio térmico, decimos que tienen la misma *temperatura*. A la inversa, la temperatura es aquella propiedad de un sistema que iguala a la de otro sistema cuando los dos sistemas están en equilibrio térmico. Por ejemplo, supongamos que los sistemas son dos gases que inicialmente tienen temperatura, presión, y volumen diferentes. Después de haber sido puestos en contacto y esperado un tiempo lo suficientemente largo para que lleguen al equilibrio térmico, sus presiones no serán en general iguales, como tampoco sus volúmenes; sin embargo, sus temperaturas siempre serán iguales en el equilibrio térmico. Sólo mediante este argumento basado en el equilibrio térmico puede introducirse en la termodinámica la noción de temperatura.

Aunque la temperatura, en su uso cotidiano, es algo que resulta familiar para todos nosotros, es necesario darle un significado preciso para que tenga valor como unidad de medida científica. Nuestra noción subjetiva de la temperatura no es totalmente confiable. Por ejemplo, suponga que está usted sentado en su casa en una silla hecha parcialmente de tela, madera y metal. Toque las diversas partes de la silla para decidir cuál es “la más fría”, al decir, cuál tiene la temperatura más baja. Es probable que llegue usted a la conclusión de que las partes de metal son las más frías. Sin embargo, cabría suponer que todas las partes de la silla han estado en la sala el tiempo suficiente como para estar en equilibrio térmico con el aire y, por lo tanto, deberían tener la misma temperatura que el aire. Lo que usted examina, al tocar el metal, es no sólo la temperatura de la silla sino también la capacidad de ésta para conducir el calor proveniente de su mano (presumiblemente más caliente). En este caso, su mano realiza una medición subjetiva e incorrecta de la temperatura. Además, ese juicio subjetivo cambiará con el tiempo, si mantiene su mano sobre el metal, cuando la mano y el metal alcancen el equilibrio térmico entre sí.

Puede usted también examinar esa subjetividad que mencionamos mojando una mano en agua fría y la otra en agua caliente. Comprobará que, al tomar un objeto de

temperatura intermedia, la primera mano siente una temperatura más alta que la segunda. Puede tratar de ser un poco más objetivo y comparar dos muestras diferentes del mismo material a temperaturas diferentes tocando cada muestra con la misma mano, la cual puede distinguir “lo más caliente” de “lo más frío”. Este procedimiento debería revelar cuál de los dos objetos está a una temperatura más alta, pero difícilmente es lo bastante cuantitativo como para que nos pueda dar la diferencia. Por lo tanto, es necesario especificar cuidadosamente una manera objetiva de medir la temperatura, lo cual constituye nuestro objetivo en este capítulo.

En el uso práctico de la ley cero, deseamos identificar al sistema C como un termómetro. Si el termómetro entra por separado en equilibrio térmico con los sistemas A y B e indica la misma temperatura, entonces podemos concluir que A y B están en equilibrio térmico y, por lo tanto, que tienen realmente la misma temperatura.

Otro postulado de la ley cero, más riguroso y más fundamental, es el siguiente:

Existe una cantidad escalar, llamada temperatura, que es una propiedad de todos los sistemas termodinámicos en equilibrio. Dos sistemas están en equilibrio térmico si y sólo si sus temperaturas son iguales.

La ley cero define entonces el concepto de temperatura y lo especifica como aquella propiedad macroscópica de un sistema que será igual a la de otro sistema cuando estén en equilibrio térmico. La ley cero nos permite construir y usar los termómetros para medir la temperatura de un sistema, ya que ahora sabemos que un termómetro en contacto térmico con un sistema alcanzará una temperatura común con el sistema.

22-3 MEDICIÓN DE LA TEMPERATURA

En el capítulo 1 describíamos un procedimiento de dos etapas para establecer un patrón de medición o estándar de una cantidad física: definíamos una unidad básica, y luego especificábamos un procedimiento para hacer comparaciones con tal unidad básica. Por ejemplo, en el caso del tiempo, definíamos a la unidad básica en términos de la frecuencia de la luz de cierta longitud de onda emitida por los átomos de cesio. Para que pase 1 segundo se necesitan 9,192,631.770 de esas vibraciones. Contando el número de vibraciones correspondiente podemos usar (al menos en principio) esta escala para medir la vida media humana o incluso la edad del universo.

La temperatura es una de las siete unidades básicas (véase la tabla 1 del capítulo 1), por lo que podemos tratar la temperatura como hemos tratado a otras unidades básicas en el sistema SI: estableciendo un estándar y relacio-

nando a las demás escalas con el estándar. Sin embargo, la temperatura tiene una naturaleza diferente de la de otras unidades básicas en el SI, y, por lo tanto, este esquema no actuará realmente en esa forma simple. Por ejemplo, si definimos a un periodo de vibración de la luz emitida por un átomo de cesio como un patrón de tiempo, entonces dos de tales vibraciones duran el doble de tiempo, y cualquier intervalo de tiempo arbitrario puede ser, en efecto, medido en términos del número de vibraciones. Pero, incluso si definimos un estándar de temperatura, como la del agua hirviendo en ciertas condiciones, no tenemos un procedimiento para determinar una temperatura el doble de grande. Después de todo, dos marmitas de agua hirviendo tienen la misma temperatura que una marmita. No existe forma aparente de usar sólo este patrón para poder relacionar la temperatura del agua hirviendo con la del aceite hirviendo, por ejemplo; ninguna cantidad de agua en ebullición estará jamás en equilibrio térmico con el aceite en ebullición.

Para establecer una escala de medición de la temperatura adoptamos el procedimiento siguiente, que difiere del procedimiento usual para las unidades básicas del SI: buscamos una sustancia que tenga una propiedad que varíe con la temperatura, y medimos esa propiedad. La sustancia que elegimos se llama *sustancia termométrica*, y la propiedad que depende de la temperatura se llama *propiedad termométrica*. Ejemplos de ello podrían ser el volumen de un líquido (como en el termómetro de mercurio con bulbo de vidrio común), la presión de un gas mantenido a volumen constante, la resistencia eléctrica de un alambre, la longitud de una tira de metal, o el color del filamento de una lámpara, todos los cuales varían con la temperatura. *La elección de una de estas sustancias lleva a una escala individual de temperatura definida sólo para esa sustancia y que no necesariamente concuerda con otras escalas de temperatura definidas de manera independiente.* Para eliminar esta discrepancia es necesario adoptar estándares para la elección de determinada sustancia termométrica, determinada propiedad termométrica, y determinada relación entre esa propiedad y una escala de temperatura universalmente aceptada. Cada escala de temperatura por separado puede entonces ser calibrada contra la escala universal. En las secciones 22-4 y 26-5 describimos la escala universal aceptada.

Supongamos que nuestro termómetro está basado en un sistema en el cual medimos el valor de la propiedad termométrica X . La temperatura T es alguna función de X , $T(X)$. Elegimos la relación más sencilla posible entre T y X , la función lineal dada por

$$T(X) = aX + b, \quad (1)$$

donde deben ser determinadas las constantes a y b . Esta escala lineal significa que cada intervalo de temperatura ΔT corresponde al mismo cambio ΔX en el valor de la propiedad termométrica. Para determinar una temperatura

en esta escala, elegimos dos puntos de calibración, definimos arbitrariamente las temperaturas T_1 y T_2 en esos puntos, y medimos los valores correspondientes X_1 y X_2 de la propiedad termométrica.

Los ejemplos más conocidos de este tipo de escala son las escalas Celsius y Fahrenheit usadas en los termómetros comunes, en los que la sustancia termométrica suele ser el mercurio y la propiedad termométrica puede ser su volumen, observado en la longitud de la columna de mercurio en un tubo delgado de vidrio. El comportamiento lineal significa en este caso que los intervalos entre las marcas de los grados en el tubo de vidrio de un termómetro son de tamaño uniforme.

Las escalas Celsius y Fahrenheit*

En casi todos los países del mundo se emplea la escala Celsius (también llamada escala de grados centígrados) para todas las mediciones populares y comerciales y la mayoría de las científicas. La escala Celsius se basó originalmente en dos puntos de calibración: el punto normal de congelación del agua, que se definió como 0°C , y el punto normal de ebullición del agua, que se definió como 100°C . Estos dos puntos se emplearon para calibrar termómetros, y luego se dedujeron las demás temperaturas por interpolación y extrapolación. Para expresar la temperatura en la escala Celsius, la cifra dada debe ir siempre acompañada del símbolo de grados ($^\circ$).

La escala Fahrenheit emplea un grado más pequeño que la escala Celsius, y su cero se establece a una temperatura diferente. Originalmente se basó también en dos puntos fijos, cuyo intervalo se dividió en 100 grados: el punto de congelación de una mezcla de hielo y sal, y la temperatura normal del cuerpo humano. En esta escala, los puntos normales de congelación y de ebullición del agua vienen a ser, respectivamente, 32°F y 212°F . La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit es

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32. \quad (2)$$

También en la escala Fahrenheit, debe utilizarse el símbolo de grados para expresar la temperatura como, por ejemplo, 98.6°F (la temperatura normal del cuerpo humano).

La conversión entre las escalas Fahrenheit y Celsius se lleva a cabo fácilmente recordando unos cuantos puntos

* Anders Celsius (1701-1744) fue un astrónomo sueco que, además de desarrollar la escala de temperatura que lleva su nombre, hizo mediciones de la longitud del arco de un meridiano, lo cual sirvió para corroborar la teoría de Newton sobre el achatamiento de la Tierra en los polos. Daniel Fahrenheit (1686-1736), contemporáneo de Celsius, fue un físico alemán que inventó los termómetros con líquidos de alcohol y de mercurio y los empleó para estudiar los puntos de ebullición y de congelación de los líquidos.

respectivos, tales como el punto normal de congelación ($0^{\circ}\text{C} = 32^{\circ}\text{F}$) y el punto normal de ebullición ($100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$) del agua, y haciendo uso de la igualdad entre un intervalo de 5 grados en la escala Celsius y un intervalo de 9 grados en la escala Fahrenheit, lo cual expresamos así:

$$9^{\circ}\text{F} = 5^{\circ}\text{C}. \quad (3)$$

Obsérvese que estos intervalos se expresan como $^{\circ}\text{F}$ y $^{\circ}\text{C}$, y no como $^{\circ}\text{F}$ y $^{\circ}\text{C}$. Las lecturas de la escala de temperatura se dan en $^{\circ}\text{F}$ o en $^{\circ}\text{C}$ (grados Fahrenheit o grados Celsius); las diferencias de lectura se dan en $^{\circ}\text{F}$ o en $^{\circ}\text{C}$ (grados Fahrenheit o grados Celsius).

La escala Kelvin*

En la escala Kelvin, uno de los puntos de calibración se define en una temperatura de cero, donde la propiedad termométrica tiene también un valor de cero; en efecto, la constante b de la ecuación 1 se establece como cero, en cuyo caso

$$T(X) = aX. \quad (4)$$

Para determinar una temperatura en esta escala necesitamos únicamente un punto P de calibración. En ese punto, se define que la temperatura es T_P y la propiedad termométrica tiene el valor medido X_P . En este caso

$$a = \frac{T_P}{X_P} \quad (5)$$

y por lo tanto

$$T(X) = T_P \frac{X}{X_P}. \quad (6)$$

Siguiendo la norma general, escogemos para nuestra calibración la temperatura a la cual coexisten en equilibrio el hielo, el agua líquida, y el vapor de agua. Este punto, que está muy cercano al punto normal de congelación del agua, se llama *punto triple* del agua (Fig. 2). Por acuerdo internacional se ha establecido que la temperatura en el punto triple sea

$$T_{tr} = 273.16 \text{ K},$$

donde K (= kelvin) es la unidad básica en el SI para la temperatura en la escala absoluta, idéntica a la escala de

* Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907) fue un físico e ingeniero escocés que contribuyó fundamentalmente a una amplia variedad de temas, incluyendo no sólo la termodinámica sino también la ley de conservación de la energía, la electricidad y el magnetismo, la acústica, y la hidrodinámica. Sus contribuciones científicas fueron conceptuadas como de enorme importancia en su época, por lo que, a su muerte, recibió sepultura en la Abadía de Westminster, en Londres.

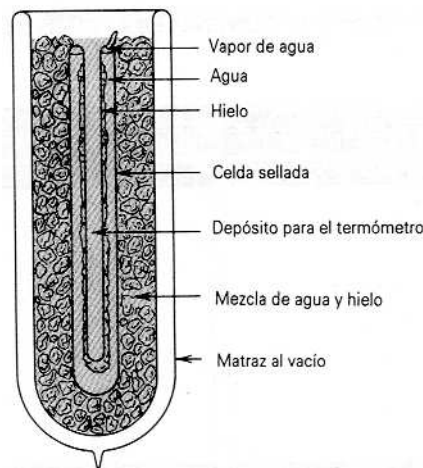


Figura 2 La celda del punto triple del National Institute of Standards and Technology (anteriormente la National Bureau of Standards) de Estados Unidos. La celda interior en forma de U contiene agua pura y está sellada, después de haberse extraído de ella todo el aire. Está sumergida en un baño de agua y hielo. El sistema está en el punto triple cuando el hielo, el agua, y el vapor de agua están todos ellos presentes, y en equilibrio, dentro de la celda. El termómetro que va a ser calibrado se inserta en el pozo central.

temperatura del gas ideal que se estudia en la sección siguiente. Así pues, se define que el kelvin es $1/273.16$ de la temperatura del punto triple del agua. Con esta elección del punto de calibración, la ecuación 6 resulta

$$T(X) = (273.16 \text{ K}) \frac{X}{X_{tr}}, \quad (7)$$

donde X_{tr} es el valor de la propiedad termométrica en el punto triple.

Una temperatura determinada a partir de la ecuación 7 es válida únicamente para esa propiedad termométrica en particular; otras propiedades termométricas y sustancias termométricas pueden dar lecturas de temperatura diferentes (véase al problema muestra 1). Para eliminar esta confusión entre las lecturas de termómetros diferentes, elegimos como norma aceptada un tipo de termómetro en el que la temperatura pueda determinarse independientemente de la naturaleza de la sustancia termométrica. Esta elección se trata en la sección siguiente.

El tamaño del grado es el mismo en las escalas Celsius y Kelvin, pero el cero de la escala Celsius se desplaza a un valor más conveniente. Hoy día ya no empleamos dos puntos fijos para definir la escala Celsius; en cambio, la escala Kelvin se define, y la relación entre la temperatura Celsius T_C y la temperatura Kelvin T ahora se establece así:

$$T_C = T - 273.15. \quad (8)$$

Los puntos de congelación y de ebullición del agua se miden ahora en la escala Kelvin y se convierten luego a

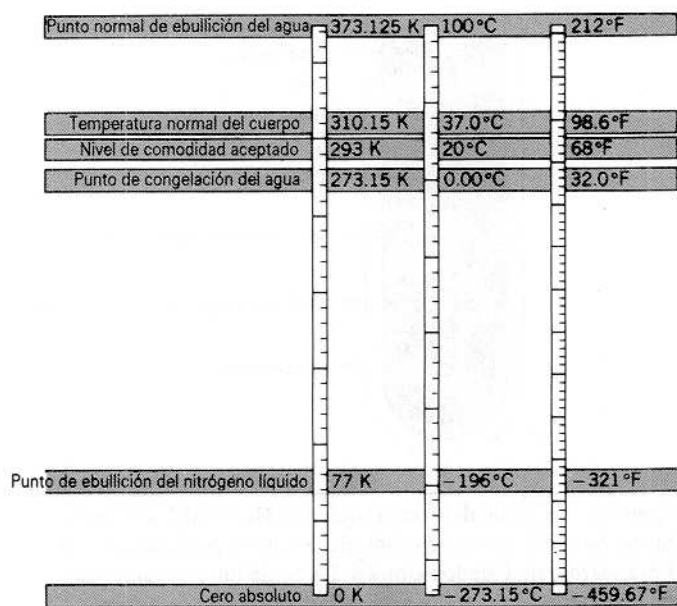


Figura 3 Comparación de las escalas Kelvin, Celsius, y Fahrenheit.

Celsius usando la ecuación 8. Los valores experimentales son, respectivamente, 0.00°C y 99.975°C. La figura 3 compara las escalas Fahrenheit, Celsius, y Kelvin.

Problema muestra 1 La resistencia de cierto alambre de platino aumenta en un factor de 1.392 entre el punto triple del agua y el punto de ebullición normal de ésta. Halle la temperatura por resistencia del platino del agua en ebullición.

Solución Usamos la ecuación 7, con la resistencia R como la propiedad termométrica X . No se nos da el valor de R_w , pero sabemos que en el punto de ebullición del agua, $R = 1.392R_w$. Entonces

$$T(R) = T_w \frac{R}{R_w} = (273.16 \text{ K})(1.392) = 380.2 \text{ K}.$$

Este valor da la "temperatura por resistencia del platino" del agua en ebullición. Otros termómetros darán valores diferentes; por ejemplo, la temperatura del agua hirviendo según un termopar de cobre-constantano es de 440 K. Cada una de estas lecturas es una temperatura determinada en una escala "propia", válida únicamente para ese aparato. La temperatura aceptada del punto de ebullición normal del agua es de 373.125 K, la cual se determina usando el termómetro de gas a volumen constante que se describe en la sección siguiente.

22-4 LA ESCALA DE TEMPERATURA DE UN GAS IDEAL

La temperatura de un sistema debe tener un valor bien definido, independiente del medio empleado para medir-

la. Según la ecuación 7, sustancias termométricas diferentes dan todas la misma temperatura en el punto triple, pero (como lo hemos visto en el problema muestra 1) sus lecturas en otros puntos pueden diferir. Podríamos imaginar efectuar una serie de mediciones en que simultáneamente empleásemos propiedades termométricas distintas para determinar la temperatura de un sistema. Los resultados de tal prueba demostrarían que todos los termómetros dan lecturas diferentes. Podríamos continuar eligiendo una propiedad termométrica en particular, tal como la resistencia de un alambre, y medir la temperatura del sistema usando diferentes clases de alambre, hechos con materiales diferentes: de nuevo hallaríamos una amplia variación en las mediciones.

Para obtener una escala de temperatura definida, debemos elegir determinada clase de termómetro como estándar. La elección se haría, no sobre la base de la conveniencia experimental, sino averiguando si la escala de temperatura definida por un termómetro en particular es útil para formular las leyes de la física. La variación de lecturas más pequeña se encuentra que es entre los *termómetros de gas a volumen constante* que utilizan gases diferentes, lo cual sugiere elegir un gas como sustancia termométrica estándar. Sucede que cuando se reduce la cantidad de gas y por lo tanto su presión, la variación de las lecturas entre termómetros de gas que usan diferentes clases de gas se reduce también. De aquí que parezca haber algo fundamental respecto al comportamiento de un termómetro a volumen constante que contenga un gas a baja presión. Consideremos por lo tanto las propiedades del termómetro de gas a volumen constante.

Si el volumen de un gas se mantiene constante, su presión depende de la temperatura y aumenta linealmente con la elevación de la temperatura. El termómetro de gas a volumen constante emplea la presión de un gas a volumen constante como la propiedad termométrica.

La figura 4 muestra un diagrama del termómetro. Consiste de un bulbo de vidrio, porcelana, cuarzo, platino, o una aleación de platino e iridio (dependiendo de la gama de temperaturas dentro de la cual se use), conectado por medio de un tubo capilar a un manómetro de mercurio. El bulbo B que contiene algún gas es puesto dentro del baño o entorno cuya temperatura T va a ser medida; al elevar o bajar el recipiente de mercurio R , el mercurio en la rama izquierda del tubo en U puede hacerse coincidir con una marca de referencia fija, manteniendo así a volumen constante al gas confinado. La diferencia entre la presión p del gas confinado en la rama izquierda del tubo y la presión p_0 de la atmósfera en la rama derecha del tubo está indicada por la altura h de la columna de mercurio, y entonces

$$p = p_0 - \rho gh, \tag{9}$$

donde ρ es la densidad del mercurio en el manómetro.

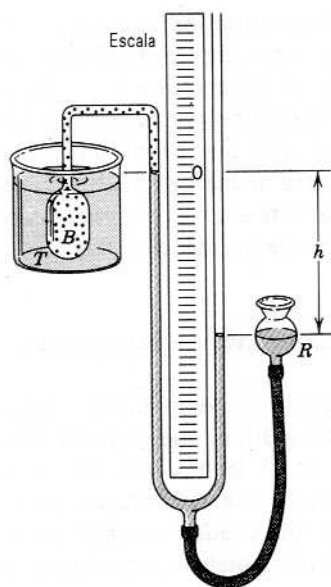


Figura 4 Termómetro de gas a volumen constante. El bulbo B está sumergido en un baño cuya temperatura T va a ser medida. La diferencia entre la presión del gas en el bulbo y la presión atmosférica se determina por la altura h de la columna de mercurio.

En la práctica el aparato es muy elaborado, y debemos llevar a cabo muchas correcciones, por ejemplo, (1) para compensar el pequeño cambio de volumen debido a la ligera contracción o expansión del bulbo y (2) para compensar el hecho de que no se ha sumergido en el baño todo el gas confinado (como el que se halla en el capilar). Supongamos que se han efectuado todas las correcciones, y que p es el valor corregido de la presión absoluta a la temperatura del baño. Entonces la temperatura se da provisionalmente por la fórmula

$$T(p) = (273.16 \text{ K}) \frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{a } V \text{ constante}). \quad (10)$$

Pongamos cierta cantidad de gas, por ejemplo nitrógeno, dentro del bulbo de modo que cuando el bulbo esté rodeado de agua en el punto triple la presión p_{tr} sea igual a un valor definido, digamos 80 cm de Hg. Ahora sumergimos el bulbo en el sistema cuya temperatura T deseamos medir y, con el volumen mantenido constante en su valor previo, medimos la presión p del gas, según la ecuación 9, y calculamos la temperatura provisional T del sistema usando la ecuación 10. El resultado de esta medición se indica con un punto en la figura 5. Regresemos ahora el termómetro a la celda de punto triple y retiremos algo de gas, de modo que p_{tr} tenga un valor más pequeño, digamos 40 cm de Hg. Regresamos luego el termómetro al sistema desconocido, medimos el nuevo valor de p , y calculamos otra temperatura provisional T , indicada también en la figura 5. Continuamos con este mismo procedimiento,

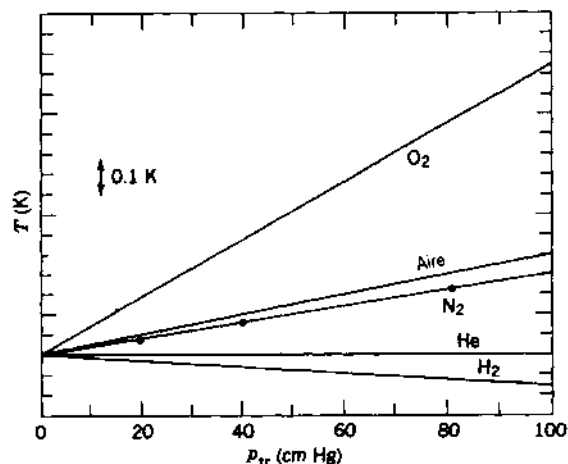


Figura 5 Cuando se reduce la presión del gas nitrógeno en un termómetro de gas a volumen constante de 80 cm de Hg a 40 y luego a 20, la temperatura calculada para el sistema tiende a un límite que corresponde a una presión de 0. Otros gases tienden al mismo límite, el cual es la temperatura T de gas ideal del sistema. La gama completa de la escala vertical es alrededor de 1 K para condiciones típicas.

reduciendo la cantidad de gas en el bulbo y calculando la temperatura T para cada nuevo valor más bajo de p_{tr} . Si graficamos los valores de T contra p_{tr} , podemos extrapolar la curva resultante hasta la intersección con el eje donde $p_{tr} = 0$. En la figura 5 se muestran los puntos-dato para el N_2 y la extrapolación en línea recta resultante.

Repetimos este procedimiento con otros gases en el termómetro diferentes al nitrógeno, y obtenemos los resultados mostrados en la figura 5. Las líneas muestran que las lecturas de la temperatura de un termómetro de gas a volumen constante depende del gas empleado a valores ordinarios de la presión de referencia. Sin embargo, al disminuir la presión de referencia, las lecturas de temperatura de los termómetros de gas a volumen constante que empleen gases diferentes tienden al mismo valor T , el cual podemos considerar como la temperatura del sistema. *El valor extrapolado de la temperatura depende sólo de las propiedades generales de los gases y no de un gas en particular.* Por lo tanto, definimos la *escala de temperatura de gas ideal*:

$$T = (273.16 \text{ K}) \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{a } V \text{ constante}). \quad (11)$$

Elegimos como termómetro estándar un termómetro de gas a volumen constante que use una escala de temperatura definida por la ecuación 11.

Si la temperatura ha de ser en verdad una cantidad física fundamental, una en la que las leyes de la termodinámica puedan expresarse, es absolutamente necesario que su definición sea independiente de las propiedades de materiales específicos. Por ejemplo, no serviría que una canti-

TABLA 1 TEMPERATURAS DE ALGUNOS SISTEMAS

Sistema	Temperatura (K)
Plasma en un reactor de pruebas de fusión	10^8
Centro del Sol	10^7
Superficie del Sol	6×10^3
Punto de fusión del tungsteno	3.6×10^3
Punto de congelación del agua	2.7×10^2
Punto de ebullición normal del N_2	77
Punto de ebullición normal del ${}^4\text{He}$	4.2
Temperatura media del universo	2.7
Refrigerador por dilución ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$	5×10^{-3}
Desimantación adiabática de la sal paramagnética	10^{-3}
Enfriamiento por espín nuclear	2×10^{-8}

dad básica como la temperatura dependiese de la dilatación del mercurio, de la resistividad eléctrica del platino, o de cualquier otra propiedad listada en algún manual. Elegimos al termómetro de gas como nuestro instrumento estándar precisamente porque en su operación no se hallan implicadas tales propiedades específicas de los materiales. Podemos usar cualquier gas y siempre obtendremos la misma respuesta.

Si bien nuestra escala de temperatura es independiente de las propiedades de cualquier gas determinado, sí depende, en cambio, de las propiedades de los gases en general (es decir, de las propiedades del así llamado gas ideal). La temperatura más baja que puede ser medida con un termómetro de gas es de alrededor de 1 K. Para obtener esta temperatura debemos emplear helio a baja presión, el cual permanece como gas a temperaturas más bajas que cualquier otro gas. No podemos dar un significado experimental a temperaturas por debajo de 1 K por medio de un termómetro de gas.

Nos gustaría definir una escala de temperatura de modo tal que sea independiente de las propiedades de cualquier sustancia en particular. En la sección 26-5 mostramos que la escala de temperatura termodinámica absoluta, llamada la escala Kelvin, es esa escala. Mostraremos también que la escala del gas ideal y la escala Kelvin son idénticas en la gama de temperaturas en que puede ser empleado un termómetro de gas. Por esta razón usamos unidades kelvin para la temperatura del gas ideal, como ya lo hicimos en la ecuación 11. La tabla 1 lista las temperaturas en kelvin de varios cuerpos y procesos.

En la sección 26-5 mostraremos también que la escala Kelvin tiene un *cero absoluto* de 0 K y que es imposible enfriar un sistema por debajo de 0 K. El cero absoluto de temperatura ha desafiado todos los intentos de alcanzarlo experimentalmente, pero se han conseguido temperaturas de cero absoluto dentro de un intervalo pequeño (10^{-8} K).

Si bien existe una conexión directa, como lo veremos en el capítulo 23, entre el movimiento microscópico de las

moléculas y la temperatura macroscópica, *no cesa* todo movimiento molecular en el cero absoluto de temperatura. La conexión entre la temperatura y la energía cinética molecular se basa en conceptos clásicos, mientras que la teoría cuántica nos dice que existe un límite más bajo diferente de cero para la energía cinética molecular, aun en el cero absoluto. Esta *energía del punto cero* no puede ser deducida a partir de los cálculos clásicos.

La escala internacional de temperatura

La medición precisa de una temperatura con un termómetro de gas es una tarea difícil que requiere muchos meses de trabajo arduo en el laboratorio. En la práctica, el termómetro de gas se usa únicamente para establecer ciertos puntos fijos que puedan ser empleados más tarde para calibrar otros termómetros secundarios más convenientes.

En el uso práctico, como en la calibración de termómetros industriales o científicos, ha sido adoptada la Escala Internacional de Temperatura. Esta escala consta de un grupo de procedimientos que proporcionan en la práctica las mejores aproximaciones posibles a la escala Kelvin. La escala adoptada consta de un conjunto de puntos fijos, junto con los instrumentos que deben utilizarse para interpolar entre estos puntos fijos y extrapolarlos más allá del punto fijo más alto. Aproximadamente, cada 20 años el Comité Internacional de Pesas y Medidas ha adoptado una escala nueva; en la tabla 2 se muestran los puntos fijos de la más reciente (1990).

22-5 DILATACIÓN TÉRMICA

Sucede a menudo que podemos aflojar una tapa de metal apretada de un frasco sometiéndola a la acción de un chorro de agua caliente. Al elevarse la temperatura, la tapa de metal se dilata ligeramente con relación al frasco de vidrio. No siempre es deseable la dilatación térmica, como lo sugiere la figura 6. Todos hemos visto las juntas de dilatación situadas en las calzadas de los puentes. Las tuberías de las refineras suelen tener un bucle de expansión, con el fin de que la tubería no se deforme al elevarse la temperatura. Los materiales usados para obturaciones dentales tienen propiedades de dilatación similares a las del esmalte de los dientes. En la fabricación de aviones se diseñan a menudo remaches y otros afianzadores de modo que deban ser enfriados en hielo seco antes de su inserción, dejando luego que se dilaten para lograr el ajuste perfecto. Los termómetros y los termostatos pueden estar basados en las diferencias de dilatación entre los componentes de una laminilla bimetálica; véase la figura 7. En un termómetro de tipo bastante común, la lami-

TABLA 2 PUNTOS FIJOS PRIMARIOS EN LA ESCALA INTERNACIONAL DE TEMPERATURAS DE 1990*

Substancia	Estado	Temperatura (K)
Helio	Punto de ebullición	3-5 [†]
Hidrógeno	Punto triple	13.8033
Hidrógeno	Punto de ebullición [‡]	17.025-17.045 ^c
Hidrógeno	Punto de ebullición	20.26-20.28 ^c
Neón	Punto triple	24.5561
Oxígeno	Punto triple	54.3584
Argón	Punto triple	83.8058
Mercurio	Punto triple	234.3156
Agua	Punto triple	273.16
Galio	Punto de fusión	302.9146
Indio	Punto de congelación	429.7485
Estaño	Punto de congelación	505.078
Cinc	Punto de congelación	692.677
Aluminio	Punto de congelación	933.473
Plata	Punto de congelación	1234.93
Oro	Punto de congelación	1337.33
Cobre	Punto de congelación	1357.77

[†] Véase "The International Temperature Scale of 1990 (ITS-90)," por H. Preston-Thomas, *Metrologia*, 27 (1990), pág. 3.

[‡] Este punto de ebullición es a una presión de $\frac{1}{3}$ de atmósfera. Todos los demás puntos de ebullición, de fusión, o de congelación, son a una presión de 1 atm.

^c La temperatura del punto de ebullición varía un poco con la presión del gas encima del líquido. La escala de temperaturas da la relación entre T y p que puede emplearse para calcular T para una p dada.

nilla bimetalica tiene forma helicoidal, de modo que se enrolla y desenrolla con los cambios de temperatura; véase la figura 8. Los conocidísimos termómetros de líquido dentro de vidrio se basan en el hecho de que líquidos tales como el mercurio o el alcohol se dilatan en un grado diferente (mayor) de lo que lo hacen sus recipientes de vidrio.

Podemos entender esta dilatación considerando un modelo sencillo de la estructura de un sólido cristalino. Los átomos se mantienen juntos entre sí en un arreglo regular por medio de fuerzas eléctricas, que son como las que serían ejercidas por un conjunto de resortes que uniesen a los átomos. Podemos entonces formarnos una imagen del cuerpo sólido como si fuera un colchón de resortes microscópicos (Fig. 9). Estos "resortes" son bastante rígidos y no son ideales en absoluto (véase el problema 3 del capítulo 15), existiendo alrededor de 10^{23} de ellos por centímetro cúbico. Los átomos de los sólidos están vibrando a cualquier temperatura. La amplitud de la vibración es de alrededor de 10^{-9} cm, más o menos un décimo de un diámetro atómico, y la frecuencia es de alrededor de 10^{13} Hz.

Cuando aumenta la temperatura, los átomos vibran con una amplitud mayor, y la distancia promedio entre los átomos aumenta. (Véase el estudio de la base microscópica de la dilatación térmica al final de esta sección.) Esto

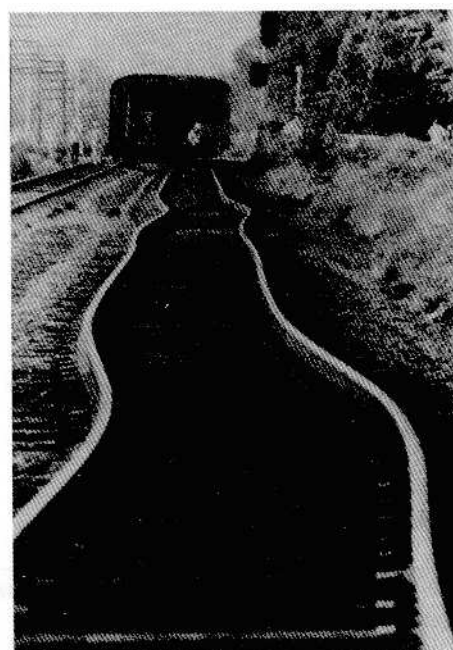


Figura 6 Deformación de las vías de ferrocarril debido a la dilatación térmica en un día muy caluroso. Las juntas de expansión entre los rieles de la vía pueden evitar esta deformación.

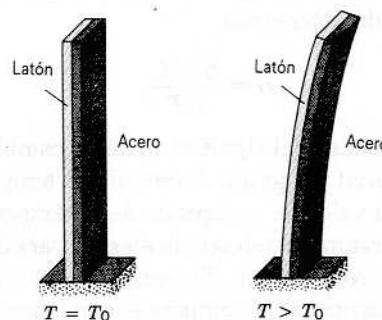


Figura 7 Laminilla bimetalica, que consta de una laminilla de latón y una laminilla de acero soldadas entre sí, a temperatura T_0 . A temperaturas más altas de T_0 , la laminilla se dobla como se muestra; a temperaturas más bajas se dobla en sentido opuesto. Muchos termostatos funcionan según este principio, usando el movimiento del extremo de la laminilla para formar o romper un contacto eléctrico.

conduce a una dilatación de todo el cuerpo sólido. El cambio en *cualquier* dimensión lineal del sólido, tal como su longitud, su ancho, o su espesor, se llama *dilatación lineal*. Si la longitud de esta dimensión lineal es L , el cambio de temperatura ΔT causa un cambio de longitud ΔL . Por medio de la experimentación hallamos que, si ΔT es lo suficientemente pequeña, este cambio de longitud ΔL es proporcional al cambio de temperatura ΔT y a la longitud original L . Por lo tanto, podemos escribir

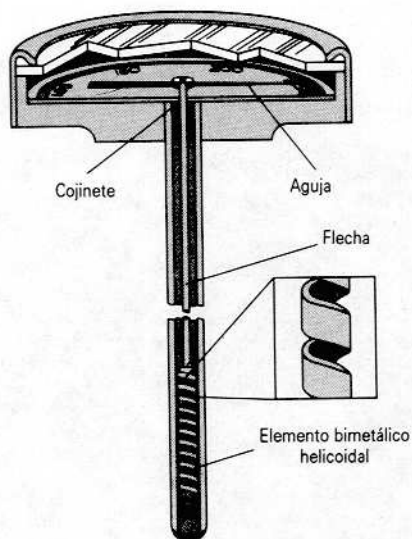


Figura 8 termómetro basado en una laminilla bimetalica. La laminilla tiene forma helicoidal, que se enrolla y desenrolla al cambiar la temperatura.

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (12)$$

donde α , llamada el *coeficiente de dilatación lineal*, tiene valores diferentes para materiales diferentes. Reescribiendo esta fórmula obtenemos

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T}, \quad (13)$$

de modo que α tiene el significado de un cambio fraccionario en longitud por grado de cambio de temperatura.

En rigor, el valor de α depende de la temperatura real y de la temperatura de referencia elegida para determinar a L (véase el problema 23). Sin embargo, su variación es usualmente despreciable comparada con la precisión con la que necesitan ser llevadas a cabo las mediciones. A menudo es suficiente elegir un valor promedio que pueda ser tratado como una constante dentro de cierta gama de temperaturas. En la tabla 3 se listan los valores experimentales del coeficiente de dilatación lineal promedio de varios sólidos comunes. Para todas las sustancias listadas, el cambio de tamaño consiste en una dilatación al elevarse la temperatura, ya que α es positivo. El orden de magnitud de la dilatación es de alrededor de 1 milímetro por metro de longitud por 100 grados Celsius. (Obsérvese el uso de $^{\circ}\text{C}$, y no de $^{\circ}\text{F}$, para expresar aquí los cambios de temperatura.)

Problema muestra 2 Una escala métrica de acero va a ser marcada de modo que los intervalos de un milímetro sean precisos dentro de unos 5×10^{-5} mm a cierta temperatura. ¿Cuál es la variación máxima de la temperatura permisible durante el marcado?

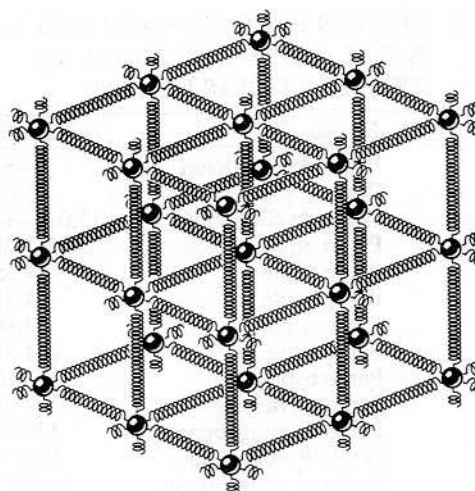


Figura 9 Un sólido se comporta en muchos sentidos como si fuese una colección de átomos unidos por fuerzas elásticas (representadas aquí por resortes).

Solución Partiendo de la ecuación 12, tenemos

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L} = \frac{5 \times 10^{-5} \text{ mm}}{(11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(1.0 \text{ mm})} = 4.5 ^{\circ}\text{C},$$

donde hemos usado el valor de α para el acero según la tabla 3. La temperatura durante el marcado debe mantenerse constante dentro de unos 5°C , y la escala debe ser usada dentro del mismo intervalo de la temperatura a la cual fue hecha.

Obsérvese que si se hubiera usado la aleación invar en lugar de acero, podríamos obtener la misma precisión dentro de un intervalo de temperatura de unos 75°C ; o, lo que es equivalente, si pudiéramos mantener la misma variación de la temperatura (5°C), podríamos obtener una precisión de unos 3×10^{-6} mm debido a los cambios de temperatura.

En muchos sólidos, llamados *isotrópicos*, el porcentaje del cambio en longitud para un cambio de temperatura dado es el mismo para todas las líneas del sólido.

TABLA 3 ALGUNOS COEFICIENTES DE DILATACIÓN LINEAL PROMEDIO¹

Sustancia	$\alpha(10^{-6}$ por $^{\circ}\text{C}$)
Hielo	51
Plomo	29
Aluminio	23
Latón	19
Cobre	17
Acero	11
Vidrio (ordinario)	9
Vidrio (Pyrex)	3.2
Aleación invar	0.7
Cuarzo (fundido)	0.5

¹ Se consignan valores promedios típicos en el intervalo de temperatura de 0°C a 100°C , salvo para el hielo cuyo intervalo es de -10°C a 0°C .

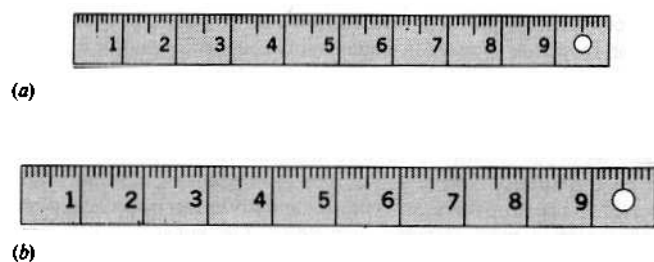


Figura 10 Una regla de acero a dos temperaturas diferentes. La dilatación aumenta en proporción en todas las dimensiones: la regla, los números, el orificio, y el espesor crecen todos en el mismo factor. (La dilatación mostrada está muy exagerada; para obtener tal expansión se requeriría un aumento de temperatura de unos ¡20,000 C°!)

La expansión es bastante análoga a una ampliación fotográfica, excepto que un sólido es tridimensional. Entonces, si tenemos una lámina plana con un orificio troquelado en ella, $\Delta L/L (= \alpha \Delta T)$ para una ΔT dada es la misma para la longitud, el espesor, la diagonal de una cara, la diagonal del cuerpo, y el diámetro del orificio. Cada línea, ya sea recta o curva, se alarga en la razón α por grado de elevación de la temperatura. Si usted graba su nombre sobre la lámina, la línea que representa a su nombre tiene el mismo cambio fraccionario de longitud que cualquier otra línea. En la figura 10 se muestra la analogía con una ampliación fotográfica.

Teniendo en cuenta estas ideas, debería serle a usted posible demostrar (véanse los problemas 30 y 31) que, con un alto grado de precisión, el cambio fraccionario en el área A por cambio de temperatura en grados de un sólido isotrópico es 2α , es decir,

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T, \quad (14)$$

y el cambio fraccionario en el volumen V por cambio de temperatura en grados de un sólido isotrópico es 3α , es decir,

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta T. \quad (15)$$

Puesto que la forma de un fluido no es precisa, únicamente el cambio de volumen con la temperatura es significativo. Los gases responden fuertemente a los cambios de temperatura o de presión, mientras que el cambio de volumen de los líquidos con los cambios de temperatura o de presión es mucho más pequeño. Si hacemos que β represente al coeficiente de dilatación volumétrica de un líquido, de modo que

$$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta T}, \quad (16)$$

hallamos que β es relativamente independiente de la temperatura. Los líquidos se dilatan típicamente con un aumento de la temperatura, siendo su dilatación volumétrica

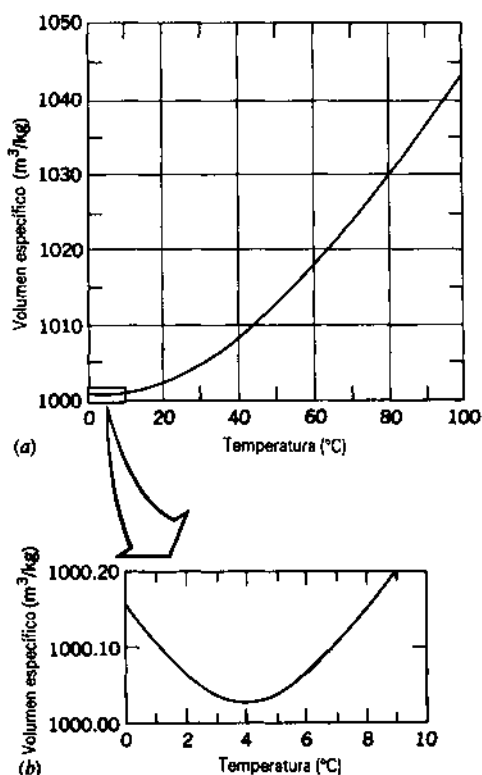


Figura 11 (a) Volumen específico (volumen ocupado por una masa en particular) del agua en función de su temperatura. El volumen específico es el inverso de la densidad (masa por unidad de volumen). (b) Ampliación de la región cercana a 4°C, mostrando un mínimo en el volumen específico (o una densidad máxima).

generalmente alrededor de 10 veces más grande que la de los sólidos.

Sin embargo, el líquido más común, el agua, no se comporta como muchos otros líquidos. En la figura 11 mostramos la curva de dilatación volumétrica del agua. Obsérvese que a más de 4°C el agua se dilata al aumentar la temperatura, aunque no linealmente. (Esto es, β no es constante durante estos intervalos grandes de temperatura.) Empero, al bajar la temperatura de 4°C a 0°C, el agua se dilata en lugar de contraerse, lo cual es la razón de que los lagos se congelen primero en su superficie. Tal dilatación con el descenso de la temperatura no se observa en ningún otro líquido común; se observa en sustancias parecidas al hule y en ciertos sólidos cristalinos dentro de intervalos de temperatura limitados. La densidad del agua tiene un máximo en 3.98°C, donde su valor es de 999.973 kg/m³. (En un principio se suponía que el kilogramo patrón y el metro patrón correspondían a una densidad máxima del agua de 1000 kg/m³, o sea 1 g/cm³. Sin embargo, mediciones más precisas demuestran que los patrones internacionales no corresponden exactamente a este valor.)

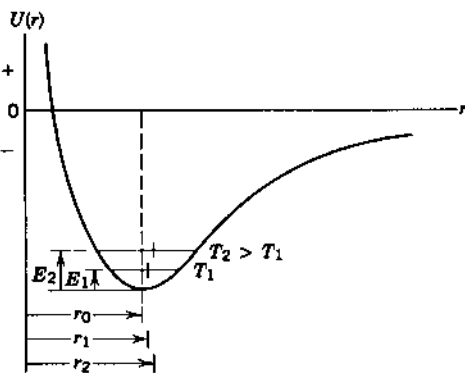


Figura 12 Curva de la energía potencial de dos átomos adyacentes de un sólido en función de su distancia de separación internuclear. La separación en equilibrio es r_0 . Puesto que la curva es asimétrica, la separación promedio, (r_1 , r_2) aumenta al aumentar la temperatura (T_1 , T_2) y la energía vibratoria (E_1 , E_2).

Base microscópica de la dilatación térmica (Opcional)

A nivel microscópico, la dilatación térmica de un sólido sugiere un aumento en la separación promedio entre los átomos del sólido. La curva de la energía potencial de dos átomos adyacentes en un sólido cristalino en función de su separación internuclear es una curva asimétrica como la de la figura 12. Cuando los átomos se acercan entre sí, disminuyendo su separación a partir del valor de equilibrio r_0 , entran en juego fuerzas de repulsión fuertes, y la energía potencial se eleva rápidamente ($F = -dU/dr$); cuando los átomos se alejan entre sí, aumentando su separación a partir del valor de equilibrio, intervienen fuerzas de atracción un poco más débiles y la energía potencial se eleva más lentamente. Para una energía vibratoria dada la separación

de los átomos cambia periódicamente de un valor mínimo a un valor máximo, siendo la separación promedio mayor que la separación de equilibrio a causa de la naturaleza asimétrica de la curva de la energía potencial. Para una energía vibratoria aún más alta la separación promedio es aun mayor. El efecto se acentúa porque, como lo sugiere la figura 12, la energía cinética es más pequeña para separaciones más grandes; entonces las partículas se mueven más lentamente e invierten más tiempo en separaciones más grandes, contribuyendo entonces con una parte mayor al tiempo promedio. Puesto que la energía vibratoria aumenta al elevarse la temperatura, la separación promedio entre los átomos aumenta con la temperatura, y todo el sólido se dilata.

Obsérvese que si la curva de la energía potencial fuese simétrica con respecto a la separación de equilibrio, entonces la separación promedio sería igual a la separación de equilibrio, sin importar cuán grande fuese la amplitud de la vibración. De aquí que la dilatación térmica sea una consecuencia directa de la desviación de la simetría de la curva característica de la energía potencial de los sólidos.

Algunos sólidos cristalinos, en ciertas regiones de temperatura, pueden contraerse al elevarse la temperatura. El análisis anterior es válido si suponemos que existen únicamente modos de vibración compresivos (longitudinales) o que predominan estos modos. Sin embargo, los sólidos pueden vibrar igualmente en modos similares al modo de corte (transversales), y estos modos de vibración permiten que el sólido se contraiga al elevarse la temperatura, disminuyendo la separación promedio de los planos de los átomos. En ciertos tipos de estructura cristalina y en ciertas regiones de temperatura, estos modos de vibración transversales pueden predominar sobre los longitudinales, produciendo un coeficiente neto de dilatación térmica negativo.

Debe hacerse hincapié en que los modelos microscópicos que se presentan aquí, constituyen una gran simplificación de un fenómeno complejo que puede ser tratado con mayor detalle mediante la mecánica estadística y la teoría cuántica. ■

PREGUNTAS

1. ¿Es la temperatura un concepto microscópico o macroscópico?
2. ¿Podemos definir la temperatura como una cantidad derivada, en términos de longitud, masa, y tiempo? Piense en un péndulo, por ejemplo.
3. El cero absoluto es una temperatura mínima. ¿Existe una temperatura máxima?
4. ¿Puede un objeto estar más caliente que otro si ambos están a la misma temperatura? Explique.
5. ¿Existen cantidades físicas, distintas a la temperatura, que tiendan a igualarse cuando se juntan dos sistemas diferentes?
6. Un trozo de hielo y un termómetro más caliente están suspendidos en un recipiente al vacío y aislado, de modo que no entran en contacto. ¿Por qué disminuye la lectura del termómetro durante cierto tiempo?
7. ¿Qué cualidades hacen a una propiedad termométrica en particular apta para usarse en un termómetro práctico?
8. ¿Qué dificultades surgirían si se definiese la temperatura en términos de la densidad del agua?

9. Sea p , la presión en el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante cuando el bulbo está a la temperatura del punto triple de 273.16 K y p la presión cuando el bulbo está a la temperatura ambiente. Se tienen tres termómetros de gas a volumen constante: para A el gas es oxígeno y $p_3 = 20$ cm Hg; para B el gas es también oxígeno pero $p_3 = 40$ cm Hg; para C el gas es hidrógeno y $p_3 = 30$ cm Hg. Los valores de p medidos en los tres termómetros son p_A , p_B , y p_C . (a) Puede obtenerse un valor aproximado de la temperatura ambiente T con cada uno de los termómetros usando

$$T_A = (273.16 \text{ K})(p_A/20 \text{ cm Hg}),$$

$$T_B = (273.16 \text{ K})(p_B/40 \text{ cm Hg}),$$

$$T_C = (273.16 \text{ K})(p_C/30 \text{ cm Hg}).$$

Marque si es cierta o falsa para cada una de las aseveraciones siguientes: (1) Con el método descrito, los tres termómetros darán el mismo valor de T . (2) Los dos termómetros de oxígeno concordarán entre sí pero no con el termómetro de hidrógeno. (3) Cada uno de los tres termó-

- metros dará un valor de T diferente. (b) En caso de que exista un desacuerdo entre los tres termómetros, explique cómo cambiaría usted el método de usarlos para hacer que los tres den el mismo valor de T .
10. El editor en jefe de una revista de negocios bien conocida, al discutir los posibles efectos de calentamiento asociados con el aumento en la concentración de bióxido de carbono en la atmósfera terrestre (efecto de invernadero), escribió: "Las regiones polares podrían llegar a ser tres veces más cálidas que ahora, ..." ¿Qué se supone usted que quería decir, y qué dijo literalmente? (Véase "Warmth and Temperature: A Comedy of Errors", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, noviembre de 1984, pág. 517).
 11. Aunque parece que el cero absoluto de temperatura es imposible de obtener experimentalmente, en el laboratorio se han logrado temperaturas tan bajas como 0.0000002 K. ¿Por qué se esfuerzan los físicos, como realmente lo hacen, para obtener temperaturas aún más bajas? ¿No es ésta lo suficientemente baja para todos los propósitos prácticos?
 12. Usted pone dos ollas de agua sin tapar, una conteniendo agua caliente y la otra conteniendo agua fría, a la intemperie en un clima por debajo del punto de congelación. La olla con el agua caliente comenzará por lo general a congelarse primero. ¿Por qué? ¿Qué sucedería si usted tapase las ollas?
 13. ¿Puede asignarse una temperatura a un vacío?
 14. ¿Tiene implícito nuestro "sentido de la temperatura" un sentido de dirección; es decir, más caliente significa necesariamente una temperatura mayor, o es esto simplemente una convención arbitraria? Por cierto que, Celsius eligió originalmente al punto de vaporización como 0°C y al punto de congelación como 100°C.
 15. En Estados Unidos muchas etiquetas de productos médicos informan al usuario que debe almacenarlos a menos de 86°F. ¿Por qué 86? (Sugerencia: Haga el cambio a Celsius) (Véase *The Science Almanac*, 1985-1986, pág. 430.)
 16. ¿Cómo sugeriría usted medir la temperatura de (a) el Sol, (b) la atmósfera superior de la Tierra, (c) un insecto, (d) la Luna, (e) el fondo del océano, y (f) el helio líquido?
 17. Considerando las escalas Celsius, Fahrenheit, y Kelvin, ¿corresponde alguna a la "escala de la naturaleza"? Explique.
 18. ¿Es un gas mejor que otro para construir un termómetro estándar de gas a volumen constante? ¿Qué propiedades son deseables en un gas para tales objetivos?
 19. Dé algunas objeciones al uso de un termómetro de agua dentro de vidrio. ¿Es una mejora el mercurio en vidrio? De ser así, explique por qué.
 20. Explique por qué la columna de mercurio desciende primero y luego se eleva al calentar con una llama el termómetro de este metal.
 21. ¿Cuáles son las dimensiones de α , el coeficiente de dilatación lineal? ¿Depende el valor de α de la unidad de longitud empleada? Cuando se emplean grados Fahrenheit en lugar de grados Celsius como la unidad de cambio de la temperatura, ¿cambia el valor numérico de α ? De ser así, ¿cómo? Si no es así, pruébelo.
 22. Una bola de metal puede pasar a través de un anillo de metal. Sin embargo, al calentar la bola ésta se pega en el anillo. ¿Qué pasaría si calentásemos el anillo en lugar de la bola?
 23. Como un elemento de control en el termostato común se emplea una laminilla bimetalica, que consta de dos laminillas de diferente metal remachadas entre sí. Explique cómo trabaja.
 24. Dos laminillas, una de hierro y otra de cinc, se remachan entre sí lado con lado para formar una barra recta que se curva al ser calentada. ¿Por qué está el hierro en el interior de la curva?
 25. Explique cómo puede mantenerse constante con la temperatura el periodo de un reloj de péndulo adosando tubos verticales de mercurio a la base del péndulo.
 26. ¿Por qué se hace que una chimenea esté aislada, es decir, que no sea parte del soporte estructural de la casa?
 27. El agua se dilata al congelarse. ¿Podemos definir un coeficiente de dilatación volumétrica para el proceso de congelación?
 28. Explique por qué la dilatación aparente de un líquido en un bulbo de vidrio no da la dilatación verdadera del líquido.
 29. ¿Depende el cambio de volumen de un objeto al aumentar su temperatura de si el objeto tiene cavidades en su interior, quedando en éste todas las demás características igual?
 30. ¿Por qué es mucho más difícil hacer una determinación precisa del coeficiente de dilatación de un líquido que de un sólido?
 31. El modelo común de un sólido supone que los átomos son puntos que ejecutan un movimiento armónico simple en torno a posiciones medias de la red. ¿Cuál sería el coeficiente de dilatación lineal de esta red?
 32. Explique el hecho de que la temperatura del océano a grandes profundidades sea casi constante durante todo el año, a una temperatura de unos 4°C.
 33. Explique por qué los lagos se congelan primero en la superficie.
 34. ¿Qué causa que las tuberías de agua exploten en el invierno?
 35. ¿Qué puede usted concluir respecto a cómo depende el punto de fusión del hielo de la presión partiendo del hecho de que el hielo flota en el agua?

PROBLEMAS

Sección 22-3 Medición de la temperatura

1. Un *termómetro de resistencia* es un termómetro en el que la resistencia eléctrica cambia con la temperatura. Esta-

mos en libertad de definir temperaturas medidas por uno de estos termómetros en kelvin (K) que sean directamente

proporcionales a la resistencia R , medida en ohms (Ω). Se halla que cierto termómetro de resistencia tiene una resistencia R de 90.35Ω cuando su bulbo se sumerge en agua a la temperatura del punto triple (273.16 K). ¿Qué temperatura indica el termómetro si el bulbo está situado en un entorno tal que su resistencia es de 96.28Ω ?

- Se forma un termopar a partir de dos metales diferentes unidos en dos puntos de modo tal que se produzca un pequeño voltaje cuando las dos uniones están a temperaturas diferentes. En un termopar de hierro-constantano, con una unión mantenida a 0°C , el voltaje de salida varía linealmente desde 0 hasta 28.0 mV al elevar la temperatura de la otra unión desde 0 hasta 510°C . Halle la temperatura de la unión variable cuando la salida del termopar sea de 10.2 mV .
- La amplificación o ganancia de un amplificador de transistores puede depender de la temperatura. La ganancia para cierto amplificador a la temperatura ambiente (20.0°C) es de 30.0 , mientras que a 55.0°C es de 35.2 . ¿Cuál sería la ganancia a 28.0°C si la ganancia depende linealmente de la temperatura dentro de este limitado intervalo?
- El cero absoluto es -273.15°C . Halle el cero absoluto en la escala Fahrenheit.
- Si su médico le dice que su temperatura es de 310 kelvin sobre el cero absoluto, ¿se preocuparía? Explique su respuesta.
- (a) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 6000 K . Expresé ésta en la escala Fahrenheit. (b) Expresé la temperatura normal del cuerpo humano, 98.6°F , en la escala Celsius. (c) En la región continental de Estados Unidos, la temperatura más baja registrada oficialmente es de -70°F en Rogers Pass, Montana. Expresé ésta en la escala Celsius. (d) Expresé el punto de ebullición normal del oxígeno, -183°C , en la escala Fahrenheit. (e) ¿Qué temperatura Celsius cree usted que tiene una habitación si el calor en ella resulta insoportable?
- ¿A qué temperatura darían los siguientes pares de escalas la misma lectura: (a) Fahrenheit y Celsius, (b) Fahrenheit y Kelvin, y (c) Celsius y Kelvin?
- ¿A qué temperatura es la lectura en la escala Fahrenheit igual (a) al doble de la Celsius y (b) a la mitad de la Celsius?
- A diario podemos comprobar que los objetos calientes y fríos se enfrían o se calientan respecto a la temperatura de su entorno. Si la diferencia de temperatura ΔT entre un objeto y su entorno ($\Delta T = T_{\text{obj}} - T_{\text{ent}}$) no es demasiado grande, la razón de enfriamiento o de calentamiento del objeto es proporcional, aproximadamente, a esta diferencia de temperatura; es decir,

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

donde A es una constante. El signo menos se debe a que ΔT disminuye con el tiempo si ΔT es positiva, y aumenta si ΔT es negativa. Esto se conoce como la ley de Newton para el enfriamiento. (a) ¿De qué factores depende A ? ¿Cuáles son sus dimensiones? (b) Si en algún instante $t = 0$

la diferencia de temperatura es ΔT_0 , demuestre que esa diferencia es

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

en un tiempo t más tarde.

- Por la mañana temprano se descomponen el calentador de una casa. La temperatura exterior es de -7.0°C . Como resultado, la temperatura en el interior desciende de 22 a 18°C en 45 min . ¿Cuánto tiempo más tomará para que la temperatura interior descienda otros 4.0°C ? Suponga que la temperatura exterior no cambia y que se aplica la ley de enfriamiento de Newton; vea el problema anterior.

Sección 22-4 La escala de temperatura de un gas ideal

- Si la temperatura del gas en el punto de vapor es de 373.15 K , ¿cuál será el valor limitante de la relación de las presiones de un gas en el punto de vaporización y del agua en el punto triple cuando el gas se mantiene a volumen constante?
- Un termómetro de gas se construye de dos bulbos que contienen gas, cada uno de los cuales se pone en un baño de agua, como se muestra en la figura 13. La diferencia de presión entre los dos bulbos se mide por medio de un manómetro de mercurio ilustrado en la figura. Depósitos apropiados, no mostrados en el diagrama, mantienen constante el volumen de gas en ambos bulbos. No hay diferencia en la presión cuando ambos baños se encuentran en el punto triple del agua. La diferencia de presión es de 120 mm Hg cuando un baño está en el punto triple y el otro en el punto de ebullición del agua. Por último, la diferencia de presión es de 90.0 mm Hg cuando un baño se encuentra en el punto triple y el otro tiene una temperatura desconocida. Halle la temperatura desconocida.

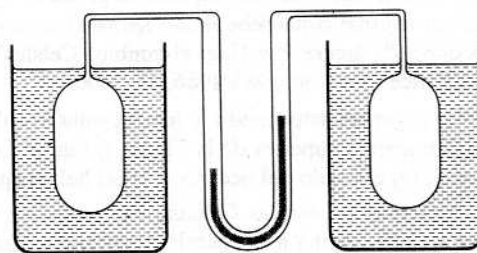


Figura 13 Problema 12.

- Se ensamblan dos termómetros de gas a volumen constante; uno utiliza nitrógeno como gas de trabajo y el otro utiliza helio. Ambos contienen el gas suficiente para que $p_w = 100 \text{ cm Hg}$. ¿Cuál es la diferencia entre las presiones de los dos termómetros si ambos están sumergidos en un baño de agua al punto de ebullición? ¿Cuál de las dos presiones es más alta? Véase la figura 5.

Sección 22-5 Dilatación térmica

- El asta de aluminio de una bandera tiene 33 m de altura. ¿En cuánto aumenta su longitud cuando la temperatura aumenta en 15 C° ?

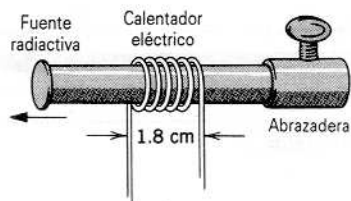


Figura 14 Problema 22.

15. El espejo de vidrio Pyrex del telescopio del observatorio de Monte Palomar (el telescopio Hale) tiene un diámetro de 200 in. Las temperaturas más extremas registradas en el Monte Palomar son de -10°C y 50°C . Determine el cambio máximo del diámetro del espejo.
16. Un orificio circular practicado en una placa de aluminio tiene 2.725 cm de diámetro a 12°C . ¿Cuál es el diámetro cuando la temperatura de la placa se eleva a 140°C ?
17. Se colocan unas vías de acero para el ferrocarril cuando la temperatura es de -5.0°C . Una sección estándar de riel tiene entonces 12.0 m de longitud. ¿Qué claro deberá dejarse entre secciones de riel de modo que no exista una compresión cuando la temperatura suba hasta los 42°C ?
18. Una ventana de vidrio tiene 200 cm por 300 cm a 10°C . ¿En cuánto ha aumentado su área cuando su temperatura es de 40°C ? Suponga que el vidrio puede dilatarse libremente.
19. Un cubo de latón tiene una longitud de 33.2 cm de lado a 20.0°C . Halle (a) el aumento en el área superficial y (b) el aumento en el volumen cuando se calienta a 75.0°C .
20. ¿Cuál es el volumen de una bola de plomo a -12°C si su volumen a 160°C es de 530 cm^3 ?
21. Demuestre que cuando la temperatura de un líquido en un barómetro cambia en ΔT , y la presión es constante, la altura h cambia en $\Delta h = \beta h \Delta T$, donde β es el coeficiente de dilatación volumétrica del líquido. Desprecie la dilatación del tubo de vidrio.
22. En cierto experimento fue necesario estar en posibilidad de mover una fuente radiactiva pequeña a velocidades selectas extremadamente bajas. Esto se realizó asegurando la fuente a un extremo de una barra de aluminio y calentando la sección central de la barra de una manera controlada. Si la sección calentada efectiva de la barra de la figura 14 es de 1.8 cm, ¿a qué razón constante debe hacerse cambiar la temperatura de la barra si la fuente ha de moverse a una velocidad constante de 96 nm/s?
23. Demuestre que si α depende de la temperatura T , entonces

$$L \cong L_0 \left[1 + \int_{T_0}^T \alpha(T) dT \right],$$

donde L_0 es la longitud a la temperatura de referencia T_0 .

24. Poco después de que se formara la Tierra, el calor liberado por la desintegración de elementos radiactivos elevó la temperatura interna promedio de 300 a 3000 K, a cuyo valor permanece hoy día aproximadamente. Suponiendo un coeficiente de dilatación volumétrica promedio de $3.2 \times 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, ¿en cuánto ha aumentado el radio de la Tierra desde su formación?

25. Se mide una barra en 20.05 cm de longitud usando una regla de acero a la temperatura ambiente de 20°C . Tanto la barra como la regla se introducen en un horno a 270°C , en donde la barra mide ahora 20.11 cm usando la misma regla. Calcule el coeficiente de dilatación térmica del material del cual está hecha la barra.
26. Considérese un termómetro de mercurio en vidrio. Supóngase que la sección transversal A del capilar es constante, y que V es el volumen del bulbo de mercurio a 0.00°C . Suponga que el mercurio llena apenas el bulbo a 0.00°C . Demuestre que la longitud L de la columna del mercurio en el capilar a una temperatura T , en $^{\circ}\text{C}$, es

$$L = \frac{V}{A} (\beta - 3\alpha) T,$$

es decir, proporcional a la temperatura, siendo β el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio y α el coeficiente de dilatación lineal del vidrio.

27. (a) Demuestre que si las longitudes de dos barras de sólidos diferentes son inversamente proporcionales a sus respectivos coeficientes de dilatación lineal a la misma temperatura inicial, la diferencia de longitud entre ellas será constante a todas las temperaturas. (b) ¿Cuál sería la longitud de una barra de acero y de una barra de latón a 0°C , de modo que a todas las temperaturas su diferencia de longitud sea 0.30 m?
28. Como resultado de un aumento de temperatura de 32°C , una barra con una grieta en su centro se patea hacia arriba, como se muestra en la figura 15. Si la distancia fija $L_0 = 3.77\text{ m}$ y el coeficiente de dilatación lineal es de $25 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, halle x , la distancia a la cual se eleva el centro.

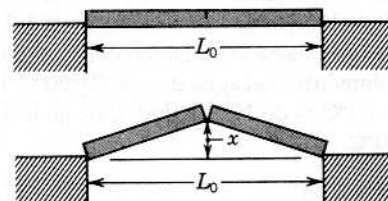


Figura 15 Problema 28.

29. Una barra de acero tiene 3.000 cm de diámetro a 25°C . Un anillo de latón tiene un diámetro interior de 2.992 cm a 25°C . ¿A qué temperatura común se deslizará justamente el anillo en la barra?
30. El área A de una placa rectangular es ab . Su coeficiente de dilatación lineal es α . Después de un aumento de temperatura ΔT , el lado a es más largo en Δa y el lado b es más largo en Δb . Demuestre que si despreciamos la pequeña cantidad $\Delta a \Delta b / ab$ (véase la Fig. 16), entonces $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$, lo que coincide con la ecuación 14.
31. Demuestre que, si despreciamos cantidades extremadamente pequeñas, el cambio de volumen de un sólido en dilatación a través de un aumento de temperatura ΔT está dado por $\Delta V = 3\alpha V \Delta T$, donde α es el coeficiente de dilatación lineal. Véase la ecuación 15.

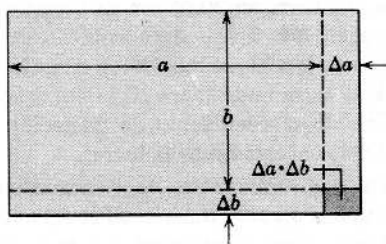


Figura 16 Problema 30.

32. Cuando la temperatura de una moneda de cobre (que no es cobre puro) de un centavo se eleva en 100°C , su diámetro aumenta en 0.18% . Halle el porcentaje de aumento en (a) el área de una cara, (b) el espesor, (c) el volumen, y (d) la masa del centavo. (e) Calcule su coeficiente de dilatación lineal.
33. La densidad es la masa dividida por el volumen. Si el volumen V depende de la temperatura, entonces también su densidad ρ . Demuestre que el cambio de densidad $\Delta\rho$ con el cambio de temperatura ΔT está dado por

$$\Delta\rho = -\beta\rho \Delta T,$$

donde β es el coeficiente de dilatación volumétrica. Explique el signo menos.

34. Cuando la temperatura de un cilindro de metal se eleva de 60 a 100°C , su longitud aumenta en 0.092% . (a) Halle el cambio porcentual en la densidad. (b) Identifique el metal.
35. A 100°C un frasco de vidrio está completamente lleno de 891 g de mercurio. ¿Qué masa de mercurio se necesita para llenar el frasco a -35°C ? (El coeficiente de dilatación lineal del vidrio es de $9.0 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$; el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de $1.8 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$).
36. La figura 17 muestra la variación del coeficiente de dilatación volumétrica del agua entre 4°C y 20°C . La densidad del agua a 4°C es de 1000 kg/m^3 . Calcule la densidad del agua a 20°C .

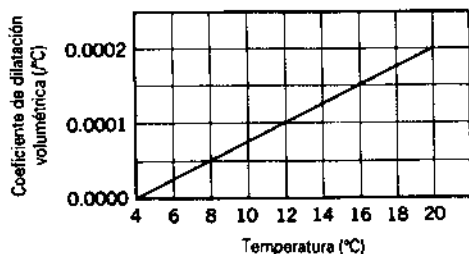


Figura 17 Problema 36.

37. Una barra compuesta de longitud $L = L_1 + L_2$ está hecha de una barra de material 1 y longitud L_1 unida a una barra de material 2 y longitud L_2 , como se muestra en la figura 18. (a) Demuestre que el coeficiente efectivo de dilatación lineal α de esta barra está dado por $\alpha = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)/L$. (b) Si se utilizara acero y latón, diseñe dicha barra compuesta cuya longitud sea de 52.4 cm y cuyo coeficiente efectivo de dilatación lineal sea de $13 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$.

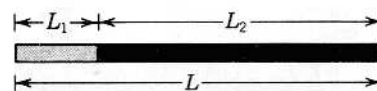


Figura 18 Problema 37.

38. (a) Demuestre que el cambio en inercia rotatoria I con la temperatura de un objeto sólido está dado por $\Delta I = 2\alpha I \Delta T$. (b) Una barra uniforme de latón, que gira libremente a 230 rev/s en torno a un eje perpendicular a ella en su centro, se calienta sin contacto mecánico hasta que su temperatura aumenta en 170°C . Calcule el cambio en la velocidad angular.
39. Un cilindro situado en chumaceras sin fricción se hace girar en torno a su eje y luego se calienta, sin contacto mecánico, hasta que su radio aumenta en 0.18% . ¿Cuál es el cambio porcentual en (a) el ímpetu angular, (b) la velocidad angular, y (c) la energía rotatoria del cilindro?
40. (a) Demuestre que el cambio con la temperatura en el periodo P de un péndulo físico está dado por $\Delta P = \frac{1}{2}\alpha P \Delta T$. (b) Un péndulo de reloj hecho de invar tiene un periodo de 0.500 s y es exacto a 20°C . Si el reloj se emplea en un clima en que la temperatura promedie 30°C , ¿qué corrección aproximada al tiempo indicado por el reloj es necesaria al cabo de 30 días?
41. Un reloj de péndulo con un péndulo hecho de latón está diseñado para mantener un tiempo preciso a 20°C . ¿De cuánto será el error, en segundos por hora, si el reloj opera a 0°C ?
42. Un vaso de aluminio de 110 cm^3 de capacidad se llena de glicerina a 22°C . ¿Cuánta glicerina, se derramará del vaso si la temperatura del vaso y de la glicerina se eleva a 28°C ? (El coeficiente de dilatación volumétrica de la glicerina es de $5.1 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$).
43. Un tubo vertical de vidrio de 1.28 m de longitud está medio lleno de un líquido a 20.0°C . ¿Cuál será el cambio de altura del líquido cuando el tubo se caliente a 33.0°C ? Suponga que $\alpha_{\text{vid}} = 1.1 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ y $\beta_{\text{liq}} = 4.2 \times 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$.
44. Una barra de acero a 24°C se atornilla fuertemente en ambos extremos y luego se enfría. ¿A qué temperatura empezará a ceder? Véase la tabla 1, capítulo 14.
45. Tres barras rectas de igual longitud, de aluminio, invar y acero, todas a 20°C , forman un triángulo equilátero con pivotes en los vértices. ¿A qué temperatura tendrá 59.95° el ángulo opuesto a la barra de invar? Véase el apéndice H para las fórmulas trigonométricas necesarias.
46. Dos barras de materiales diferentes, pero de las mismas longitudes L y las mismas áreas A en sus secciones transversales están dispuestas extremo con extremo entre soportes rígidos y fijos como se muestra en la figura 19a. La temperatura es T y no existe un esfuerzo inicial. Las barras se calientan, de modo que su temperatura aumenta en ΔT . (a) Demuestre que la superficie de contacto de las barras se desplaza al calentarlas en una cantidad dada por

$$\Delta L = \left(\frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} \right) L \Delta T,$$

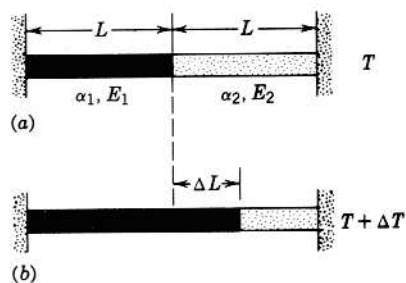


Figura 19 Problema 46.

donde α_1, α_2 son los coeficientes de dilatación lineal y E_1, E_2 son los módulos de Young de los materiales. Desprecie los cambios en las áreas de la sección transversal; véase la figura 19b. (b) Halle el esfuerzo de contacto después del calentamiento.

47. Un cubo de aluminio de 20 cm de lado flota en mercurio. ¿Qué tanto más se hundirá el bloque cuando la temperatura se eleve de 270 a 320 K? (El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de $1.8 \times 10^{-4}/C^\circ$).
48. Un tubo de vidrio casi lleno de mercurio está unido en serie a la base de un péndulo de hierro de 100 cm de longitud en forma de barra. ¿A qué altura estará el mercurio en el tubo de vidrio de modo que el centro de masa de este péndulo no se eleve ni baje con los cambios de temperatura? (El área de la sección transversal del tubo es igual a la de la barra de hierro. Desprecie la masa del vidrio. El hierro tiene una densidad de $7.87 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y un coeficiente de dilatación lineal igual a $12 \times 10^{-6}/C^\circ$. El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de $18 \times 10^{-5}/C^\circ$).
49. La distancia entre las torres del claro principal del puente Golden Gate cerca de San Francisco es de 4200 ft



Figura 20 Problema 49.

(Fig. 20). La flecha del cable a la mitad entre las torres a $50^\circ F$ es de 470 ft. Considere $\alpha = 6.5 \times 10^{-5}/F^\circ$ para el cable y calcule (a) el cambio de longitud del cable y (b) el cambio en la flecha para un cambio de temperatura desde 10 hasta $90^\circ F$. Suponga que no hay flexión ni separación de las torres y una forma parabólica para el cable.

CAPÍTULO 23

LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL

Las leyes básicas de la termodinámica tratan de las relaciones entre las propiedades macroscópicas, tales como la presión, la temperatura, el volumen, y la energía interna de un gas ideal. Las leyes no dicen nada acerca del hecho de que la materia esté formada de partículas (átomos o moléculas). Debido al gran número de partículas implicadas, no es práctico aplicar las leyes de la mecánica para hallar el movimiento de cada partícula en un gas. En cambio, usamos técnicas de promedios para expresar las propiedades termodinámicas como promedios de las propiedades moleculares. Si el número de partículas es muy grande, tales promedios dan cantidades rigurosamente definidas.

En este capítulo consideramos un enfoque de promedios llamado teoría cinética, en el que seguimos el movimiento de las partículas representativas de un gas y luego promediamos este comportamiento para todas las partículas. La teoría cinética fue desarrollada entre los siglos xvii y xix por Boyle, D. Bernoulli, Joule, Kronig, Clausius, y Maxwell, entre otros. Otro enfoque también de los promedios es la mecánica estadística, en la cual se aplican las leyes de la probabilidad a distribuciones estadísticas de las propiedades moleculares. Este enfoque se estudiará en el capítulo 24.

23-1 PROPIEDADES MACROSCÓPICAS DE UN GAS Y LA LEY DEL GAS IDEAL

La figura 1 muestra un gas confinado en un cilindro equipado con un émbolo móvil. Deseamos llevar a cabo una serie de mediciones de las propiedades *macroscópicas* de un gas: el tipo y cantidad de gas y su presión, volumen, y temperatura absolutas (Kelvin). Suponemos que tenemos conectados al cilindro dispositivos apropiados para medir estas propiedades. Suponemos también que tenemos a nuestra disposición los medios para cambiar cualquiera de estas propiedades. Por ejemplo, suponemos que el gas está en contacto con un dispositivo idealizado llamado *depósito térmico*, el cual podemos considerar como un cuerpo mantenido a una temperatura T , de modo que la temperatura del depósito no cambia cuando nuestro cilindro de gas entra en equilibrio térmico con él. Suponemos que podemos cambiar fácilmente la temperatura del depósito, cambiando por lo tanto la temperatura del gas. Si deseamos cambiar la presión p , añadimos o quitamos peso sobre el émbolo. (Se supone que

en el espacio sobre el émbolo se ha practicado un vacío, de modo que no existe la presión del aire que empuje *hacia abajo* sobre el émbolo). El volumen V puede ser alterado simplemente cambiando la posición del émbolo, y la cantidad de gas puede cambiarse al permitir que entre gas a la cámara, cambiando por lo tanto el número de moléculas N . Después de cada cambio, esperamos el tiempo suficiente para que el gas alcance el equilibrio térmico y adquiera un nuevo conjunto de variables termodinámicas macroscópicas.

Llevemos a cabo los siguientes experimentos con el gas.

1. *V depende de N .* Manteniendo constantes la temperatura y la presión (esto es, el gas está en contacto con el depósito térmico a determinada temperatura T , y el peso sobre el émbolo es constante), permitimos que entre o salga gas de la cámara, y medimos el volumen resultante V observando la altura del émbolo. (Suponemos que conocemos la masa de cada molécula y la masa total de gas que está presente en el cilindro. Entonces podemos determinar N , el número total de moléculas.) La figura 2 muestra los resultados típicos de tales experimentos. Los puntos de los datos parecen seguir una línea recta, y

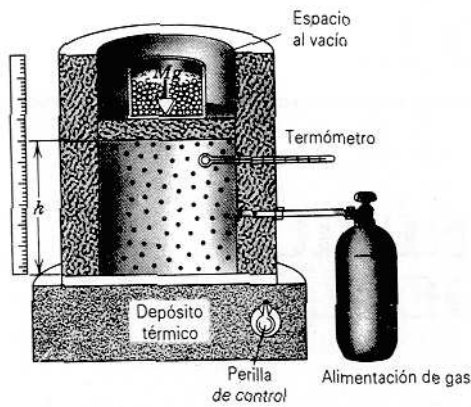


Figura 1 El gas está confinado en un cilindro que tiene contacto con un depósito térmico a la temperatura (ajustable) T . El émbolo ejerce una fuerza total hacia abajo Mg sobre el gas, la cual, en el equilibrio, está balanceada por la fuerza hacia arriba debida a la presión del gas. El volumen del gas puede ser determinado midiendo la altura h del émbolo desde el fondo del cilindro, y la temperatura del gas se mide con un termómetro apropiado. Una alimentación de gas permite añadir gas adicional al cilindro; suponemos que está también provisto de un mecanismo para remover gas y para cambiar la alimentación con el fin de admitir diferentes clases de gas.

concluimos, con una aproximación suficientemente buena, que existe una proporción directa entre V y N ; es decir, el volumen aumenta linealmente con el número de partículas. Además, al reemplazar el gas en el cilindro con un número igual de moléculas de un gas diferente a la misma presión y temperatura, hallamos que el nuevo gas ocupa el mismo volumen. Así, deberíamos concluir que el volumen ocupado por un gas a determinadas presión y temperatura es independiente del tipo de gas o del tamaño o masa de sus moléculas; el volumen depende únicamente del número de moléculas. Matemáticamente, $V \propto N$, o sea

$$V = CN \quad (p, T \text{ constantes}). \quad (1)$$

Aquí C es una constante, igual a la pendiente de la línea en la figura 2 y determinada por los valores de p y de T . Si repetimos este experimento con diferentes valores constantes de p y de T , hallaríamos siempre que la ecuación 1 se cumple, pero con un valor diferente de la constante C .

La ecuación 1 se conoce a veces como la ley de Avogadro. Es válida con una muy buena aproximación para todos los gases, especialmente a baja densidad, donde las moléculas están muy separadas entre sí y el volumen ocupado por las moléculas mismas es realmente una fracción despreciablemente pequeña del volumen del recipiente en que está confinado el gas. Podemos generalizar, a partir del comportamiento de estos gases reales a un gas ideal que sigue la ecuación 1 exactamente. En la sección

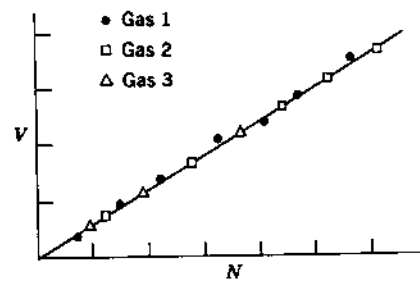


Figura 2 El volumen V ocupado por el gas en la figura 1 depende del número de moléculas N . A una temperatura y presión dadas, gases diferentes siguen la misma relación lineal.

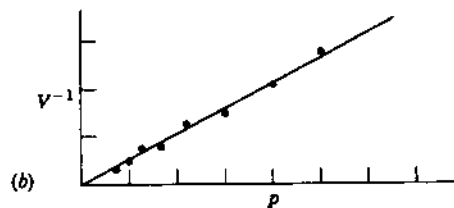
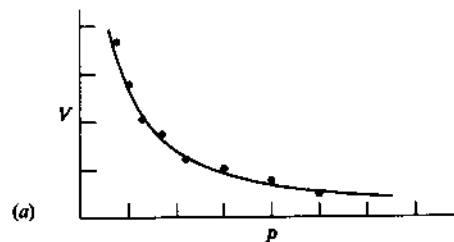


Figura 3 (a) El volumen V ocupado por el gas parece depender inversamente de la presión p , mantenidas constantes la temperatura y el número de partículas. (b) Al trazar V^{-1} contra p se ve que la relación es realmente una relación lineal inversa.

siguiente consideraremos las propiedades microscópicas de un gas ideal.

2. V depende de p . Manteniendo constantes el número de partículas N y la temperatura T , cambiamos la presión (cambiando el peso sobre el émbolo) y medimos el volumen resultante. En la figura 3a se muestra el resultado, el cual sugiere una relación inversa: al aumentar la presión p , el volumen V disminuye. Para comprobar esto, trazamos a p contra V^{-1} , como en la figura 3b, lo cual confirma una relación lineal. Por lo tanto, concluimos que $p \propto V^{-1}$, o sea

$$p = \frac{C'}{V} \quad (N, T \text{ constantes}). \quad (2)$$

Aquí C' representa a otra constante, la cual tendría un valor diferente si hubiéramos elegido valores diferentes

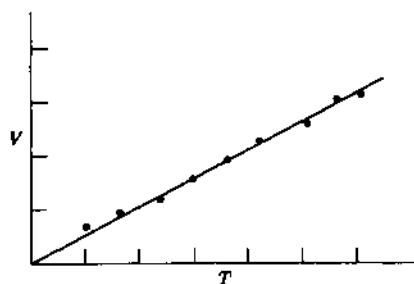


Figura 4 El volumen V ocupado por el gas varía linealmente con la temperatura T , cuando se mantienen constantes la presión y el número de moléculas.

de N y de T . La ecuación 2 se llama *ley de Boyle* y, al igual que la ecuación 1, es una generalización ideal. Como veremos en la sección 23-8, los gases reales se desvían un poco de este comportamiento ideal.

3. V depende de T . Manteniendo constantes a p y a N , variamos la temperatura T (cambiando la temperatura del depósito térmico), y medimos el volumen resultante V . Hallamos (Fig. 4) una relación directa: el volumen aumenta al aumentar la temperatura; entonces $V \propto T$, o sea

$$V = C''T \quad (p, N \text{ constantes}), \quad (3)$$

donde C'' es también otra constante. La ecuación 3 se llama *ley de Charles* o *ley de Gay-Lussac*. Al igual que las ecuaciones 1 y 2, es una idealización del comportamiento de los gases reales.

Ecuación de estado

Las ecuaciones 1, 2 y 3 resumen resultados experimentales estrictamente válidos únicamente para nuestro gas ideal hipotético, pero aproximadamente válidas en un alto grado para la mayoría de los gases reales. Podemos combinar las tres ecuaciones en una sola que incluya a las tres relaciones observadas, como sigue:

$$\frac{pV}{NT} = k, \quad (4)$$

en donde k es una constante. Reescribiendo la ecuación 4 podemos demostrar que es consistente con las ecuaciones 1 a 3:

$$V = \left(\frac{kT}{p}\right)N = CN \quad (p, T \text{ constantes}), \quad (5a)$$

$$p = \frac{(kNT)}{V} = \frac{C'}{V} \quad (N, T \text{ constantes}), \quad (5b)$$

$$V = \left(\frac{kN}{p}\right)T = C''T \quad (p, N \text{ constantes}), \quad (5c)$$

La constante k de la ecuación 4 se llama *constante de Boltzmann*. Es una constante universal con un valor determinado experimentalmente, el cual es

$$k = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

Es más común escribir la ecuación 4 en una forma algo diferente. Expresemos la cantidad de gas no en términos del número de moléculas N sino en términos del *número de moles* n . El mol fue definido en la sección 1-5. En términos de la constante de Avogadro N_A , el número de moles es

$$n = \frac{N}{N_A}, \quad (6)$$

y podemos reescribir la ecuación 4 como:

$$\frac{pV}{nT} = kN_A,$$

o bien

$$pV = nRT, \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} R &= N_A k \\ &= 8.3145 \text{ J/mol} \cdot \text{K.} \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación 7 se llama *ley de los gases ideales* o *ecuación de estado del gas ideal*. Una ecuación de estado de un sistema da una relación matemática fundamental entre las cantidades termodinámicas macroscópicas. Los experimentos revelan que, a densidades suficientemente bajas, todos los gases reales tienden al comportamiento del gas ideal descrita en la ecuación 7. Éste es el mismo límite que discutimos en conexión con la escala de temperatura del gas ideal en la sección 22-4. La constante R tiene el mismo valor para todos los gases y se le llama *constante universal de los gases*.

Problema muestra 1 Un cilindro aislado equipado con un émbolo (Fig. 1) contiene oxígeno a una temperatura de 20°C y una presión de 15 atm en un volumen de 22 litros. Al descender el émbolo, disminuye el volumen del gas a 16 litros, y simultáneamente la temperatura se eleva a 25°C . Suponiendo que el oxígeno se comporte como un gas ideal bajo estas condiciones, ¿cuál es la presión final del gas?

Solución Partimos de la ecuación 7, puesto que la cantidad de gas permanece sin cambio, y tenemos que

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f},$$

o bien

$$p_f = p_i \left(\frac{T_f}{T_i}\right) \left(\frac{V_i}{V_f}\right).$$

Puesto que esto está en la forma de una razón, no necesitamos convertir a p y a V en unidades del SI, pero *debemos*

expresar a T en unidades de temperatura absoluta (Kelvin). Entonces,

$$p_f = (15 \text{ atm}) \left(\frac{273 + 25 \text{ K}}{273 + 20 \text{ K}} \right) \left(\frac{22 \text{ L}}{16 \text{ L}} \right) = 21 \text{ atm.}$$

23-2 EL GAS IDEAL: UN MODELO

Cuando los físicos desean entender un sistema complejo, a menudo inventan un *modelo*. Un modelo es una versión simplificada del sistema que permite hacer cálculos pero sin perder su realidad física. Un modelo puede empezar con un grupo de hipótesis que simplifican y permiten que el sistema sea analizado usando un conjunto de leyes existente, por ejemplo, las de la mecánica de Newton. El análisis puede conducir entonces a una ecuación o conjunto de ecuaciones que describen al sistema físico original. Puesto que el modelo es una simplificación de la naturaleza, el resultado final no es, por lo general, una descripción verdadera o completa de la naturaleza, pero si hemos sido lo suficientemente cautos en la formulación del modelo, el resultado final puede ser una aproximación muy buena del comportamiento del sistema. Lo que es más importante, el resultado final puede proporcionarnos un camino para estudiar al sistema en el laboratorio y obtener una visión aún más penetrante. Previamente en este texto, hemos usado un modelo (sin llamarlo así) para describir el movimiento de un objeto complejo como si fuera una partícula puntual sometida a ciertas circunstancias. A veces hemos modelado también la fuerza entre los átomos de una molécula, o entre los átomos de un sólido, en términos de la fuerza de un resorte, $F = -kr$, la cual se basa en sí misma en un tipo de modelo que simplifica (en ciertas condiciones elásticas) los complicados procesos internos en un sólido sujeto a un esfuerzo.

Un gas confinado en un recipiente es un ejemplo de un sistema complejo difícil de analizar usando las leyes de Newton. Las moléculas pueden chocar inelásticamente, y la energía de la colisión puede ser absorbida por las moléculas como energía interna en una variedad de modos. Seguir la pista de estos procesos para todas las moléculas sería un proyecto de una complejidad imposible de vencer. Simplificamos este problema inventando un modelo que describa las propiedades microscópicas del gas real. Este modelo, al cual llamamos *modelo del gas ideal*, resulta ser enteramente consistente con el concepto de gas ideal que hemos desarrollado experimentalmente en la sección 23-1. En esa sección vimos que, especialmente a baja densidad, las propiedades macroscópicas de los gases reales siguen de manera aproximada un resultado general, la ley del gas ideal de la ecuación 7.

Desde el punto de vista microscópico nuestro modelo de gas ideal incluye las hipótesis siguientes. Basados en

ellas, empleamos las leyes de Newton para analizar la mecánica del gas ideal; este procedimiento constituye la base de la *teoría cinética*. Más adelante relacionaremos esta descripción microscópica con la macroscópica.

1. *Un gas consta de ciertas partículas, llamadas moléculas.* Dependiendo del gas, cada molécula puede consistir en un átomo o en un grupo de átomos. Si el gas es un elemento o un compuesto y está en estado estable, consideramos que todas sus moléculas son idénticas.

2. *Las moléculas tienen movimientos al azar y obedecen a las leyes del movimiento de Newton.* Las moléculas se mueven en todas direcciones y con una gama de velocidades. Al describir el movimiento suponemos que la mecánica de Newton es válida al nivel microscópico.

3. *El número total de moléculas es grande.* La velocidad (en magnitud y dirección) de cualquier molécula puede cambiar en forma repentina por medio de una colisión con la pared o con otra molécula. Cualquier molécula en particular sigue una trayectoria en zigzag debido a estas colisiones. Sin embargo, ya que existen tantas moléculas suponemos que el gran número de colisiones resultantes mantiene la distribución del conjunto de las velocidades moleculares y el carácter fortuito o aleatorio del movimiento.

4. *El volumen de las moléculas es una fracción despreciablemente pequeña del volumen ocupado por el gas.* Si bien existen muchas moléculas, éstas son extremadamente pequeñas. Sabemos que el volumen ocupado por un gas puede cambiarse a través de una gama amplia de valores con poca dificultad, y que cuando un gas se condensa el volumen ocupado por el líquido puede ser miles de veces más pequeño que el del gas. De aquí que nuestra hipótesis sea plausible. Más adelante investigaremos el tamaño real de las moléculas y veremos si necesitamos modificar esta hipótesis.

5. *Ninguna fuerza apreciable actúa sobre las moléculas excepto durante una colisión.* Es decir, suponemos que el alcance de las fuerzas moleculares es comparable al tamaño molecular y mucho más pequeña que la distancia típica entre moléculas. En la medida en que esto sea así, una molécula se mueve con velocidad constante entre colisiones. Por lo tanto, el movimiento de una molécula en particular es una trayectoria en zigzag que consiste, en su mayor parte, en segmentos con velocidad constante cambiada por fuerzas impulsivas.

6. *Las colisiones son elásticas y de una duración despreciable.* Las colisiones de una molécula con otra o con las paredes del recipiente conservan el ímpetu y (suponemos) la energía cinética. Las moléculas no son partículas puntuales verdaderas y poseen una estructura interna; así, cierta energía cinética puede convertirse en energía interna durante la colisión. Suponemos que la molécula no

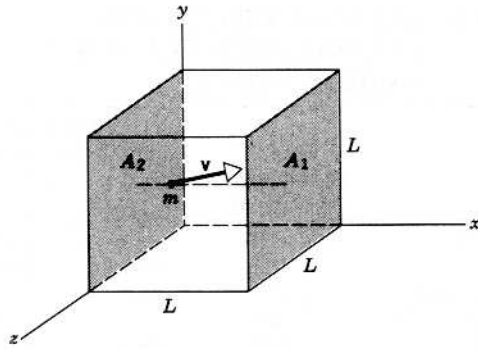


Figura 5 Caja cúbica de lado L que contiene un gas ideal. Se muestra una molécula del gas moviéndose con velocidad v hacia el lado A_1 .

retiene esta energía interna, la cual está entonces nuevamente disponible como energía cinética después de un tiempo tan breve (el tiempo entre colisiones) que podemos despreciar este cambio por entero.

23-3 CÁLCULO CINÉTICO DE LA PRESIÓN

Calculemos ahora la presión de un gas ideal a partir de la teoría cinética. Por simplificación, consideremos un gas en un recipiente cúbico de lado L cuyas paredes sean perfectamente elásticas. Llamemos a las caras normales al eje x (Fig. 5) A_1 y A_2 , cada una de área L^2 . Consideremos a una molécula de masa m con velocidad v , la cual resolvemos en sus componentes v_x , v_y , y v_z . Cuando esta partícula choca con A_1 , rebota con su componente x de la velocidad invertida; es decir, $v_x \rightarrow -v_x$. No existe un efecto sobre v_y o sobre v_z , de modo que el cambio en el ímpetu de la partícula tiene únicamente una componente x , dada por

$$\text{ímpetu final} - \text{ímpetu inicial} = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x. \quad (9)$$

Ya que el ímpetu total se conserva en la colisión, el ímpetu impartido a A_1 es $+2mv_x$.

Supongamos que esta partícula llegue a A_2 sin golpear a ninguna otra partícula en su camino. El tiempo requerido para cruzar el cubo es L/v_x . (Si la molécula golpea una de las otras caras de la caja en su camino hacia A_2 , la componente x de su velocidad no cambia, como tampoco el tiempo de tránsito). En A_2 nuevamente tiene su componente x de la velocidad invertida y regresa a A_1 . Suponiendo que no existan colisiones con otras moléculas, el viaje redondo toma un tiempo $2L/v_x$, que es el tiempo entre las colisiones con A_1 . La fuerza impulsiva promedio ejercida

por esta molécula sobre A_1 es el ímpetu transferido dividido entre el intervalo de tiempo entre transferencias, o sea

$$F_x = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}. \quad (10)$$

Para obtener la fuerza total sobre A_1 , es decir, la razón a la cual se imparte ímpetu a A_1 por todas las moléculas del gas, debemos sumar la cantidad mv_x^2/L para todas las partículas. Entonces, para hallar la presión dividimos esta fuerza entre el área de A_1 , es decir L^2 . La presión es, por lo tanto,

$$p = \frac{1}{L^2} \frac{mv_{x1}^2 + mv_{x2}^2 + \dots}{L} = \frac{m}{L^3} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots), \quad (11)$$

donde v_{x1} es la componente x de la velocidad de la partícula 1, v_{x2} es la de la partícula 2, y así sucesivamente. Si N es el número total de partículas en el recipiente, entonces Nm es la masa total y Nm/L^3 es la densidad ρ . Entonces, $m/L^3 = \rho/N$, y

$$p = \rho \left(\frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots}{N} \right). \quad (12)$$

La cantidad dentro del paréntesis en la ecuación 12 es el valor promedio de v_x^2 para todas las partículas en el recipiente, el cual representamos por $\overline{v_x^2}$. Entonces

$$p = \rho \overline{v_x^2}. \quad (13)$$

Para cualquier partícula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Puesto que tenemos muchas partículas y porque se están moviendo enteramente al azar, los valores promedio de v_x^2 , v_y^2 , y v_z^2 son iguales, y el valor de cada una es exactamente un tercio del valor promedio de v^2 . No existe una preferencia entre las moléculas para moverse a lo largo de alguno de los tres ejes. Por esto $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$, de modo que la ecuación 13 resulta

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}. \quad (14)$$

Si bien hemos derivado este resultado despreciando las colisiones entre las partículas, el resultado es verdadero incluso si consideramos las colisiones. Debido al intercambio de velocidades en una colisión elástica entre partículas idénticas, siempre habrá una molécula que choque con A_2 con un ímpetu mv_x correspondiente a la molécula que salió de A_1 con este mismo ímpetu. La ecuación 14 se cumple aun cuando la caja contenga una mezcla de moléculas de masas diferentes, porque el ímpetu se conserva en las colisiones, y la pared debe recibir el mismo impulso sin importar qué moléculas lo golpeen. También, el tiempo que dura la colisión es despreciable comparado con el tiempo invertido entre colisiones. De aquí que despreciar las colisiones es meramente un recurso conveniente para

el cálculo. De manera similar, podríamos haber escogido un recipiente de cualquier forma: el cubo meramente simplifica el cálculo. Si bien hemos calculado la presión ejercida únicamente sobre el lado A_1 , se deduce de la ley de Pascal que la presión es la misma sobre todas las caras y en cualquier parte del interior. (Esto es así únicamente si la densidad del gas es uniforme. En una muestra grande de gas, los efectos gravitatorios pudieran ser significativos, y deberíamos tener en cuenta la variación de la densidad. Véase la sección 17-3 y el problema 6 de este capítulo.)

La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se llama *velocidad media cuadrática* de las moléculas (rms, de *root-mean-square*) y es una clase de velocidad molecular promedio. (Estudiaremos este promedio con más detalle en la sección 24-3.) Usando la ecuación 14, podemos calcular la velocidad media cuadrática partiendo de los valores medidos de la presión y de la densidad del gas. Entonces

$$v_{rms} \equiv \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \quad (15)$$

En la ecuación 14 relacionamos una cantidad macroscópica (la presión p) con un valor promedio de una cantidad microscópica (esto es, con $\overline{v^2}$ o con v_{rms}^2). Sin embargo, los promedios pueden ser considerados durante tiempos cortos o durante tiempos largos, en regiones pequeñas del espacio o en regiones grandes del espacio. El promedio calculado en una región pequeña durante un tiempo corto debería depender del tiempo o región elegidos; de modo que los valores obtenidos de esta manera deben de fluctuar. Esto podría suceder en un gas de densidad muy baja, por ejemplo. Sin embargo, podemos despreciar las fluctuaciones cuando el número de partículas en el sistema es suficientemente grande.

Problema muestra 2 Calcule la velocidad media cuadrática de las moléculas de hidrógeno a 0.00°C y 1.00 atm de presión, suponiendo que el hidrógeno sea un gas ideal. En estas condiciones el hidrógeno tiene una densidad ρ de $8.99 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$.

Solución Puesto que $p = 1.00 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})}{8.99 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3}} = 1840 \text{ m/s}.$$

Esto es del orden de una milla por segundo, o sea 3600 mi/h.

La tabla 1 da los resultados de cálculos similares para algunos gases a la temperatura ambiente. Estas velocidades moleculares son aproximadamente del mismo orden que la velocidad del sonido a la misma temperatura. Por ejemplo, en aire a 0°C, $v_{rms} = 485 \text{ m/s}$ y la velocidad del sonido es 331 m/s; en el hidrógeno $v_{rms} = 1838 \text{ m/s}$ y el sonido viaja a 1286 m/s. Estos resultados son de espe-

TABLA 1 ALGUNAS VELOCIDADES MOLECULARES A LA TEMPERATURA AMBIENTE (300 K)

Gas	Masa molar M (g/mol)	v_{rms} (m/s)	Energía cinética de traslación por mol (J/mol)
Hidrógeno	2.0	1920	3720
Helio	4.0	1370	3750
Vapor de agua	18.0	645	3740
Nitrógeno	28.0	517	3740
Oxígeno	32.0	483	3730
Bióxido de carbono	44.0	412	3730
Bióxido de azufre	64.1	342	3750

[†] La masa molar, a veces conocida también como el peso molecular, se da aquí en g/mol por conveniencia; su unidad SI es kg/mol.

rarse en términos de nuestro modelo de un gas; véase el problema 38. La energía de la onda sonora es transportada como energía cinética de una molécula a la siguiente con la cual choca. Por lo tanto, deberíamos de esperar que las ondas sonoras se propaguen con una velocidad que es aproximadamente la misma que la velocidad característica del movimiento molecular, que es, de hecho, lo que observamos. Las moléculas en sí mismas, a pesar de sus velocidades elevadas, no se mueven muy lejos durante un periodo de la vibración del sonido; están confinadas en un espacio más bien pequeño por los efectos del gran número de colisiones. Esto explica por qué existe una demora entre la apertura de una botella de amoníaco en un extremo de un salón y su olor en el otro extremo. Si bien las velocidades moleculares son elevadas, el gran número de colisiones limita el avance de las moléculas de amoníaco. Se difunden por el aire a velocidades que son muchos menores que las velocidades moleculares.

Problema muestra 3 Suponiendo que la velocidad del sonido en un gas sea la misma que la velocidad media cuadrática de las moléculas, muestre cómo dependería de la temperatura la velocidad del sonido en un gas ideal.

Solución La densidad de un gas es

$$\rho = \frac{nM}{V},$$

donde M es la masa molar (la masa de 1 mol) y n es el número de moles. Al combinar esto con la ley del gas ideal $pV = nRT$ nos da

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}.$$

Obtenemos de la ecuación 15

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (16)$$

de modo que la velocidad del sonido v_1 a una temperatura T_1 se relaciona con la velocidad del sonido v_2 en el mismo gas a una temperatura T_2 por

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Por ejemplo, si la velocidad del sonido a 273 K es de 331 m/s en el aire, su velocidad en el aire a 300 K es

$$(331 \text{ m/s}) \sqrt{\frac{300 \text{ K}}{273 \text{ K}}} = 347 \text{ m/s.}$$

Obsérvese que aquí se emplea la temperatura absoluta (Kelvin). ¿Por qué?

Nuestra hipótesis inicial, de que la velocidad del sonido en un gas es la misma que la velocidad media cuadrática de las moléculas, es sólo crudamente correcta. En realidad, la velocidad del sonido es proporcional a v_{rms} . ¿Cambia esto las conclusiones de este problema muestra con respecto a la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura? Véase el problema muestra 6 para una derivación de la velocidad del sonido en un gas.

23-4 INTERPRETACIÓN CINÉTICA DE LA TEMPERATURA

Si multiplicamos cada lado de la ecuación 14 por el volumen V , obtenemos

$$pV = \frac{1}{3} \rho V \bar{v}^2,$$

donde ρV es la masa total del gas, siendo ρ la densidad. Podemos también escribir la masa del gas como nM , donde n es el número de moles y M es la masa molar. Al hacer esta sustitución tenemos que

$$pV = \frac{1}{3} nM \bar{v}^2. \quad (17)$$

La energía cinética de traslación total del gas es

$$\frac{1}{2} m(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) = \frac{1}{2} m(N\bar{v}^2),$$

donde N es el número total de moléculas. La masa total del gas puede escribirse como $mN = nM$. El lado derecho de la ecuación 17 es, por lo tanto, dos tercios de la energía cinética total de traslación. Podemos escribir la ecuación 17 como:

$$pV = \frac{2}{3} (\frac{1}{2} nM \bar{v}^2).$$

Combinando ésta con la ecuación de estado de un gas ideal ($pV = nRT$), obtenemos

$$\frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} RT. \quad (18)$$

Esto es, la *energía cinética de traslación promedio por mol de un gas ideal es proporcional a la temperatura*. Este resultado relaciona la teoría cinética con la ecuación de estado de un gas ideal. De manera equivalente, podemos considerar a la ecuación 18 como una conexión entre una propiedad macroscópica, la temperatura, y una propiedad microscópica, la energía cinética de una molécula.

De cualquier modo, ganamos cierta visión sobre el significado de la temperatura en los gases.

La temperatura de un gas se relaciona con la energía cinética de traslación promedio medida con respecto al centro de masa del gas. La energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa del gas no tiene relación con la temperatura del gas. En la sección 23-2 supusimos el movimiento al azar como parte de nuestra definición estadística de un gas ideal y en la sección 23-3 calculamos a \bar{v}^2 sobre esta base. Para una distribución de las velocidades moleculares que tengan direcciones al azar, el centro de masa estaría en reposo. Entonces, para calcular \bar{v}^2 , debemos usar un marco de referencia en el que el centro de masa del gas esté en reposo. En todos los demás marcos las moléculas tienen cada una velocidades más grandes en una cantidad u (la velocidad del centro de masa en ese marco) que en el marco del centro de masa; de aquí que los movimientos ya no serán al azar, y obtendremos valores diferentes para \bar{v}^2 . La temperatura de un gas en un recipiente no aumenta ¡cuando ponemos al recipiente en un auto en movimiento!

Dividamos ahora cada lado de la ecuación 18 por la constante de Avogadro N_A , que es el número de moléculas por mol de un gas. Entonces $M/N_A = m$, la masa de una sola molécula, y tenemos

$$\frac{1}{2} (M/N_A) \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} (R/N_A) T. \quad (19)$$

Ahora, $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ es la energía cinética de traslación promedio por molécula. La razón R/N_A es, según la ecuación 8, la constante k de Boltzmann, que juega el papel de la constante de gas por molécula. Tenemos entonces

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (20)$$

La ecuación 20 es el análogo molecular de la ecuación 18, que trata de las cantidades molares. Aquí vemos que la energía cinética de traslación promedio de una molécula está determinada por la temperatura.

En la última columna de la tabla 1 listamos valores calculados de $\frac{1}{2} M v_{\text{rms}}$. Como la ecuación 18 predice para un gas ideal, esta cantidad (la energía cinética de traslación por mol) tiene casi el mismo valor para los gases reales a una temperatura dada (300 K en este caso). Partiendo de la ecuación 20 concluimos que a una temperatura T determinada la razón de las velocidades medias cuadráticas de las moléculas de dos gases diferentes es igual a la cuadrada de la razón inversa de sus masas. Es decir, a partir de

$$T = \frac{2}{3k} \frac{m_1 \bar{v}_1^2}{2} = \frac{2}{3k} \frac{m_2 \bar{v}_2^2}{2}$$

obtenemos

$$\sqrt{\frac{\bar{v}_1^2}{\bar{v}_2^2}} = \frac{v_{1,\text{rms}}}{v_{2,\text{rms}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (21)$$

Podemos aplicar la ecuación 21 a la difusión de dos gases diferentes en un recipiente con paredes porosas

situado en un espacio al vacío. El gas más ligero, cuyas moléculas se mueven más rápidamente en promedio, escapará más rápidamente que el más pesado. La razón del número de moléculas de los dos gases que pasan a través de las paredes porosas en un intervalo de tiempo corto, la cual se llama el *factor de separación* α , es igual a la razón de sus velocidades medias cuadráticas, y por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 21, a la raíz cuadrada de la relación inversa de sus masas moleculares o, equivalentemente, de sus masas molares:

$$\alpha = \sqrt{m_2/m_1} = \sqrt{M_2/M_1}. \quad (22)$$

El proceso de difusión a través de paredes porosas es un método empleado para separar los átomos de un elemento por masa en sus diferentes isótopos.

Problema muestra 4 El uranio natural consiste primordialmente en dos isótopos, ^{235}U (0.7% de abundancia) y ^{238}U (99.3% de abundancia). Únicamente el ^{235}U es fácilmente fisiónable. En una muestra del gas UF_6 (hexafluoruro de uranio), se desea aumentar la abundancia del ^{235}U de 0.7% a 3% forzando al gas n veces a través de una barrera porosa. Halle n .

Solución La masa molar M del $^{235}\text{UF}_6$ es de 0.349 kg/mol y la del $^{238}\text{UF}_6$ es de 0.352 kg/mol. Entonces, después de pasar a través de una barrera porosa, el gas se habrá enriquecido en ^{235}U según el factor de separación α , dado por la ecuación 22:

$$\alpha = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{0.352 \text{ kg/mol}}{0.349 \text{ kg/mol}}} = 1.0043.$$

Cada paso sucesivo a través de una pared porosa aumenta la fracción relativa del ^{235}U según un factor de α . Después de tales pasos n , la concentración relativa del ^{235}U habrá aumentado según α^n . Para aumentar la concentración del ^{235}U desde 0.7%, característica del uranio natural, hasta 3%, un enriquecimiento usado comúnmente en los reactores de potencia, el número n de barreras porosas que deben ser atravesadas se determina a partir de

$$\alpha^n \left(\frac{0.007}{0.993} \right) = \left(\frac{0.03}{0.97} \right).$$

Resolviendo, obtenemos $n = 350$. En la práctica, esto se lleva a cabo por medio de etapas sucesivas, en las que una porción del gas que pasa más fácilmente a través de una barrera (y por lo tanto es enriquecido ligeramente en ^{235}U) avanza a la siguiente etapa, donde el resto (ahora ligeramente empobrecido de ^{235}U) es regresado para alimentar la etapa más baja anterior. Para obtener ^{235}U casi puro, tal como se requiere para las armas nucleares, se requeriría varios miles de etapas.

23-5 TRABAJO EFECTUADO SOBRE UN GAS IDEAL

Si elevamos la temperatura del gas en el cilindro de la figura 1, el gas se dilata y eleva el peso contra la gravedad;

el gas efectúa un trabajo (positivo) sobre el peso. La fuerza hacia arriba ejercida por el gas debido a su presión p está dada por pA , donde A es el área del émbolo. Según la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida *por* el émbolo *sobre* el gas es igual y opuesta a la fuerza ejercida *por* el gas *sobre* el émbolo. Usando la ecuación 7 del capítulo 7, podemos por lo tanto escribir el trabajo W efectuado sobre el gas como:

$$W = \int F dx = \int (-pA)dx. \quad (23)$$

Aquí dx representa el desplazamiento del émbolo, y el signo menos entra porque la fuerza ejercida por el émbolo sobre el gas está en una dirección opuesta al desplazamiento del émbolo. Si *reducimos* la temperatura del gas, éste se contrae en lugar de dilatarse; el trabajo efectuado sobre el gas en este caso es positivo. Suponemos que el proceso descrito por la ecuación 23 se lleva a cabo lentamente, de modo que pueda considerarse que el gas está en equilibrio en todas las etapas intermedias. De otro modo, la presión no estaría claramente definida durante el proceso, y la integral de la ecuación 23 no podría ser evaluada fácilmente.

Podemos escribir la ecuación 23 en una forma más general que viene a ser muy útil. Si el émbolo se mueve una distancia dx , entonces el volumen del gas cambia en una cantidad $dV = A dx$. Entonces el trabajo efectuado sobre el gas puede escribirse:

$$W = - \int p dV. \quad (24)$$

La integración se lleva a cabo entre el volumen inicial V_i y el volumen final V_f .

La ecuación 24 es el resultado más general del trabajo efectuado sobre un gas. No hace referencia al agente externo que efectúa el trabajo; simplemente establece que el trabajo efectuado sobre el gas puede ser calculado a partir de la presión y el volumen del gas. Obsérvese que el signo algebraico del trabajo está contenido implícitamente en la ecuación 24: si el gas se dilata, dV es positivo y W es negativo, siendo p una cantidad escalar que asume valores positivos únicamente. A la inversa, si el gas se contrae, dV es negativo y el trabajo efectuado sobre el gas es positivo.

La ecuación 24 es análoga al resultado general para el trabajo efectuado sobre un sistema por una fuerza variable F . Recordará usted de la figura 7 del capítulo 7 que si trazamos a F contra x , el trabajo efectuado por F es precisamente el área bajo la curva entre x_i y x_f . La figura 6 muestra la situación similar para el trabajo efectuado sobre el gas. Una gráfica en la forma de la figura 6 se llama *diagrama pV* , estando p trazada sobre el eje vertical (como F) y V trazada sobre el eje horizontal (como x). *La magnitud del trabajo efectuado sobre el gas es igual al área bajo la curva de presión en un diagrama pV* . El signo

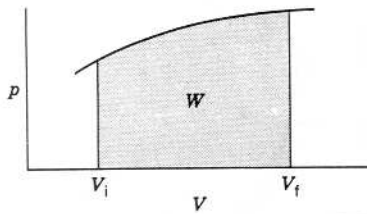


Figura 6 La magnitud del trabajo W efectuado sobre un gas por una presión que varía arbitrariamente es igual al área bajo la curva de presión en un diagrama pV entre el volumen inicial V_i y el volumen final V_f .

de W se determina de acuerdo a si $V_f > V_i$ (en cuyo caso W es negativo, como en la Fig. 6), o si $V_f < V_i$ (en cuyo caso W es positivo). Una vez más, el trabajo efectuado sobre el gas es negativo si el proceso aumenta el volumen del gas y positivo si el proceso reduce el volumen del gas.

La fuerza de la presión es claramente no conservativa, como lo ilustra la figura 7. Supongamos que deseamos llevar a nuestro gas ideal de las condiciones iniciales V_i y p_i (punto A) a las condiciones finales V_f y p_f (punto D). Existen muchas trayectorias diferentes que podemos seguir entre A y D , de las cuales se muestran dos en la figura 7. A lo largo de la trayectoria 1 (ABD), primero aumentamos la presión desde p_i hasta p_f a volumen constante. (Lo llevaríamos a cabo girando la perilla de control del depósito térmico, aumentando la temperatura del gas, mientras que añadimos simultáneamente la cantidad precisa de peso adicional sobre el émbolo para evitar que se mueva.) Luego seguimos la trayectoria BD aumentando la temperatura, pero sin añadir ningún peso adicional sobre el émbolo, de modo que la presión permanezca constante en el valor p_f mientras que el volumen aumenta desde V_i hasta V_f . El trabajo efectuado durante todo este procedimiento es el área del rectángulo $BDFE$ (el área bajo la línea BD).

Podemos hallar W_1 , el trabajo efectuado sobre el gas a lo largo de la trayectoria 1, al considerar el trabajo efectuado a lo largo de los dos segmentos AB y BD :

$$W_1 = W_{AB} + W_{BD}.$$

Debido a que el volumen es constante a lo largo de AB , se deduce de la ecuación 24 que $W_{AB} = 0$. A lo largo de BD , la presión es constante (en el valor p_f) y sale de la integral. El resultado es

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{AB} + W_{BD} \\ &= 0 - \int p \, dV = -p_f \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_f(V_f - V_i). \end{aligned}$$

Para seguir la trayectoria 2 (ACD), primero aumentamos la temperatura mientras mantenemos a la presión constante en p_i (es decir, sin añadir ningún peso adicional al émbolo), de modo que el volumen crece desde V_i hasta V_f . Luego aumentamos la presión desde p_i hasta p_f al

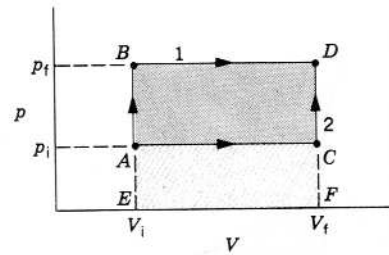


Figura 7 Se lleva un gas de la presión y volumen en el punto A a la presión y volumen en el punto D a lo largo de dos trayectorias diferentes, ABD y ACD . A lo largo de la trayectoria 1 (ABD) el trabajo es igual al área del rectángulo $BDFE$, mientras que a lo largo de la trayectoria 2 (ACD) el trabajo es igual al área del rectángulo $ACFE$.

volumen constante V_i aumentando la temperatura y añadiendo peso al émbolo para evitar que se mueva. El trabajo efectuado en este caso es el área bajo la línea AC , o sea el rectángulo $ACFE$. Podemos calcular esto como:

$$\begin{aligned} W_2 &= W_{AC} + W_{CD} \\ &= - \int p \, dV + 0 = -p_i \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_i(V_f - V_i). \end{aligned}$$

Claramente $W_1 \neq W_2$, y el trabajo depende de la trayectoria.

Podemos llevar a cabo diversas operaciones sobre el gas y evaluar el trabajo efectuado en cada caso.

Trabajo efectuado a volumen constante

El trabajo es cero en cualquier proceso en que el volumen permanezca constante (como en los segmentos AB y CD de la figura 7);

$$W = 0 \quad (V \text{ constante}). \quad (25)$$

Deducimos directamente de la ecuación 24 que $W = 0$ si V es constante. Obsérvese que no es suficiente que el proceso comience y termine con el mismo volumen; el volumen debe ser constante durante todo el proceso para que el trabajo sea cero. Por ejemplo, consideremos el proceso $ACDB$ en la figura 7. El volumen comienza y termina en V_i , pero el trabajo ciertamente no es cero. El trabajo es cero únicamente en trayectorias verticales tales como la AB , que representa un proceso a volumen constante.

Trabajo efectuado a presión constante

Aquí podemos aplicar fácilmente la ecuación 24, porque la constante p sale de la integral:

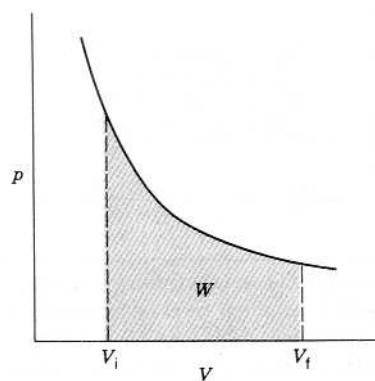


Figura 8 Se representa un proceso efectuado a temperatura constante (proceso isotérmico) por medio de una hipérbola en un diagrama pV . El trabajo efectuado al cambiar el volumen es igual al área bajo la curva entre V_i y V_f .

$$W = -p \int dV = -p(V_f - V_i) \quad (p \text{ constante}). \quad (26)$$

Los segmentos AC y BD de la figura 7 son ejemplos. Obsérvese que el trabajo efectuado sobre el gas es negativo para ambos segmentos, porque el volumen aumenta en ambos procesos.

Trabajo efectuado a temperatura constante

Si el gas se dilata o se contrae a temperatura constante, la relación entre p y V , dada por la ley del gas ideal, es

$$pV = \text{constante}.$$

En un diagrama pV , la gráfica de la ecuación $pV = \text{constante}$ es exactamente igual a la gráfica de la ecuación $xy = \text{constante}$ en un sistema de coordenadas xy : es una hipérbola, como se muestra en la figura 8.

Un proceso efectuado a temperatura constante se llama *proceso isotérmico*, y la curva hiperbólica correspondiente del diagrama pV se llama *isoterma*. Para hallar el trabajo efectuado sobre un gas durante un proceso isotérmico, usamos la ecuación 24, pero debemos hallar una manera de llevar a cabo la integral cuando p varía. Para hacerlo usamos la ecuación de estado del gas ideal para escribir $p = nRT/V$, y entonces

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p \, dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V},$$

donde la última etapa puede hacerse porque estamos considerando que T es una constante. Efectuando la integración, hallamos

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (T \text{ constante}). \quad (27)$$

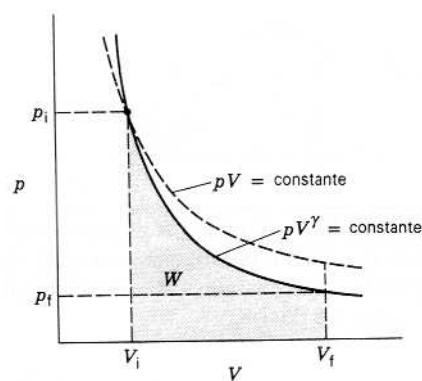


Figura 9 Se representa un proceso adiabático en un diagrama pV por medio de la curva tipo hipérbola $pV^\gamma = \text{constante}$. El trabajo efectuado al cambiar de volumen es igual al área bajo la curva entre V_i y V_f . Ya que $\gamma > 1$, la curva adiabática tiene una pendiente negativa más empinada que la curva isotérmica $pV = \text{constante}$.

Obsérvese que éste es también negativo si $V_f > V_i$ ($\ln x$ es positivo para $x > 1$) y positivo si $V_f < V_i$.

Trabajo efectuado en aislamiento térmico

Alejemos al cilindro de la figura 1 del depósito térmico y pongámoslo sobre una placa de material aislante. El gas estará entonces en completo aislamiento térmico con respecto a su entorno; si efectuamos un trabajo sobre él, su temperatura cambiará, en contraste con su comportamiento cuando estaba en contacto con el depósito térmico. Un proceso llevado a cabo en aislamiento térmico se llama *proceso adiabático*.

Si permitimos que el gas se dilate sin que haya otras restricciones, la trayectoria que seguirá está representada por la curva tipo hipérbola

$$pV^\gamma = \text{constante}, \quad (28)$$

como se muestra en la figura 9. El parámetro γ , llamado la *razón de calores específicos*, debe determinarse empíricamente para un gas dado. Sus valores están típicamente en el intervalo de 1.1 a 1.8. (En la sección 25-4 estudiaremos los calores específicos de los gases, y en la sección 25-6 derivaremos la ecuación 28.) Debido a que γ es más grande que 1, la curva $pV^\gamma = \text{constante}$ está más empinada que la curva $pV = \text{constante}$, por lo que el trabajo efectuado en este proceso será de magnitud un poco más pequeña que el trabajo efectuado al dilatarse desde V_i hasta V_f a T constante, como puede verse en la figura 9.

La constante de la ecuación 28 se determina a partir de la presión y el volumen en un punto determinado de la curva. Escojamos el punto inicial p_i, V_i en la figura 9, y entonces

$$pV^\gamma = p_i V_i^\gamma$$

o bien

$$p = \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} \quad (29)$$

Ahora podemos hallar el trabajo adiabático:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_i}^{V_f} p \, dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} \, dV = - p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= - \frac{p_i V_i^\gamma}{\gamma - 1} (V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}). \end{aligned}$$

Introduciendo, en primer lugar, un factor de $V_i^{\gamma-1}$ y segundo usando $p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$, podemos escribir el trabajo adiabático como:

$$\begin{aligned} W &= \frac{p_i V_i}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (p_f V_f - p_i V_i) \quad (\text{adiabático}). \quad (30) \end{aligned}$$

Si el gas se expande, entonces $V_f/V_i < 1$, y puesto que un número menor de 1 elevado a cualquier potencia positiva permanece menor que 1, el trabajo es otra vez negativo.

Problema muestra 5 Una muestra de gas que consta de 0.11 mol se comprime de un volumen de 4.0 m³ a 1.0 m³ mientras su presión aumenta de 10 a 40 Pa. Compare el trabajo efectuado a lo largo de las tres trayectorias diferentes que se muestran en la figura 10.

Solución La trayectoria 1 consta de dos procesos, uno a presión constante seguido por otro a volumen constante. El trabajo efectuado a presión constante se halla de la ecuación 26,

$$W = -p(V_f - V_i) = -(10 \text{ Pa})(1.0 \text{ m}^3 - 4.0 \text{ m}^3) = 30 \text{ J}.$$

El trabajo efectuado a volumen constante es cero (véase la Ec. 25), así que el trabajo total para la trayectoria 1 es

$$W_1 = 30 \text{ J} + 0 = 30 \text{ J}.$$

La trayectoria 2 representa un proceso isotérmico, a lo largo del cual $T = \text{constante}$. Entonces $p_i V_i = p_f V_f = nRT$. El trabajo efectuado durante el proceso isotérmico puede ser hallado usando la ecuación 27, sustituyendo a nRT por $p_i V_i$, lo cual da

$$W_2 = -p_i V_i \ln \frac{V_f}{V_i} = -(10 \text{ Pa})(4.0 \text{ m}^3) \ln \frac{1.0 \text{ m}^3}{4.0 \text{ m}^3} = 55 \text{ J}.$$

La trayectoria 3 consta de un proceso a volumen constante, para el cual el trabajo es nuevamente cero, seguido por un proceso a presión constante, y así el trabajo total para la trayectoria 3 es

$$W_3 = 0 - p_f(V_f - V_i) = -(40 \text{ Pa})(1.0 \text{ m}^3 - 4.0 \text{ m}^3) = 120 \text{ J}.$$

Obsérvese que el trabajo es positivo en los tres procesos, y que las magnitudes aumentan de acuerdo con el área bajo cada trayectoria en el diagrama pV .

Problema muestra 6 (a) Halle el módulo volumétrico B para un proceso adiabático para un gas ideal. (b) Tome el módulo

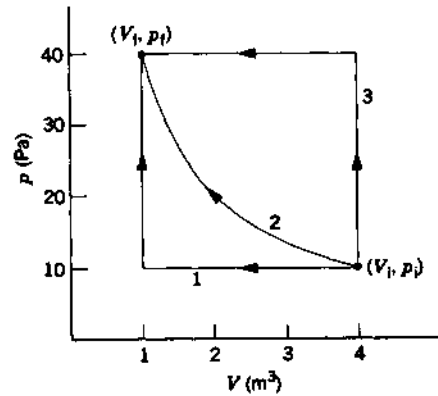


Figura 10 Problema muestra 5. Se lleva a un gas desde el punto inicial i hasta el punto final f a lo largo de tres trayectorias diferentes. La trayectoria 2 es una isoterma.

volumétrico adiabático para hallar la velocidad del sonido en el gas en función de la temperatura. Halle el valor para el aire a temperatura ambiente (20°C).

Solución (a) En el límite diferencial, el módulo volumétrico (véase la Ec. 5 del capítulo 17) puede escribirse como:

$$B = -V \frac{dp}{dV}.$$

En un proceso adiabático, la ecuación 28 ($pV^\gamma = \text{constante}$) da, considerando la derivada con respecto a V ,

$$\frac{d(pV^\gamma)}{dV} = \left(\frac{dp}{dV} \right) V^\gamma + p(\gamma V^{\gamma-1}) = 0,$$

o bien

$$V \frac{dp}{dV} = -\gamma p.$$

Entonces

$$B = \gamma p$$

en un proceso adiabático para un gas ideal.

(b) En la sección 20-1, determinamos que la velocidad del sonido en un gas puede ser escrita

$$v = \sqrt{B/\rho},$$

donde B es el módulo volumétrico y ρ es la densidad del gas. Usando el resultado de la parte (a) y la ecuación de estado del gas ideal (Ec. 7), obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma(nRT/V)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{\rho V}}.$$

La cantidad ρV es la masa total del gas, la cual también puede escribirse nM , donde n es el número de moles y M es la masa molar. Haciendo esta sustitución, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

Así, la velocidad del sonido en un gas depende de la raíz cuadrada de la temperatura, como lo inferimos en el problema muestra 3.

En el aire, la masa molar promedio es de alrededor de 0.0290 kg/mol, y el parámetro γ es de alrededor de 1.4. Entonces para $T = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$,

$$v = \sqrt{\frac{(1.4)(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(293\text{ K})}{0.0290\text{ kg/mol}}} = 343\text{ m/s.}$$

23-6 LA ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

Nuestro modelo del gas ideal se basa en que las moléculas son consideradas como partículas puntuales. La temperatura, como lo hemos visto, depende de la energía cinética de traslación de las moléculas. Para partículas puntuales, no existe otra forma de considerar la energía interna E_{int} . No existe una energía potencial molecular, como tampoco ninguna energía interna asociada con la rotación o con la vibración de la molécula. *En un gas ideal, la energía interna puede ser energía cinética de traslación únicamente.* Si tenemos n moles de un gas ideal a la temperatura T , entonces

$$E_{\text{int}} = n\left(\frac{1}{2}M\bar{v}^2\right) = \frac{3}{2}nRT \quad (31)$$

usando la ecuación 18. *La energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura.* No depende, por ejemplo, de la presión o del volumen del gas.

Una manera de cambiar la energía interna de un gas ideal es efectuar un trabajo sobre él (o permitir que el gas efectúe un trabajo sobre su entorno). Supongamos que el gas en el cilindro mostrado en la figura 1 está aislado del depósito térmico. Hagamos que el entorno efectúe un trabajo W sobre el gas. La ley generalizada de la conservación de la energía (véase la Ec. 28 del capítulo 8) da entonces

$$\Delta E_{\text{int}} = W \quad (32)$$

porque el gas puede almacenar energía sólo por la energía interna, y el trabajo es la única contribución al cambio en la energía interna del gas.

Supongamos que el entorno efectúe un trabajo sobre el gas, de modo que W sea positivo en la ecuación 32. Se deduce entonces que ΔE_{int} debe ser positivo, y usando la ecuación 31 podemos escribir

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nR \Delta T, \quad (33)$$

así que el cambio de temperatura es también positivo.

Si el émbolo se mueve hacia arriba, el entorno efectúa un trabajo negativo sobre el gas, y según la ecuación 32 el cambio en la energía interna es negativo. De acuerdo con la ecuación 33 el cambio en la temperatura es también negativo.

Modifiquemos ahora una de las hipótesis básicas de nuestro modelo del gas ideal. En lugar de considerar que

una molécula esté representada como una partícula puntual, considerémosla como dos partículas puntuales separadas por una distancia dada. Este modelo ofrece una descripción mejor de los *gases diatómicos*, los que tienen dos átomos en cada molécula y que incluyen a gases comunes tales como O_2 , N_2 , o CO (monóxido de carbono). Tal molécula puede adquirir energía cinética girando con respecto a su centro de masa, y por lo tanto es necesario considerar en la energía interna las contribuciones de energía cinética rotatoria así como de energía cinética de traslación.

La energía cinética rotatoria de una molécula diatómica, ilustrada en la figura 11, puede ser escrita

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2$$

donde I es la inercia rotatoria de la molécula para rotaciones con respecto a un eje en particular. El sistema de coordenadas $x'y'z'$ está fijo en el centro de masa de la molécula. En las masas puntuales, no existe energía cinética asociada con la rotación con respecto al eje z' , porque $I_z = 0$. La energía cinética total de la molécula es la suma de las partes rotatoria y de traslación:

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2. \quad (34)$$

Debido a que la energía cinética es el único tipo de energía que puede tener la molécula, la ecuación 34 representa también la contribución de una molécula a la energía interna del gas. Para hallar la energía interna total del gas, debemos hallar la suma de expresiones tales como la ecuación 34 para todas las N moléculas. Una manera más sencilla es evaluar la energía promedio por molécula y multiplicarla por el número de moléculas, N .

Supongamos que efectuamos un trabajo W sobre el gas, aumentando su energía interna. ¿Cuánto de este aumento parecería como energía cinética de traslación y cuánto como energía cinética rotatoria? Esta determinación es muy importante para entender las propiedades macroscópicas del gas, porque *únicamente la energía cinética de traslación promedio de un gas contribuye a su temperatura.* Esto es, dos gases con la misma energía cinética de traslación promedio tienen la misma temperatura, aun cuando uno de ellos tenga una energía rotatoria más grande y, por lo tanto, una energía interna más grande.

Para determinar las contribuciones relativas de la energía cinética de rotación y de traslación (y posiblemente otras formas también) a la energía interna, es necesario considerar el valor promedio de cada término diferente en la expresión de la energía interna de un gas, tal como los cinco términos de la ecuación 34, la cual se basa en la hipótesis de una molécula diatómica rígida. Para otros gases, podríamos tener que incluir un tercer término rotatorio, y para moléculas no rígidas es necesario incluir términos en la energía correspondientes al movimiento vibratorio (véase la sección 15-10). A partir de la mecánica estadística clásica, la cual estudiaremos en el capítulo

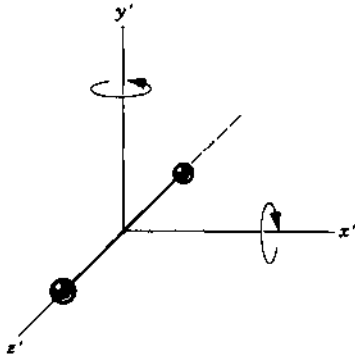


Figura 11 Se muestra una molécula diatómica, que consta de dos átomos considerados como partículas puntuales, con su eje a lo largo del eje z' de un sistema de coordenadas. En esta orientación, la inercia rotatoria para rotaciones con respecto al eje z' es cero, y entonces no existe un término de la energía cinética correspondiente a tales rotaciones. Las inercias rotatorias para rotaciones con respecto a los ejes x' y y' no son cero, y entonces existen términos de energía cinética para tales rotaciones.

lo 24, podemos demostrar que, cuando el número de partículas es grande y se aplica la mecánica newtoniana, cada uno de estos términos independientes tiene la misma energía promedio de $\frac{1}{2}kT$. En otras palabras, la energía disponible depende únicamente de la temperatura y está distribuida en partes iguales en cada una de las maneras independientes en que una molécula puede almacenar energía. Este teorema, deducido por Maxwell, se llama *equipartición de la energía*.

Cada forma independiente que pueda tomar la energía de un sistema como, por ejemplo, los cinco términos de la ecuación 34, se llama un *grado de libertad*. Un gas monoatómico tiene únicamente *tres* grados de libertad por molécula, puesto que únicamente tiene energía cinética de traslación ($E_{\text{tra}} = \frac{1}{2}m v_x^2 + \frac{1}{2}m v_y^2 + \frac{1}{2}m v_z^2$). Un gas diatómico tiene *cinco* grados de libertad por molécula, si la molécula es rígida.

Usemos el teorema de la equipartición de la energía para escribir una expresión para la energía interna de un gas ideal monoatómico. La energía interna promedio por molécula es $\frac{3}{2}kT$ (3 grados de libertad por $\frac{1}{2}kT$ por grado de libertad), y la energía interna total de las N moléculas es

$$E_{\text{int}} = N(\frac{3}{2}kT) = \frac{3}{2}nRT \quad (\text{gas monoatómico}), \quad (35)$$

donde hemos usado las ecuaciones 6 y 8. La ecuación 35 es idéntica a la ecuación 31.

Para un gas diatómico, con 5 grados de libertad, el resultado es

$$E_{\text{int}} = N(\frac{5}{2}kT) = \frac{5}{2}nRT \quad (\text{gas diatómico}). \quad (36)$$

Un gas poliatómico (más de dos átomos por molécula) tiene generalmente tres ejes de rotación posibles (a no ser

que tres átomos estén en una línea recta, como en el CO_2). La energía cinética interna por molécula podría entonces tener un sexto término, $\frac{1}{2}I_z \cdot \omega_z^2$. Para 6 grados de libertad, la energía interna es

$$E_{\text{int}} = N(\frac{6}{2}kT) = 3nRT \quad (\text{gas poliatómico}). \quad (37)$$

Hasta el momento hemos considerado únicamente las contribuciones de la energía cinética de rotación o de traslación a la energía interna de un gas. Pueden contribuir también otras clases de energía. Por ejemplo, una molécula diatómica que pueda vibrar libremente (imagínemos que los dos átomos estén conectados por un resorte) tiene dos contribuciones adicionales a la energía: la energía potencial del resorte y la energía cinética vibratoria de los átomos. Entonces, una molécula diatómica con libertad para trasladarse, girar, y vibrar tendría 7 ($= 3 + 2 + 2$) grados de libertad. Para moléculas poliatómicas, el número de términos vibratorios en la energía puede ser mayor que dos. Los modos vibratorios de la energía interna son usualmente aparentes únicamente a alta temperatura, donde las colisiones más violentas pueden hacer que la molécula vibre.

En la sección 25-4, demostramos que los resultados derivados en esta sección dan una descripción muy buena de la relación entre la energía interna y la temperatura de gases reales. Vemos también que, cuando la temperatura de un gas desciende, los movimientos vibratorio y rotatorio pueden ser "congelados", de modo que a temperaturas suficientemente bajas únicamente están presentes los 3 grados de libertad de traslación. La deficiencia más seria de este modelo de un gas ideal es su incapacidad para explicar los efectos cuánticos inherentes en la estructura atómica y molecular. Los experimentos con colisiones en los gases proporcionaron pronta evidencia de que la energía interna de un átomo está cuantizada. Podemos decir entonces que el germen de la teoría cuántica se encuentra en la teoría cinética de los gases.*

Problema muestra 7 Consideremos una vez más la situación del problema muestra 5, donde el gas comienza en el punto inicial con un volumen $V_1 = 4.0 \text{ m}^3$ y una presión $p_1 = 10 \text{ Pa}$. Quitemos al cilindro del depósito térmico, y comprimamos al gas adiabáticamente hasta que su volumen sea $V_2 = 1.0 \text{ m}^3$. Halle el cambio en la energía interna del gas, suponiendo que sea helio (un gas monoatómico con $\gamma = 1.66$).

Solución Para hallar el cambio en la energía interna, podemos usar la ecuación 33 si conocemos el cambio en la temperatura. Podemos hallar la temperatura inicial usando la ley del gas ideal (puesto que p_1 y V_1 son conocidas), y podemos hallar la temperatura final si conocemos la presión y el volumen en el punto

* Véase "On Teaching Quantum Phenomena", por Sir N. F. Mott, *Contemporary Physics*, agosto de 1964, pág. 401.

final. La presión final puede ser hallada usando la relación adiabática de la ecuación 29:

$$p_f = \frac{p_i V_i^\gamma}{V_f^\gamma} = \frac{(10 \text{ Pa})(4.0 \text{ m}^3)^{1.66}}{(1.0 \text{ m}^3)^{1.66}} = 100 \text{ Pa}.$$

En el diagrama pV de la figura 10, el punto final del proceso adiabático se encuentra verticalmente muy por encima del punto final del proceso isotérmico (40 Pa). Esto es consistente con el hecho de que las curvas adiabáticas son más empinadas que las curvas isotérmicas, como se muestra en la figura 9.

Podemos ahora proceder a hallar las temperaturas inicial y final y luego el cambio en la energía interna:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(10 \text{ Pa})(4.0 \text{ m}^3)}{(0.11 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})} = 44 \text{ K}.$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(100 \text{ Pa})(1.0 \text{ m}^3)}{(0.11 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})} = 109 \text{ K}.$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= \frac{1}{2} n R \Delta T \\ &= \frac{1}{2} (0.11 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(109 \text{ K} - 44 \text{ K}) = 89 \text{ J}. \end{aligned}$$

El cambio en la energía interna es positivo, consistente con la ecuación 32 para este proceso adiabático, porque el trabajo efectuado al comprimir el gas es también positivo.

23-7 FUERZAS INTERMOLECULARES (Opcional)

Las fuerzas entre las moléculas son de origen electromagnético. Todas las moléculas contienen cargas eléctricas en movimiento. Estas moléculas son eléctricamente neutras en el sentido de que la carga negativa de los electrones es igual y opuesta a la carga positiva de los núcleos. Esto no significa, sin embargo, que las moléculas no interactúen eléctricamente. Por ejemplo, cuando dos moléculas se aproximan entre sí, las cargas de cada una se alteran y se desvían ligeramente de sus posiciones usuales de manera tal que la distancia promedio entre cargas opuestas en las dos moléculas es un poco más pequeña que aquella entre cargas iguales. De aquí que resulte una fuerza intermolecular de atracción. Este reordenamiento interno tiene lugar únicamente cuando las moléculas están relativamente cercanas entre sí, de manera que estas fuerzas actúan sólo a distancias cortas; son fuerzas de corto alcance. Si las moléculas se acercan mucho entre sí, de modo que sus cargas exteriores comiencen a trasladarse, la fuerza intermolecular se convierte en repulsiva. Las moléculas se repelen entre sí porque no hay modo de que una molécula se reordene a sí misma internamente para impedir la repulsión de los electrones externos adyacentes. Es esta repulsión al contacto la responsable de las colisiones moleculares en los gases imitando a las colisiones de las bolas de billar. Si no fuese por esta repulsión, las moléculas se atravesarían unas a otras en lugar de rebotar en la colisión.

Supongamos que las moléculas son casi simétricamente esféricas. Entonces podemos describir las fuerzas intermoleculares gráficamente trazando la energía potencial mutua de dos moléculas, U , en función de la distancia r entre sus centros. La fuerza F que actúa sobre cada molécula se relaciona con la energía potencial U por $F = -dU/dr$. En la figura 12a trazamos una $U(r)$ típica. Aquí podemos pensar que una molécula está fija en O . Entonces, la otra molécula es repelida de O cuando la pendiente de U es negativa y es atraída hacia O cuando la pendiente es positiva. En r_0 ninguna fuerza actúa entre las moléculas;

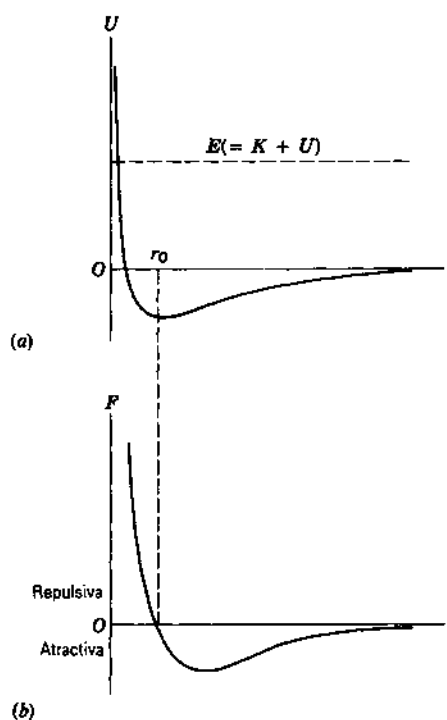


Figura 12 (a) La energía potencial mutua U de dos moléculas en función de su distancia de separación r . La energía mecánica E está indicada por la línea horizontal. (b) La fuerza radial entre las moléculas, dada por $-dU/dr$, correspondiente a esta energía potencial. La energía potencial es mínima en la separación de equilibrio r_0 , en cuyo punto la fuerza es cero.

las; la pendiente es cero allí. En la figura 12b trazamos la fuerza mutua $F(r)$ correspondiente a esta función de la energía potencial. La línea E de la figura 12a representa la energía mecánica de las moléculas al chocar. La intersección de $U(r)$ con esta línea es un “punto de retorno” del movimiento (véase la sección 8-4). La separación de los centros de las dos moléculas en el punto de retorno es la distancia de mayor acercamiento. La distancia de separación para la cual la energía potencial mutua es cero puede ser considerada como la distancia aproximada de mayor acercamiento en una colisión de baja energía y por lo tanto, también como el diámetro de la molécula. Para moléculas sencillas el diámetro es de alrededor de 2.5×10^{-10} m. Para moléculas sencillas, la distancia r_0 a la cual el potencial es mínimo (el punto de equilibrio) es de alrededor de 3.5×10^{-10} m y la fuerza y la energía potencial tienden a cero al aumentar r hasta unos 10^{-9} m, o alrededor de 4 diámetros. La fuerza molecular tiene entonces un alcance muy corto. Por supuesto, moléculas diferentes tienen tamaños diferentes y diferentes ordenamientos internos de las cargas, de modo que las fuerzas intermoleculares varían de una molécula a otra. Sin embargo, siempre muestran el comportamiento cualitativo indicado en la figura 12.

En un sólido, las moléculas vibran respecto a la posición de equilibrio r_0 . Su energía total E es negativa, esto es, está abajo del eje horizontal en la figura 12a. Las moléculas no tienen la energía suficiente para escapar de su valle de potencial (esto es, de su fuerza de enlace). En un líquido los centros de vibración O están más o menos fijos. En un líquido las moléculas tienen una energía vibratoria mayor con respecto a los centros que son

libres de moverse pero que permanecen aproximadamente a la misma distancia entre sí. Las moléculas tienen su energía cinética más grande en el estado gaseoso. En un gas, la distancia promedio entre las moléculas es considerablemente más grande que el alcance efectivo de las fuerzas intermoleculares, y las moléculas se mueven en línea recta entre colisiones. Maxwell explica la relación entre el modelo de la teoría cinética de un gas y las fuerzas intermoleculares como sigue: "En lugar de decir que las partículas son duras, esféricas, y elásticas, podemos, si nos place, decir que las partículas son centros de fuerza, cuya acción es insensible excepto a una cierta distancia pequeña, cuando súbitamente aparece como una fuerza repulsiva de enorme intensidad. Es evidente que cualquiera de las concepciones conduciría a los mismos resultados."

Es interesante comparar las fuerzas intermoleculares medidas con la fuerza gravitatoria de atracción entre moléculas. Si elegimos una distancia de separación de 4×10^{-10} m, por ejemplo, la fuerza entre dos átomos de helio es de unos 6×10^{-13} N. La fuerza gravitatoria para esa separación es de unos 7×10^{-42} N, más pequeña que la fuerza intermolecular (por un factor de 10^{29} ! Éste es un resultado típico y demuestra que la gravitación es despreciable en el caso de las fuerzas intermoleculares.

Si bien las fuerzas intermoleculares parecen ser pequeñas según normas ordinarias, debemos recordar que la masa de una molécula es tan pequeña (alrededor de 10^{-26} kg) que estas fuerzas pueden impartir aceleraciones instantáneas del orden de 10^{15} m/s² (10^{14} g). Estas aceleraciones pueden durar únicamente un tiempo muy pequeño, por supuesto, porque una molécula puede moverse muy rápidamente fuera del alcance de la influencia de la otra. ■

23-8 LA ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS (Opcional)

La teoría cinética describe microscópicamente el comportamiento de un gas ideal, aunque ciertas hipótesis de nuestro modelo del gas ideal no son válidas cuando se trata de gases reales. Para corregir estas deficiencias se han sugerido muchas modificaciones a la ecuación de estado del gas ideal. En la sección anterior, demostramos que una manera realista de considerar a la fuerza intermolecular nos conduce a concluir que las moléculas tienen un diámetro pequeño pero ciertamente no cero (que puede contradecir la hipótesis 4 del modelo del gas ideal), y que el alcance de la fuerza puede ir más allá del "diámetro de colisión" (lo cual contradice la hipótesis 5). En esta sección desarrollamos una ecuación de estado modificada que tiene en cuenta estos factores.

Para considerar el efecto del tamaño finito de las moléculas, consideremos cada molécula como una esfera sólida de diámetro d . No se permite que dos moléculas se acerquen entre sí a una distancia entre sus centros menor que d (Fig. 13). El "volumen libre" disponible para una molécula disminuye al volumen de un hemisferio de radio d centrado en la otra molécula. Sea b la disminución en el volumen disponible debido a las moléculas en 1 mol de un gas. El volumen total disponible para todo el conjunto de moléculas en n moles es entonces el volumen V del recipiente menos una cantidad nb que representa al volumen ocupado por las moléculas. Si tomamos el cálculo de la sección anterior, $d = 2.5 \times 10^{-10}$ m, y entonces calculamos a b como

$$b = \frac{1}{2} N_A (\frac{4}{3} \pi d^3) = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol} = 2 \times 10^{-3} \text{ L/mol}.$$

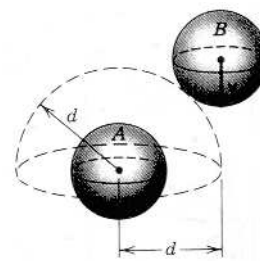


Figura 13 Si se considera que las moléculas de un gas se comportan como esferas sólidas, entonces el centro de la molécula B no puede moverse dentro del hemisferio de radio d centrado en la molécula A. Aquí d es el diámetro de la molécula. El volumen libre disponible para la molécula B se reduce en el volumen de tal hemisferio centrado en cada molécula del gas.

(Interviene el factor de $\frac{1}{2}$ porque, cuando dos moléculas se aproximan entre sí, el volumen dentro del que interactúan no es una esfera completa sino el hemisferio que mira hacia la dirección de acercamiento.) En condiciones normales, 1 mol de un gas tiene un volumen de 22.4 L, y entonces la corrección b es normalmente pequeña (0.01 - 0.1%), pero puede llegar a ser mucho más significativa si estudiamos un gas a alta densidad.

El volumen "libre" disponible para el gas es entonces $V - nb$, y podemos modificar la ecuación de estado de acuerdo con ello:

$$p(V - nb) = nRT. \quad (38)$$

Despejando a p , obtenemos

$$p = \frac{nRT}{V - nb}. \quad (39)$$

La ecuación 39 indica que la presión de un gas real aumenta en relación a la de un gas ideal en las mismas condiciones. En efecto, el volumen reducido disponible para las moléculas significa que efectúan más colisiones con las paredes y por lo tanto aumentan la presión.

Para tomar en cuenta el efecto del alcance de la fuerza entre moléculas, consideremos una región del gas dentro de una distancia d desde una de las paredes del recipiente (Fig. 14). Elegimos d de manera que corresponda al alcance de la fuerza entre moléculas, y centramos nuestra atención en determinada molécula C que esté a punto de chocar con la pared. Cuando choca con la pared, puede emplearse el teorema impulso-ímpetu, $\Delta p = \int F dt$, para relacionar el cambio de ímpetu de la molécula con el impulso de la fuerza neta F que actúa sobre ella durante la colisión. En el modelo del gas ideal, las moléculas ejercen fuerzas una sobre otra únicamente durante las colisiones; entonces, la única fuerza que actúa sobre una molécula al chocar con la pared es ejercida por la pared. Esta fuerza, según la tercera ley de Newton, es igual a la fuerza ejercida sobre la pared por la molécula y entonces es responsable de la presión que el gas ejerce sobre las paredes del recipiente, como ya vimos en la sección 23-3.

Supongamos ahora que la molécula C experimente también fuerzas a causa de la atracción de otras moléculas cercanas (aquellas que se encuentran dentro de un hemisferio de radio d , el alcance de la fuerza). Para una molécula cerca de la pared, la suma de todas las fuerzas intermoleculares da una resultante que actúa alejándose de la pared. (Las moléculas cerca de la super-

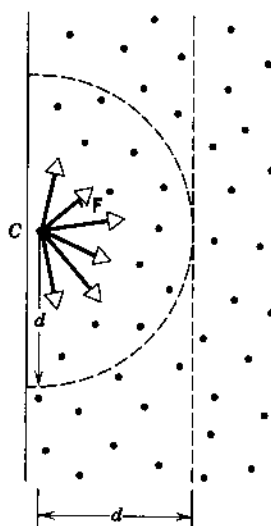


Figura 14 Una molécula de gas C (considerada aquí como un punto) cerca de la pared del recipiente experimenta una fuerza neta que se aleja de la pared debido a la atracción de las moléculas circundantes dentro del alcance d de la fuerza entre las moléculas. La presión neta sobre las paredes del recipiente es reducida por todas estas moléculas dentro de una distancia d medida desde las paredes.

ficie de un líquido experimentan una fuerza similar hacia adentro, la cual es responsable de la tensión superficial; véase la sección 17-6.) Entonces, durante la colisión la componente de la fuerza que actúa alejándose de la pared tiene dos contribuciones: una proveniente de la pared y la otra de las moléculas circundantes. Para un cambio dado en el ímpetu debido a una colisión con la pared, la fuerza ejercida por la pared durante la colisión es por lo tanto más pequeña, la fuerza de reacción ejercida por la molécula es más pequeña, y la presión ejercida por el gas es, de igual manera, más pequeña.

Esta reducción de la presión debida a la colisión de la molécula C con la pared, es proporcional al número de moléculas en el hemisferio de radio d que rodea a la molécula C y por lo tanto al número de moléculas por unidad de volumen del gas, N/V . El efecto neto debido a todas las moléculas iguales a C en la capa superficial de espesor d es proporcional al número de moléculas en esa capa, el cual es también proporcional al número de moléculas por unidad de volumen del gas. La reducción total en presión resultante de la fuerza entre las moléculas es entonces proporcional a $(N/V)^2$.

Esto es, si triplicamos el número de moléculas pero mantenemos constante el volumen del recipiente, nuestro hemisferio imaginario tendrá tres veces tantas moléculas y de aquí que la molécula C sufrirá tres veces la fuerza que la aleja de la pared. En todo el gas habrá tres veces el número de moléculas, cada una de las cuales sufrirá el mismo efecto. El efecto total aumenta por lo tanto nueve veces.

El efecto neto de la fuerza intermolecular introduce una corrección a la presión, proporcional a $(N/V)^2$. En lugar de escribir esta corrección en términos del número de moléculas N , la escribimos en términos del número de moles n , de modo que la presión corregida resulta ser

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2, \quad (40)$$

donde a es una constante de proporcionalidad. La ecuación de estado modificada puede expresarse como:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT. \quad (41)$$

Esta expresión, deducida por vez primera por J. D. van der Waals (1837-1923) se llama *ecuación de estado de van der Waals*. Obsérvese que la ecuación 41 se reduce a la ecuación de estado del gas ideal (Ec. 7) cuando el gas ocupa un volumen grande (esto es, las moléculas están muy separadas entre sí y la densidad del gas es pequeña).

Los valores de las constantes a y b deben determinarse experimentalmente, lo cual hace empírica a la ecuación en este respecto. Al igual que la ecuación de estado del gas ideal, se basa también en un modelo con hipótesis de gran simplificación. No existe ninguna fórmula simple que pueda aplicarse a todos los gases bajo todas las condiciones, y únicamente a través de la experimentación podemos saber si una ecuación es superior a otra en su descripción de la realidad en determinado conjunto de condiciones.

La figura 15 compara las isothermas de un gas ideal con las calculadas para el CO_2 con la ecuación de estado de van der Waals. Obsérvese que la desviación del comportamiento ideal se presenta principalmente a presión alta y temperatura baja. Para el CO_2 a temperaturas por debajo de 304 K, las isothermas comienzan a curvarse hacia abajo, indicando que cuando disminuimos el volumen, la presión disminuye igualmente. Puesto que este comportamiento es contrario a lo que se esperaba para un gas, ello nos sugiere que parte del CO_2 se está condensando en un líquido, dejando menos de él en el estado gaseoso. El modelo de van der Waals sugiere entonces la existencia de mezclas de fases diferentes, lo cual no puede lograr el modelo del gas ideal. Si fuésemos a comprimir una muestra de CO_2 , hallaríamos que la isoterma $T = 264$ K real no se inclinaría hacia abajo como lo predice la ecuación de van der Waals, sino que seguiría el segmento horizontal AB en la figura 15, conforme el gas se condensa en un líquido a presión constante. El modelo de van der Waals proporciona una mejora sobre el modelo del gas ideal, pero ningún modelo sencillo sirve para explicar el comportamiento del gas bajo todas las circunstancias posibles.

Hallamos también que los otros resultados para el gas ideal son sólo aproximadamente correctos al aplicarlos a los gases reales. Por ejemplo, la energía interna de un gas real depende del volumen así como también de la temperatura. Si existen fuerzas de atracción entre las moléculas, entonces la energía potencial interna aumenta al aumentar la distancia promedio entre las moléculas. Por lo tanto, esperamos que la energía interna de un gas aumente ligeramente con el volumen, y esta expectativa es consistente con los experimentos en la mayoría de los gases. Si el estado del gas es tal que las fuerzas repulsivas son más importantes que las fuerzas atractivas, entonces al aumentar la distancia entre las moléculas disminuye la energía potencial. Para ciertos gases (por ejemplo, el hidrógeno y el helio a temperaturas ordinarias) se observa que la energía interna disminuye cuando el volumen aumenta. En cualquier caso, la energía interna no es simplemente una función de la temperatura sino que depende también del volumen.

Problema muestra 8 La isoterma graficada en la figura 15b para el CO_2 a la temperatura $T = 304$ K se llama *isoterma crítica*.

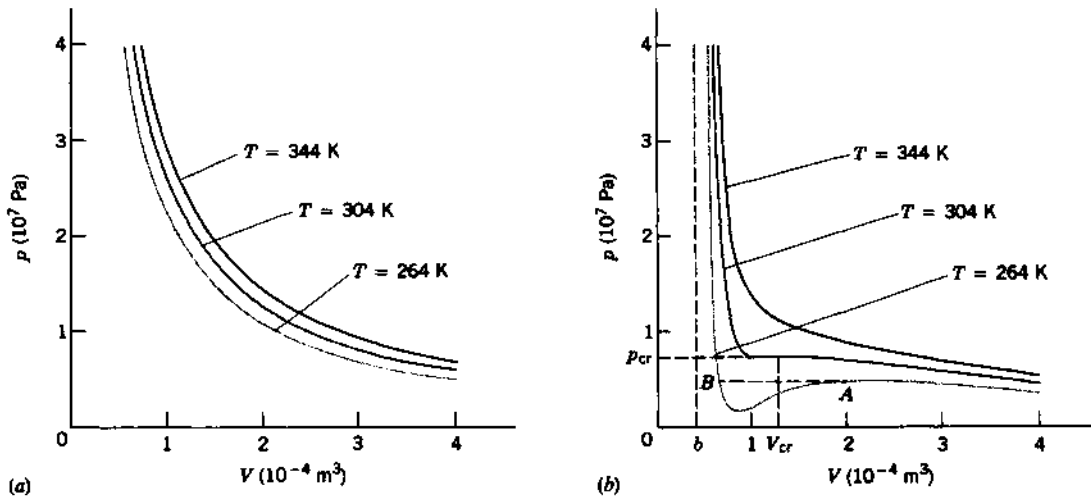


Figura 15 (a) Isotermas para 1 mol de un gas ideal. (b) Isotermas para un mol de CO₂ determinadas por la ecuación de van der Waals. Obsérvese que a gran volumen, las isotermas ideal y de van der Waals se comportan similarmente. Cuando se elevan las temperaturas, las isotermas de van der Waals se comportan más como las del gas ideal. Obsérvese también que, si la presión es muy grande, el volumen tiende al valor de b , como lo requiere la ecuación 40, en lugar de al valor cero, como lo predice la ecuación de estado del gas ideal. La línea interrumpida AB muestra una representación más realista de la isoterma $T = 264$ K. Cuando el gas se comprime a lo largo de esta isoterma, parte del gas se condensa en un líquido, y la presión permanece constante.

Se distingue por tener un mínimo y un punto de inflexión (el punto donde la curva cambia el sentido de su concavidad) que coinciden en el mismo punto. Usando esta información junto con el valor de la presión crítica p_{cr} , calcule los valores de las constantes a y b de van der Waals para el CO₂.

Solución El mínimo de una curva en un diagrama pV se determina por el punto en que la pendiente dp/dV es cero, y en cálculo aprendimos que en un punto de inflexión la segunda derivada es cero. Podemos hallar las derivadas cuando la ecuación de estado de van der Waals se escribe en la forma de la ecuación 40:

$$\frac{dp}{dV} = \frac{-nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3},$$

$$\frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2nRT}{(V-nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4}.$$

Al considerar ambas derivadas suponemos a T constante, como es lo apropiado para una isoterma.

Haciendo a ambas derivadas iguales a cero y resolviendo estas ecuaciones simultáneamente para a y b , hallamos

$$a = \frac{27R^2T_{cr}^2}{64p_{cr}},$$

$$b = \frac{RT_{cr}}{8p_{cr}}.$$

Puesto que $p_{cr} = 0.75 \times 10^7$ Pa por la figura 15b, podemos entonces calcular que

$$a = 0.364 \text{ J} \cdot \text{m}^3/\text{mol}^2 \quad \text{y} \quad b = 4.27 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}.$$

Si bien el modelo de van der Waals da una descripción mucho más realista que el modelo del gas ideal para el comportamiento de un gas real como el CO₂, ello sigue representando únicamente una aproximación del comportamiento real. En el caso del CO₂, por ejemplo, el cálculo anterior da $V_{cr} = 3nb = 1.28 \times 10^{-4}$ m³ para el volumen de 1 mol en el punto crítico. Sin embargo, el valor medido es de 0.96×10^{-4} m³. De cualquier modo, es un primer paso exitoso para mejorar el modelo del gas ideal en los casos en que las moléculas están tan cercanas entre sí, que las hipótesis básicas del modelo del gas ideal no tienen validez e incluso nos sugiere que existe condensación debida a la fuerza entre las moléculas, cosa que el modelo del gas ideal no puede lograr en absoluto. ■

PREGUNTAS

- Al discutir el hecho de que es imposible aplicar las leyes de la mecánica individualmente a los átomos en un sistema macroscópico, Mayer y Mayer afirman: "La complejidad

real del problema (es decir, el hecho de que el número de átomos sea grande) es el secreto de su solución". Explique esta frase.

2. En la teoría cinética supusimos que en un gas existe un número grande de moléculas. Los gases reales se comportan como un gas ideal a densidades bajas. ¿Son contradictorias estas afirmaciones? Si no lo son, ¿qué conclusión puede usted sacar de ellas?
3. Hemos supuesto que las paredes del recipiente son elásticas en las colisiones moleculares. En realidad, las paredes pueden ser inelásticas. ¿Por qué no importa esto, siempre y cuando las paredes estén a la misma temperatura que el gas?
4. En un día húmedo, algunos dicen que el aire está "pesado". ¿Cómo se compara la densidad del aire húmedo con la del aire seco a la misma temperatura y presión?
5. ¿En qué parte de la siguiente secuencia encaja la velocidad media cuadrática de moléculas en aire quieto y temperatura ambiente; 0; 2 m/s (velocidad al caminar); 30 m/s (auto rápido); 500 m/s (avión supersónico); 1.1×10^4 m/s (velocidad de escape de la Tierra); 3×10^8 m/s (velocidad de la luz)?
6. Dos salones de igual tamaño se comunican a través de una puerta abierta. Sin embargo, las temperaturas medias en los dos salones se mantienen en valores diferentes. ¿En cuál de los dos salones hay más aire?
7. Los movimientos moleculares se mantienen sin ninguna fuerza externa, y continúan indefinidamente sin ninguna señal de que disminuya su velocidad. ¿Cuál es la razón de que la fricción no lleve a estas diminutas partículas al reposo, como lo hace en otras partículas en movimiento?
8. ¿Qué justificación existe para despreciar los cambios de la energía potencial gravitatoria de las moléculas en un gas?
9. Hemos supuesto que la fuerza ejercida por las moléculas sobre la pared de un recipiente es estacionaria en el tiempo. ¿Cómo se justifica esto?
10. Se halla que el peso de una bolsa plana y vacía de plástico delgado no cambia cuando se llena de aire. ¿Por qué no?
11. Sabemos que una piedra caerá al suelo si la soltamos. No anteponeamos ningún obstáculo a las moléculas del aire, y sin embargo no caen todas al suelo. ¿Por qué no?
12. Justifique el hecho de que la presión de un gas depende del *cuadrado* de la velocidad de sus partículas explicando la dependencia de la presión de la frecuencia de colisión y de la transferencia de ímpetu de las partículas.
13. ¿Cómo se relaciona la velocidad del sonido con las variables del gas en el modelo de la teoría cinética?
14. Considere una pelota de golf estacionaria y caliente puesta sobre el punto de partida (el *tee*) y una pelota de golf fría justo cuando sale del *tee* después de haber sido golpeada. La energía cinética total del movimiento de las moléculas con relación al *tee* puede ser la misma en los dos casos. Explique cómo. ¿Cuál es la diferencia entre los dos casos?
15. Se reporta que muy lejos de la superficie de la Tierra la temperatura cinética del gas es del orden de 1000 K. Sin embargo, una persona situada en ese entorno se congelaría hasta morir en lugar de evaporarse. Explique.
16. ¿Por qué no se "fuga" la atmósfera de la Tierra? En la parte superior de la atmósfera los átomos se enfilan ocasionalmente hacia afuera con una velocidad superior a la velocidad de escape. ¿No es esto sólo una cuestión de tiempo?
17. Titán, una de las muchas lunas de Saturno, tiene una atmósfera, pero nuestra Luna no la tiene. ¿Cuál es la explicación?
18. ¿Cómo, de ser así, esperaría usted que cambie la composición del aire con la altura?
19. Explique por qué la temperatura disminuye con la altura en la atmósfera inferior.
20. En colisiones inelásticas a gran escala se pierde energía mecánica a causa de la fricción interna, lo que conduce a una elevación de temperatura debido al aumento en la agitación molecular interna. ¿Existe una pérdida de energía mecánica que pasa a ser calor en una colisión inelástica entre moléculas?
21. Al considerar cantidades que deben ser conservadas en una colisión elástica, demuestre que en general las moléculas de un gas no pueden tener las mismas velocidades después de una colisión que las que tenían antes. ¿Es entonces posible que un gas conste de moléculas que tengan todas la misma velocidad?
22. A menudo decimos que vemos salir el vapor del pico de una tetera en la que el agua está hirviendo. Sin embargo, el vapor es, en sí mismo, un gas incoloro. ¿Qué es lo que vemos realmente?
23. ¿Por qué se eleva el humo de una vela encendida, en lugar de caer?
24. ¿Obedecería a la ley del gas ideal un gas cuyas moléculas fuesen verdaderos puntos geométricos?
25. ¿Por qué las moléculas no viajan en líneas perfectamente rectas entre colisiones y qué efecto, fácilmente observable en el laboratorio, tiene por resultado?
26. ¿Por qué debe ser relativamente corto el tiempo permitido para una separación por difusión?
27. Supongamos que queremos obtener ^{238}U en lugar de ^{235}U como producto final de un proceso de difusión. ¿Usaríamos el mismo proceso? Si no, explique cómo tendría que modificarse el proceso de separación.
28. Considerando la mutua difusión de los gases, ¿puede usted trazar una analogía con una multitud empujándose a codazos en medio de muchas "colisiones" en un gran plano inclinado con una pendiente de unos cuantos grados?
29. ¿Puede usted describir un aparato centrífugo para separación de gases? ¿Es una centrifuga mejor que una cámara de difusión para la separación de gases?
30. ¿Cambian la presión y el volumen del aire en una casa cuando la estufa aumenta la temperatura significativamente? De no ser así, ¿se viola la ley del gas ideal?
31. ¿Esperaría usted que las moléculas reales sean simétricamente esféricas? De no ser así, ¿cómo cambiaría la función de la energía potencial de la figura 12a?
32. Explique por qué la temperatura de un gas decrece en una expansión adiabática.
33. Si el aire caliente se eleva, ¿por qué es más frío en la cima de una montaña que cerca del nivel del mar?
34. Comente esta aseveración: "Existen dos maneras de llevar a cabo un proceso adiabático. Una es efectuarlo rápidamente y la otra es efectuarlo dentro de una caja aislada".

35. Un globo de hule sellado contiene un gas muy ligero. El globo se deja ir y se eleva a gran altura en la atmósfera. Describa y explique el comportamiento térmico y mecánico del globo.
36. Si bien los gases reales pueden ser licuados, un gas ideal no puede. Explique.
37. Demuestre que cuando el volumen por mol de un gas aumenta, la ecuación de van der Waals tiende a la ecuación de estado de un gas ideal.
38. Las cantidades *extensivas* tienen valores que dependen de cuál sea la frontera del sistema, mientras que las cantidades *intensivas* son independientes de la elección de la frontera. Es decir, las cantidades extensivas están necesariamente definidas para la totalidad de un sistema, mientras que las cantidades intensivas se aplican uniformemente a cualquier parte pequeña del sistema. De las cantidades siguientes, determine cuáles son extensivas y cuáles son intensivas: presión, volumen, temperatura, densidad, masa, energía interna.

PROBLEMAS

Sección 23-1 Propiedades macroscópicas de un gas y la ley del gas ideal

1. (a) Calcule el volumen ocupado por 1.00 mol de un gas ideal en condiciones estándar, es decir, a la presión de 1.00 atm ($= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$) y temperatura de 0°C ($= 273 \text{ K}$). (b) Demuestre que el número de moléculas por centímetro cúbico (el número Loschmidt) en las condiciones estándar es de 2.68×10^{19} .
2. El mejor vacío que puede obtenerse en el laboratorio corresponde a una presión de unas 10^{-18} atm, o sea 1.01×10^{-13} Pa. ¿Cuántas moléculas hay por centímetro cúbico en ese vacío a 22°C ?
3. Una cantidad de gas ideal a 12.0°C y una presión de 108 kPa ocupa un volumen de 2.47 m^3 . (a) ¿Cuántos moles contiene el gas? (b) Si la presión se eleva ahora a 316 kPa y la temperatura se eleva a 31.0°C , ¿qué volumen ocupará ahora el gas? Suponga que no existan fugas.
4. Oxígeno gaseoso, con un volumen de 1130 cm^3 a 42.0°C y una presión de 101 kPa, se dilata hasta que su volumen es de 1530 cm^3 y su presión de 106 kPa. Halle (a) el número de moles de oxígeno en el sistema y (b) su temperatura final.
5. Un globo meteorológico se infla libremente con helio a una presión de 1.00 atm ($= 76.0 \text{ cm Hg}$) y una temperatura de 22.0°C . El volumen del gas es de 3.47 m^3 . A una elevación de 6.50 km, la presión atmosférica desciende a 36.0 cm Hg y el helio se ha dilatado, sin restricción por parte de la bolsa que lo confina. A esta elevación la temperatura del gas es de -48.0°C . ¿Cuál es ahora el volumen del gas?
6. La variación de la presión en la atmósfera de la Tierra, supuesta a una temperatura uniforme, está dada por $p = p_0 e^{-Mgy/RT}$, en donde M es la masa molar del aire. (Véase la sección 17-3.) Demuestre que $n_V = n_0 e^{-Mgy/RT}$, donde n_V es el número de moléculas por unidad de volumen.
7. Considere una masa dada de gas ideal. Compare las curvas que representan procesos a presión constante, volumen constante, e isotérmico (a temperatura constante) en (a) un diagrama pV , (b) un diagrama pT , y (c) un diagrama VT . (d) ¿Cómo dependen estas curvas de la masa del gas?
8. Calcule la masa de la atmósfera de la Tierra. Exprese su respuesta como una fracción de la masa de la Tierra. Recuerde que la presión atmosférica es igual a 101 kPa.
9. Una llanta de automóvil tiene un volumen de 988 in^3 y contiene aire a una presión manométrica de 24.2 lb/in^2 cuando la temperatura es de -2.60°C . Halle la presión manométrica del aire en la llanta cuando su temperatura se eleve a 25.6°C y su volumen aumente a 1020 in^3 . (Sugerencia: No es necesario convertir de unidades inglesas a unidades SI. ¿Por qué? Úsese $p_{\text{atm}} = 14.7 \text{ lb/in}^2$).
10. (a) Considere 1.00 mol de un gas ideal a 285 K y 1.00 atm de presión. Suponga que las moléculas en su mayor parte están igualmente espaciadas en los centros de cubos idénticos. Usando la constante de Avogadro y tomando el diámetro de una molécula como de $3.00 \times 10^{-8} \text{ cm}$, halle la longitud de una arista de ese cubo y calcule la razón entre esta longitud y el diámetro de una molécula. La longitud de la arista es una estimación de la distancia entre las moléculas del gas. (b) Considere ahora un mol de agua que tenga un volumen de 18 cm^3 . Suponga que las moléculas están espaciadas igualmente en los centros de cubos idénticos y repita el cálculo de (a).
11. Una burbuja de aire de 19.4 cm^3 de volumen está en el fondo de un lago a una profundidad de 41.5 m, donde la temperatura es de 3.80°C . La burbuja se eleva a la superficie, que está a una temperatura de 22.6°C . Considere que la temperatura de la burbuja es la misma que la del agua circundante y halle su volumen justo antes de que alcance la superficie.
12. Un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro de longitud $L = 25.0 \text{ m}$ contiene aire a la presión atmosférica. Se introduce verticalmente en un lago de agua dulce hasta que el agua se eleva a la mitad en el tubo, como se muestra en la figura 16. ¿Cuál es la profundidad h del extremo inferior del tubo? Suponga que la temperatura es la misma en cualquier parte y que no cambia.
13. El recipiente A contiene un gas ideal a una presión de $5.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ y a una temperatura de 300 K. Está conectado por un tubo delgado al recipiente B con cuatro veces el volumen de A; véase la figura 17. B contiene el mismo gas ideal a una presión de $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ y a una temperatura

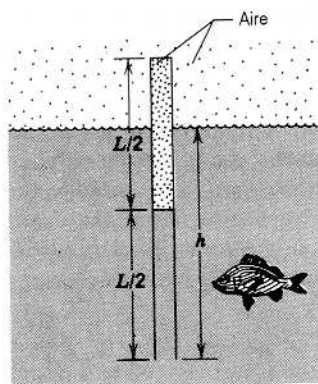


Figura 16 Problema 12.

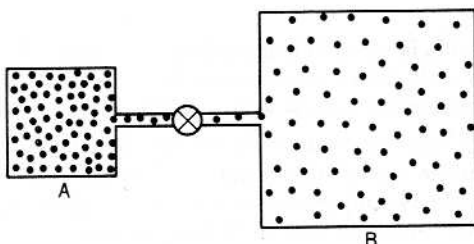


Figura 17 Problema 13.

de 400 K. Se abre la válvula de conexión, y se llega al equilibrio a una presión común mientras que la temperatura de cada recipiente se mantiene constante en su valor inicial. ¿Cuál es la presión final en el sistema?

14. Dos vasijas de volúmenes 1.22 L y 3.18 L contienen gas criptón y están conectadas por un tubo delgado. Inicialmente, las vasijas están a la misma temperatura, 16.0°C, y a la misma presión, 1.44 atm. Luego, se calienta la vasija más grande a 108°C mientras que la más pequeña permanece a 16.0°C. Calcule la presión final. (Sugerencia: No existen fugas.)
15. Considere una muestra de gas argón a 35.0°C y 1.22 atm de presión. Suponga que el radio de un átomo (esférico) de argón sea de 0.710×10^{-10} m. Calcule la fracción del volumen del recipiente ocupado realmente por átomos.
16. Un manómetro lleno de mercurio con dos brazos de longitud desigual de igual área en la sección transversal está sellado con la misma presión p_0 en los dos brazos, como en la figura 18. A temperatura constante, se admiten 10.0 cm^3 adicionales de mercurio por medio de una llave de paso situada en el fondo. El nivel en la izquierda aumenta 6.00 cm y en la derecha aumenta 4.00 cm. Halle la presión p_0 .

Sección 23-3 Cálculo cinético de la presión

17. La temperatura en el espacio interestelar es de 2.7 K. Halle la velocidad media cuadrática de moléculas de hidrógeno a esta temperatura. (Véase la tabla 1.)
18. Calcule la velocidad media cuadrática de moléculas de amoníaco (NH_3) a 56.0°C. Un átomo de nitrógeno tiene

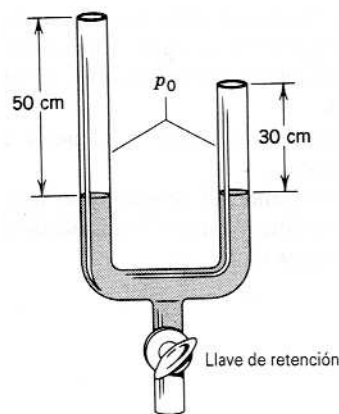


Figura 18 Problema 16.

una masa de 2.33×10^{-26} kg y un átomo de hidrógeno tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg.

19. A 0°C y 1.000 atm de presión las densidades del aire, del oxígeno, y del nitrógeno son, 1.293 kg/m³, 1.429 kg/m³, y 1.250 kg/m³ respectivamente. Calcule la fracción por masa de nitrógeno en el aire a partir de estos datos, suponiendo que únicamente estos dos gases están presentes.
20. La masa de la molécula de H₂ es de 3.3×10^{-24} g. Si 1.6×10^{23} moléculas de hidrógeno por segundo golpean a 2.0 cm^2 de pared a un ángulo de 55° con la normal cuando se mueven con una velocidad de $1.0 \times 10^3 \text{ cm/s}$, ¿qué presión ejercen sobre la pared?
21. A 44.0°C y 1.23×10^{-2} atm la densidad de un gas es de $1.32 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$. (a) Halle v_{rms} para las moléculas del gas. (b) Halle la masa molar del gas e identifíquelo.
22. La ley de Dalton establece que cuando las mezclas de gases que no tienen una interacción química están juntos en un recipiente, la presión ejercida por cada constituyente a una temperatura dada es la misma que la que ejercería si uno solo de ellos llenase todo el depósito, y que la presión total es igual a la suma de las presiones parciales de cada gas. Derive esta ley a partir de la teoría cinética, usando la ecuación 14.
23. Un recipiente encierra dos gases ideales. Hay presentes dos moles del primer gas, con una masa molar de M_1 . Las moléculas del segundo gas tienen una masa molar de $M_2 = 3M_1$, y está presente 0.5 mol de este gas. ¿Qué fracción de la presión total sobre la pared del recipiente es atribuible al segundo gas? (Sugerencia: Véase el problema 22).

Sección 23-4 Interpretación cinética de la temperatura

24. El Sol es una enorme bola de gas ideal caliente. El resplandor que rodea al Sol en la fotografía de rayos-X mostrada en la figura 19 es la corona: la atmósfera del Sol. Su temperatura y presión son de 2.0×10^6 K y 0.030 Pa. Calcule la velocidad rms de los electrones libres en la corona.
25. (a) Calcule el valor promedio en electrovolt de la energía cinética de traslación de las partículas de un gas ideal a



Figura 19 Problema 24.

- 0°C y a 100°C. (b) Halle la energía cinética de traslación por mol de un gas ideal a estas temperaturas, en joules.
26. ¿A qué temperatura es igual a 1.00 eV el promedio de la energía cinética de traslación de una molécula de un gas ideal?
 27. En una caja cúbica de 25 cm de lado está confinado oxígeno gaseoso (O_2) a 15°C y 1.0 atm de presión. Calcule la razón de cambio entre la energía potencial gravitatoria de un mol de moléculas de oxígeno que descienden la altura de la caja, y la energía cinética total de traslación de las moléculas.
 28. El oro tiene una masa molar (atómica) de 197 g/mol. Considere una muestra de 2.56 g de vapor de oro puro. (a) Calcule el número de moles de oro presentes. (b) ¿Cuántos átomos de oro están presentes?
 29. Halle la energía cinética media de traslación de cada molécula de nitrógeno a 1600 K (a) en joules y (b) en electrovolt.
 30. (a) Halle el número de moléculas en 1.00 m³ de aire a 20.0°C y una presión de 1.00 atm. (b) ¿Cuál es la masa de este volumen de aire? Suponga que 75% de las moléculas son nitrógeno (N_2) y 25% son de oxígeno (O_2).
 31. Considere que un gas a una temperatura T que ocupa un volumen V consta de una mezcla de átomos, es decir, N_a átomos de masa m_a , cada uno de ellos con una velocidad rms v_a , y N_b átomos de masa m_b , cada uno de ellos con una velocidad rms v_b . (a) Dé una expresión para la presión total ejercida por el gas. (b) Suponga ahora que $N_a = N_b$, y que los átomos diferentes se combinan a un volumen constante para formar moléculas de masa $m_a + m_b$. Una vez que la temperatura regresa a su valor inicial, ¿cuál sería la razón entre la presión después de la combinación y la presión antes de la combinación?
 32. Un tanque de acero contiene 315 g de amoníaco gaseoso (NH_3) a una presión absoluta de 1.35×10^6 Pa y a una

temperatura de 77.0°C. (a) ¿Cuál es el volumen del tanque? (b) El tanque se verifica más tarde cuando la temperatura ha caído a 22.0°C y la presión absoluta ha caído a 8.68×10^5 Pa. ¿Cuántos gramos de gas se fugaron del tanque?

33. (a) Calcule las temperaturas a las cuales la velocidad rms es igual a la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra para hidrógeno molecular y para oxígeno molecular. (b) Haga lo mismo para la Luna, suponiendo que la aceleración gravitatoria en su superficie sea de 0.16g. (c) La temperatura de las capas superiores de la atmósfera de la Tierra es de unos 1000 K. ¿Cabría que hubiera mucho hidrógeno allí? ¿Y mucho oxígeno?
34. ¿A qué temperatura tienen los átomos del gas helio la misma velocidad rms que las moléculas del gas hidrógeno a 26.0°C?
35. La envoltura y la canastilla de un globo de aire caliente tienen una masa total de 249 kg, y la envoltura tiene una capacidad de 2180 m³. Cuando está totalmente inflado, ¿cuál sería la temperatura del aire confinado para darle al globo una capacidad de ascenso de 272 kg (además de su propia masa)? Supóngase que el aire circundante, a 18.0°C, tiene una densidad de 1.22 kg/m³.

Sección 23-5 Trabajo efectuado sobre un gas ideal

36. Una muestra de gas se dilata de 1.0 a 5.0 m³ mientras que su presión desciende de 15 a 5.0 Pa. ¿Cuánto trabajo es efectuado sobre el gas si su presión cambia con el volumen según cada uno de los tres procesos mostrados en el diagrama pV de la figura 20?

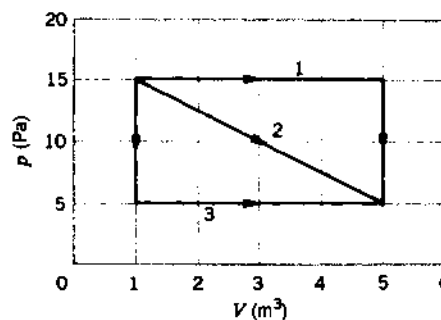


Figura 20 Problema 36.

37. Suponga que una muestra de gas se dilata de 2.0 a 8.0 m³ a lo largo de la trayectoria diagonal del diagrama pV que se muestra en la figura 21. Luego se comprime nuevamente a 2.0 m³ a lo largo de cualquiera de las trayectorias 1 ó 2. Calcule el trabajo neto efectuado sobre el gas para el ciclo completo en cada caso.
38. La velocidad del sonido en gases diferentes a la misma temperatura depende de la masa molar del gas. Demuestre que $v_1/v_2 = \sqrt{M_2/M_1}$ (T constante), en donde v_1 es la velocidad del sonido en el gas de masa molar M_1 y v_2 es la velocidad del sonido en el gas de masa molar M_2 .
39. El aire a 0.00°C y 1.00 atm de presión tiene una densidad de 1.291×10^{-3} g/cm³, y la velocidad del sonido es de

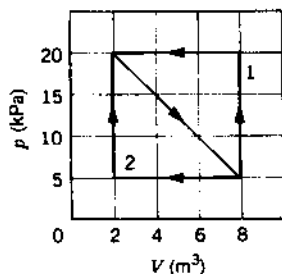


Figura 21 Problema 37.

331 m/s a esa temperatura. Calcule (a) el valor de γ para el aire y (b) la masa molar efectiva del aire.

40. Una cantidad de aire que ocupa 0.142 m^3 a 103 kPa de presión manométrica se dilata isotérmicamente a una presión manométrica cero y luego se enfría a presión constante hasta que alcanza su volumen inicial. Calcule el trabajo efectuado sobre el gas.
41. Calcule el trabajo efectuado por un agente externo al comprimir 1.12 mol de oxígeno de un volumen de 22.4 L y 1.32 atm de presión a 15.3 L a la misma temperatura.
42. Use el resultado del problema muestra 6 para demostrar que la velocidad del sonido en el aire aumenta alrededor de 0.59 m/s por cada grado Celsius de elevación de la temperatura cerca de 20°C .
43. Un gas ocupa un volumen de 4.33 L a una presión de 1.17 atm y una temperatura de 310 K . Se le comprime adiabáticamente a un volumen de 1.06 L . Determine (a) la presión final y (b) la temperatura final, suponiendo que el gas sea un gas ideal para el cual $\gamma = 1.40$. (c) ¿Cuánto trabajo fue efectuado sobre el gas?
44. (a) Un litro de gas con $\gamma = 1.32$ está a 273 K y 1.00 atm de presión. Se le comprime súbitamente (adiabáticamente) hasta la mitad de su volumen original. Halle su presión y temperatura finales. (b) El gas es ahora enfriado de nuevo a 273 K a presión constante. Halle el volumen final. (c) Halle el trabajo total efectuado sobre el gas.
45. El gas en una cámara Wilson a una temperatura de 292 K experimenta una expansión rápida. Suponiendo que el proceso sea adiabático, calcule la temperatura final si $\gamma = 1.40$ y la razón de dilatación del volumen es de 1.28 .
46. Un compresor de aire aspira aire a 18.0°C y 1.00 atm de presión y libera aire comprimido a una presión de 2.30 atm . El compresor opera a 230 W de potencia útil. Suponga que el compresor opera adiabáticamente. (a)

Halle la temperatura del aire comprimido. (b) ¿Cuánto aire comprimido, en litros, se libera en cada segundo?

47. Un tubo delgado, sellado en ambos extremos, tiene 1.00 m de largo. Cuando está horizontal, en el centro contiene 10.0 cm de mercurio y los dos extremos iguales contienen aire a la presión atmosférica normal. Si el tubo es volteado a una posición vertical, ¿en qué cantidad se desplazará el mercurio? Suponga que el proceso es (a) isotérmico y (b) adiabático. (Para el aire, $\gamma = 1.40$). ¿Cuál de las dos suposiciones es la más razonable?

Sección 23-6 La energía interna de un gas ideal

48. Calcule la energía interna de un mol de un gas ideal a 25.0°C .
49. Calcule la energía cinética rotatoria total de todas las moléculas contenidas en un mol de aire a 25.0°C .
50. Una partícula de rayos cósmicos con una energía de 1.34 TeV es detenida en un tubo de detección que contiene 0.120 mol de gas neón. Una vez que esta energía esté distribuida entre todos los átomos, ¿en cuánto habrá aumentado la temperatura del neón?
51. Un gas ideal experimenta una compresión adiabática de $p = 122 \text{ kPa}$, $V = 10.7 \text{ m}^3$, $T = -23.0^\circ\text{C}$ a $p = 1450 \text{ kPa}$, $V = 1.36 \text{ m}^3$. (a) Calcule el valor de γ . (b) Halle la temperatura final. (c) ¿Cuántos moles de gas están presentes? (d) ¿Cuál es la energía cinética de traslación total por mol antes y después de la compresión? (e) Calcule la razón entre las velocidades rms antes y después de la compresión.

Sección 23-8 La ecuación de estado de van der Waals

52. La b de van der Waals para el oxígeno es de $32 \text{ cm}^3/\text{mol}$. Calcule el diámetro de una molécula de O_2 .
53. Usando los valores de a y b para el CO_2 hallados en el problema muestra 8, calcule la presión a 16.0°C de 2.55 mol de gas CO_2 que ocupa un volumen de 14.2 L . Suponga (a) que la ecuación de van der Waals sea correcta y luego (b) que el CO_2 se comporte como un gas ideal.
54. Calcule el trabajo efectuado sobre n moles de un gas van der Waals en una expansión isotérmica de un volumen V_1 a un volumen V_2 .
55. Demuestre que $V_{cr} = 3nb$.
56. Las constantes a y b en la ecuación van der Waals son diferentes para cada sustancia. Sin embargo, demuestre que si consideramos a V_{cr} , p_{cr} , y T_{cr} como las unidades de volumen, presión, y temperatura, la ecuación van der Waals resulta idéntica para todas las sustancias.

CAPÍTULO 25

EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

En el capítulo 22 hemos presentado la noción de sistemas en contacto térmico. Si sus temperaturas son diferentes inicialmente, los sistemas intercambiarán energía hasta que alcancen el equilibrio térmico. En este capítulo estudiamos este flujo de energía entre dos cuerpos, al cual llamamos calor. Describimos aquí también los efectos de transferir calor a un cuerpo, lo cual debe implicar un aumento de temperatura o un cambio de estado, como de sólido a líquido o de líquido a vapor. Por último, relacionamos los conceptos de calor, energía interna, y trabajo por medio de la primera ley de la termodinámica, un enunciado de la conservación de la energía. En esencia, este tema continúa y amplía el programa que comenzamos en los capítulos 7 y 8, donde presentamos por vez primera el concepto de energía.

25-1 EL CALOR: ENERGÍA EN TRÁNSITO

Es una observación común que si situamos un objeto caliente (digamos, una taza de café) o un objeto frío (un vaso de agua helada) en un entorno a la temperatura ambiente ordinaria, el objeto tenderá hacia el equilibrio térmico con su entorno. Esto es, el café se enfría y el agua helada se calienta; la temperatura de cada uno se acerca a la temperatura del entorno.

Parece claro que tales aproximaciones al equilibrio térmico deben implicar cierta clase de intercambio de energía entre el sistema y su entorno.* Definimos al *calor* (símbolo Q) como la energía que se transfiere, como lo que va del café a la habitación o de la habitación al agua helada. De manera general, adoptamos la definición siguiente:

* Este punto de vista no siempre fue defendido por los científicos. En el siglo XVIII se creía que un material fluido, llamado *calórico*, era intercambiado entre los cuerpos a temperaturas diferentes. En el siglo XIX, los experimentos llevados a cabo por Benjamin Thompson (más tarde conocido como el Conde Rumford de Baviera) demostraron concluyentemente que el trabajo mecánico podía producir calor, lo cual dio por resultado la identificación del calor como una forma de energía y condujo al desarrollo de la ley de la conservación de la energía.

El calor es energía que fluye entre un sistema y su entorno en virtud de una diferencia de temperatura entre ellos.

La figura 1 resume este punto de vista. Si la temperatura T_S de un sistema es menor que la temperatura T_E del entorno, fluye calor en el sistema. Elegimos nuestra convención de signos de modo que Q sea positivo en este caso; usted puede concebir esto como un proceso en el que la energía interna del sistema aumenta. A la inversa, cuando $T_S > T_E$, el calor fluye hacia afuera del sistema, y hacemos que Q para el sistema sea negativo.

Ya que el calor es una forma de energía, sus unidades son las de la energía, es decir, el joule (J) en el sistema SI. Antes de que se reconociera que el calor es una forma de energía, se le asignaban otras unidades. En ciertos casos estas unidades están aún en uso hoy día, específicamente la *caloría* (cal) y la *unidad térmica británica* (Btu). Se relacionan con el joule de acuerdo con

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad \text{y} \quad 1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$$

La "caloría" en uso común como una medida de la nutrición (Cal) es en realidad una kilocaloría; esto es,

$$1 \text{ Cal} = 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$$

El Btu se encuentra todavía comúnmente como una medida de la facultad de un acondicionador de aire para transferir energía (como calor) de una sala al ambiente exterior. Por lo tanto, un acondicionador de aire típico en

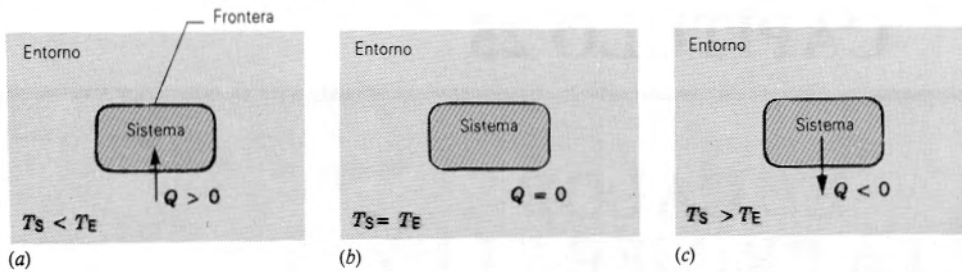


Figura 1 (a) Si la temperatura T_S de un sistema es menor que la temperatura T_E de su entorno, el calor fluye hacia el sistema hasta que se establece el equilibrio térmico, como en (b). (c) Si la temperatura de un sistema es mayor que la de su entorno, el calor fluye hacia afuera del sistema.

una sala especificado a 10,000 Btu/h puede extraer alrededor de 10^7 J de la sala cada hora y transferirlos al ambiente exterior.

Conceptos erróneos con respecto al calor

El calor es similar al trabajo en tanto que representa un medio para la *transferencia* de la energía. Ni el calor ni el trabajo son una propiedad intrínseca de un sistema; esto es, no podemos decir que un sistema “contiene” cierta cantidad de calor o de trabajo. En cambio, decimos que puede transferir una cierta cantidad de energía en forma de calor o de trabajo en ciertas condiciones específicas.

Parte de la confusión con respecto al significado preciso del calor proviene del uso popular del término. A menudo se usa la palabra calor cuando lo que realmente se quiere decir es temperatura o quizás energía interna. Cuando oímos hablar del calor en relación al clima, o cuando ciertas instrucciones de cocina indican “caliéntese a 300 grados”, se hace referencia a la *temperatura*. En cambio, oímos también alusiones al “calor generado” por las balatas de los frenos de un automóvil o por el frotamiento rápido de las palmas de las manos. En este caso, como veremos, es usualmente la *energía interna* a lo que se hace referencia. Una clave para el uso apropiado parte de la definición del calor: cuando frotamos nuestras manos, se lleva a cabo un trabajo entre ellas, aumentando por lo tanto su energía interna y elevándose su temperatura. Este exceso de energía puede entonces ser transferido al entorno como calor, porque las manos están a una temperatura más alta que el entorno.

El equivalente mecánico del calor

En el pasado, cuando la caloría se definía independientemente como una unidad de calor, fue necesario determinar una relación empírica entre la caloría y el joule. Esto lo hizo por vez primera James Joule en 1850, en un experimento para determinar el *equivalente mecánico del*

calor. En la figura 2 se muestra un diagrama del aparato de Joule. Básicamente, el trabajo mecánico W efectuado por las pesas al caer (medido en joules) produce una elevación de temperatura mensurable en el agua. La caloría se definió originalmente como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 a 15.5°C. A partir del aumento de temperatura medido en el agua, Joule fue capaz de deducir el número de calorías de calor Q que producirían la misma elevación de temperatura al ser transferidos desde alguna fuente externa a una cantidad igual de agua a la misma temperatura inicial. El trabajo W efectuado sobre el agua por las pesas al caer (en joules) producía por lo tanto una elevación de la temperatura equivalente a la absorción por el agua de cierto calor Q (en calorías), y a partir de esta equivalencia fue posible determinar la relación entre la caloría y el joule. El resultado del experimento de Joule, y de otros que le siguieron, proporcionó durante casi 100 años una conversión entre el joule y la caloría. Hoy día, después de la adopción en 1948 del joule como la unidad de calor en el SI, expresa-

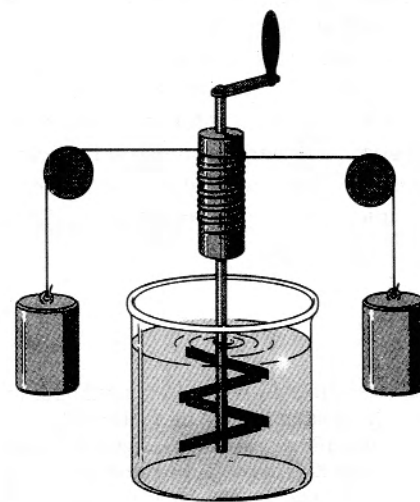


Figura 2 Aparato de Joule para medir el equivalente mecánico del calor. Al caer las pesas hacen girar a las paletas que agitan el agua del recipiente, elevando así su temperatura.

mos todas las cantidades relacionadas con la energía, como el calor y el trabajo, en J, y así este factor de conversión ha perdido la importancia que tuvo en el tiempo de Joule. No obstante, la labor de Joule es todavía notable por la destreza e ingenuidad de sus experimentos, por su precisión (los resultados de Joule difieren en 1% únicamente de la relación definida por el SI entre joule y caloría), y por la directriz que proporcionó para demostrar que el calor, igual que el trabajo, podía verse apropiadamente como un medio para transferir energía.

25-2 CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

Podemos cambiar el estado de un cuerpo intercambiando energía en la forma de calor, o forma de trabajo. Una propiedad de un cuerpo que puede cambiar en tal proceso es su temperatura T . El cambio de temperatura ΔT que corresponde a la transferencia de una cantidad de energía calorífica Q en particular dependerá de las circunstancias bajo las cuales se transfiera el calor. Por ejemplo, en el caso de un gas confinado en un cilindro con un émbolo móvil, podemos añadir calor y mantener fijo al émbolo (por lo tanto manteniendo el volumen constante), o podemos añadir calor y permitir que el émbolo se mueva pero se conserve constante la fuerza sobre el émbolo (por lo tanto manteniendo al gas bajo presión constante). Incluso podemos cambiar la temperatura efectuando un trabajo sobre un sistema, como al frotar entre sí a dos objetos que entre uno y otro ejerzan fuerzas de fricción; en este caso, no es necesario que ocurra una transferencia de calor.

Es conveniente definir la *capacidad calorífica* C' de un cuerpo como la razón entre la cantidad de calor Q suministrada al cuerpo durante cualquier proceso y su cambio de temperatura ΔT correspondiente; esto es,

$$C' = \frac{Q}{\Delta T}. \quad (1)$$

La palabra "capacidad" puede crear confusión porque sugiere la aseveración, esencialmente sin significado, de "la cantidad de calor que puede contener un cuerpo", mientras que lo que se quiere decir es simplemente la energía por cada grado de cambio de temperatura que se transfiere como calor cuando la temperatura del cuerpo cambia.

La capacidad calorífica por unidad de masa de un cuerpo, llamada *capacidad calorífica específica*, o simplemente *calor específico*, como es lo usual, es característica del material de que está compuesto el cuerpo:

$$c = \frac{C'}{m} = \frac{Q}{m \Delta T}. \quad (2)$$

La capacidad calorífica es característica de un objeto en particular, pero el calor específico caracteriza a una sus-

tancia. Entonces podemos hablar, en primer término, de la capacidad calorífica de una moneda de cobre pero, por otra parte, del calor específico del cobre.

Ni la capacidad calorífica de un cuerpo ni el calor específico de un material son constantes; ambos dependen de la temperatura (y posiblemente de otras variables, como la presión). Las ecuaciones anteriores dan únicamente valores promedio de estas cantidades en el intervalo de temperatura ΔT . En el límite, cuando $\Delta T \rightarrow 0$, podemos hablar del calor específico a una temperatura T en particular.

Podemos hallar el calor que debe ser proporcionado a un cuerpo de masa m , cuyo material tenga un calor específico c , para aumentar su temperatura desde la temperatura inicial T_i hasta la temperatura final T_f dividiendo el cambio de temperatura en N pequeños intervalos ΔT_n , suponiendo que c_n sea constante en cada pequeño intervalo, y sumando las contribuciones a la transferencia de calor total de todos los intervalos $n = 1, 2, \dots, N$. Esto da

$$Q = \sum_{n=1}^N mc_n \Delta T_n. \quad (3)$$

En el límite diferencial ésta resulta

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c dT, \quad (4)$$

donde c puede ser una función de la temperatura. A temperaturas ordinarias y dentro de intervalos de temperatura ordinarios, puede considerarse que los calores específicos son constantes. Por ejemplo, el calor específico del agua varía en menos de 1% en el intervalo entre 0°C y 100°C . Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 4 de una manera más general

$$Q = mc(T_f - T_i). \quad (5)$$

La ecuación 2 no define al calor específico en una forma única. Debemos también especificar las condiciones bajo las cuales se añade el calor Q al material. Una condición común es que la muestra permanezca a una presión atmosférica normal (constante) mientras añadimos el calor, pero existen muchas otras posibilidades, cada una de las cuales conduce, por lo general, a un valor de c diferente. Para obtener un valor único de c debemos indicar las condiciones, tales como calor específico a presión constante c_p , calor específico a volumen constante c_v , y así sucesivamente.

La tabla 1 muestra los valores de las capacidades caloríficas específicas de un número de sustancias comunes, medidas en condiciones de presión constante. Si bien, las unidades se expresan en términos de K, podemos también trabajar con temperaturas en $^\circ\text{C}$, porque una *diferencia* de temperatura en $^\circ\text{C}$ es igual a la misma diferencia de temperatura en K.

TABLA 1 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE ALGUNAS SUSTANCIAS*

Sustancia	Capacidad calorífica específica (J/kg · K)	Capacidad calorífica molar (J/mol · K)
Sólidos elementales		
Plomo	129	26.7
Tungsteno	135	24.8
Plata	236	25.5
Cobre	387	24.6
Carbono	502	6.02
Aluminio	900	24.3
Otros sólidos		
Latón	380	
Granito	790	
Vidrio	840	
Hielo (-10° C)	2220	
Líquidos		
Mercurio	139	
Alcohol etílico	2430	
Agua de mar	3900	
Agua	4190	

* Medidas a la temperatura ambiente y la presión atmosférica a menos que se indique otra cosa.

Problema muestra 1 Una muestra de cobre cuya masa m_c es de 75 g se calienta en una estufa de laboratorio a una temperatura T de 312°C. El cobre se deja caer luego en un vaso de precipitados que contiene una masa m_v (= 220 g) de agua. La capacidad calorífica efectiva C'_v del vaso es de 190 J/K. La temperatura inicial T_i del agua y del vaso es de 12.0°C. ¿Cuál es la temperatura final común T_f del cobre, el vaso, y el agua?

Solución Consideremos como nuestro sistema al agua + el vaso + el cobre. Ningún calor entra o sale de este sistema, de modo que la suma algebraica de las transferencias caloríficas internas que ocurren debe ser cero. De aquí que

$$\text{calor que fluye hacia el agua: } Q_a = m_a c_a (T_f - T_i),$$

$$\text{calor que fluye hacia el vaso: } Q_v = C'_v (T_f - T_i),$$

$$\text{calor que fluye hacia el agua: } Q_c = m_c c_c (T_f - T).$$

La diferencia de temperatura es igual, en todos los casos, a la temperatura final menos la temperatura inicial. Vemos por inspección que Q_a y Q_v son positivos (indicando que el calor ha sido transferido hacia el agua y hacia el vaso) y que Q_c es negativo (indicando que el calor ha sido transferido desde el cobre).

Puesto que toda la energía que sale de un objeto en este sistema aislado entra en otro objeto, la conservación de la energía (calor) requiere que

$$\sum Q = 0 \quad (6)$$

o bien

$$Q_a + Q_v + Q_c = 0.$$

Sustituyendo las expresiones de la transferencia de calor de antes, nos da

$$m_a c_a (T_f - T_i) + C'_v (T_f - T_i) + m_c c_c (T_f - T) = 0.$$

Resolviendo para T_f y sustituyendo, tenemos que

$$T_f = \frac{m_a c_a T_i + C'_v T_i + m_c c_c T}{m_a c_a + C'_v + m_c c_c} = \frac{(0.220 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(12^\circ\text{C}) + (190 \text{ J/K})(12^\circ\text{C}) + (0.075 \text{ kg})(386 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(312^\circ\text{C})}{(0.220 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) + 190 \text{ J/K} + (0.075 \text{ kg})(386 \text{ J/kg} \cdot \text{K})} = 19.6^\circ\text{C}.$$

Obsérvese que, a causa de que todas las temperaturas fueron parte de las *diferencias* de temperatura, podemos usar °C en esta expresión. Sin embargo, en la mayoría de las expresiones termodinámicas pueden ser usadas únicamente temperaturas Kelvin.

Partiendo de los datos anteriores puede usted encontrar que

$$Q_a = 7010 \text{ J}, \quad Q_b = 1440 \text{ J}, \quad \text{y} \quad Q_c = -8450 \text{ J}.$$

La suma algebraica de estas tres transferencias de calor es ciertamente cero, como lo requiere la ecuación 6.

Calores de transformación

Cuando entra calor a un sólido o a un líquido, la temperatura de la muestra no se eleva necesariamente. En cambio, la muestra pueda cambiar de una *fase* o *estado* (esto es, sólido, líquido, o gaseoso) a otro. Así pues, el hielo se funde y el agua hierve, absorbiendo calor en cada caso sin un cambio de temperatura. En los procesos inversos (el agua se congela, el vapor se condensa), la muestra libera calor, de nuevo a una temperatura constante.

La cantidad de calor por unidad de masa transferido durante un cambio de fase se llama *calor de transformación*, o *calor latente* (símbolo L) del proceso. El calor total transferido en un cambio de fase es entonces

$$Q = Lm, \quad (7)$$

donde m es la masa de la muestra que cambia de fase. El calor transferido durante la fusión o la congelación se llama *calor de fusión* (símbolo L_f), y el calor transferido durante la ebullición o la condensación se llama *calor de vaporización* (símbolo L_v). La tabla 2 muestra los calores de transformación de algunas sustancias.

El conocimiento de las capacidades caloríficas y de los calores de transformación es importante porque podemos

TABLA 2 ALGUNOS CALORES DE TRANSFORMACIÓN

Sustancia [†]	Punto de fusión (K)	Calor de fusión (kJ/kg)	Punto de ebullición (K)	Calor de vaporización (kJ/kg)
Hidrógeno	14.0	58.6	20.3	452
Oxígeno	54.8	13.8	90.2	213
Mercurio	234	11.3	630	296
Agua	273	333	373	2256
Plomo	601	24.7	2013	858
Plata	1235	105	2485	2336
Cobre	1356	205	2840	4730

[†] Las sustancias están listadas en el orden de sus puntos de fusión crecientes.

medir una transferencia de calor determinando el cambio de temperatura de un material de capacidad calorífica conocida o la cantidad de una sustancia con calor de transformación conocido que se convierte de una fase a otra. Por ejemplo, en sistemas a baja temperatura que involucren helio líquido a 4 K, la razón a la que hierve el gas helio a partir del líquido da una medida de la razón de entrada de calor al sistema.

25-3 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE LOS SÓLIDOS

A partir de la tabla 1 concluimos que los calores específicos de los sólidos varían grandemente de un material a otro. Sin embargo, surge una historia bastante diferente al comparar muestras de materiales que contengan el mismo número de átomos en lugar de muestras que tengan la misma masa. Podemos llevar a cabo esto hallando la *capacidad calorífica molar* de la sustancia, definida en analogía con la ecuación 2 como

$$C = \frac{C'}{n} = \frac{Q}{n \Delta T}, \quad (8)$$

en donde n es el número de moles de la sustancia que tienen capacidad calorífica C' . Así como la capacidad calorífica específica (símbolo c , unidad $\text{J/kg} \cdot \text{K}$) representa la capacidad calorífica por unidad de masa de una sustancia, la capacidad calorífica molar (símbolo C , unidad $\text{J/mol} \cdot \text{K}$) representa la capacidad calorífica por mol.

En 1819 Dulong y Petit encontraron que las capacidades caloríficas molares de sólidos elementales, con pocas excepciones (véase el carbono en la tabla 1), tienen valores cercanos a $25 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$. La capacidad calorífica molar, listada en la última columna de la tabla 1, se halla al multiplicar el calor específico por la masa molar (la masa de 1 mol, el cual contiene 6.02×10^{23} átomos) del elemento. Vemos que la cantidad de calor requerido *por átomo* para elevar la temperatura de un sólido en una cantidad dada parece ser aproximadamente la misma para casi todos los materiales mostrados en la tabla. Ésta es una evidencia notable de la teoría atómica de la materia.

Las capacidades caloríficas molares varían realmente con la temperatura, aproximándose a cero cuando $T \rightarrow 0 \text{ K}$ y al valor de Dulong-Petit cuando T aumenta. La figura 3 muestra la variación para el plomo, el aluminio, y el carbono. Podemos ver que el valor aparentemente anómalo de la tabla 1 para el carbono ocurre porque el carbono no ha alcanzado aún su valor límite a la temperatura ambiente. Puesto que para determinar el calor necesario para aumentar la temperatura de un cuerpo en una cantidad dada parece ser importante el número de átomos más bien que la clase de átomo, ello nos conduce a esperar que las capacidades caloríficas molares de diferentes sus-

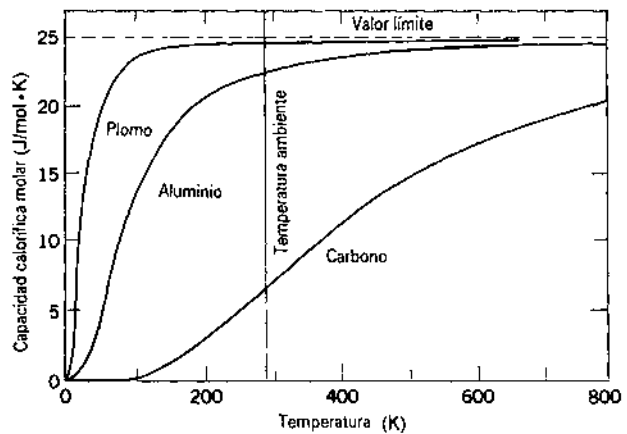


Figura 3 Capacidad calorífica molar de tres elementos en función de la temperatura. A temperaturas elevadas, las capacidades caloríficas de todos los sólidos se aproximan al mismo valor límite. Para el plomo y el aluminio, ese valor se alcanza casi a la temperatura ambiente; no para el carbono.

tancias varíen con la temperatura de manera muy similar. La figura 4 muestra que, realmente, puede hacerse que las capacidades caloríficas molares de varias sustancias caigan en la misma curva por medio de un ajuste empírico, sencillo, de la escala de temperaturas. En la figura 4, la escala horizontal es la razón sin dimensiones T/T_D , donde T es la temperatura Kelvin y T_D es una temperatura característica, llamada *temperatura de Debye*, que tiene un valor constante determinado para cada material. En el plomo, T_D tiene el valor empírico de 88 K y en el carbono, $T_D = 1860 \text{ K}$. Obsérvese que la capacidad calorífica molar llega a un 80% de su valor límite cuando $T = 0.5 T_D$ y alrededor del 90% cuando $T = T_D$. Entonces puede considerarse que T_D es una temperatura característica de la tendencia al límite. Por lo tanto, no es sorprendente que, a la temperatura ambiente, el plomo ($T/T_D = 3.4$) haya alcanzado su valor límite, pero no el carbono ($T/T_D = 0.16$).

Podemos entender las capacidades caloríficas molares de los sólidos usando los resultados de la mecánica estadística hallados en los capítulos 23 y 24. En el límite de alta temperatura, consideramos a los átomos de un sólido con libertad para vibrar en tres direcciones. En la sección 23-6 presentamos el concepto de número de *grados de libertad* de un sistema: en esencia, el número de formas diferentes en que un sistema puede tener energía. Un objeto que vibre en una dimensión tiene dos grados de libertad, el de la energía potencial y el de la energía cinética. Esto es, podemos dar a un oscilador cualquier cantidad de energía potencial que escojamos, y también podemos iniciar su movimiento con cualquier cantidad de energía cinética. El movimiento de cada átomo oscilante en un sólido puede verse como una combinación de las 3 vibraciones unidimensionales, cada una con dos grados

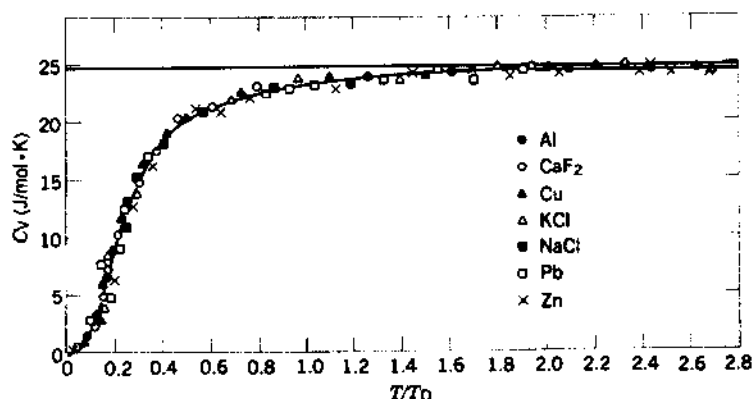


Figura 4 Algunos valores de las capacidades caloríficas molares de varios sólidos. La línea horizontal sólida es el límite de Dulong-Petit, y la curva es el resultado de la teoría de Debye.

de libertad; entonces existen seis grados de libertad por átomo del sólido. De acuerdo con el teorema de equipartición, cada átomo tiene una energía promedio de $\frac{1}{2}kT$ por grado de libertad, de modo que la energía interna por mol es

$$E_{\text{int}} = 6N_A(\frac{1}{2}kT) = 3RT. \quad (9)$$

Si elevamos la temperatura de una muestra de material en ΔT transfiriéndole calor, no efectuándose ningún trabajo en el proceso, el aumento de energía interna por mol será $\Delta E_{\text{int}} = 3R\Delta T$. Igualando este incremento en la energía interna por mol con el calor añadido por mol para lograr el incremento de temperatura, hallamos, usando la ecuación 8,

$$C_v = \frac{Q/n}{\Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{\Delta T} = 3R = 24.9 \text{ J/mol} \cdot \text{K}.$$

Éste es el valor Dulong-Petit "clásico" de la capacidad calorífica molar,* el cual, de acuerdo con la tabla 1 y la figura 4, concuerda excelentemente con los valores observados en la región de alta temperatura. Sin embargo, para $T < T_D$, la teoría clásica falla. En esta región, los efectos de la teoría cuántica resultan importantes, y debemos usar una teoría desarrollada primero por Einstein y más tarde por Debye (1912). De acuerdo con la teoría cuántica (véase la sección 24-6), debemos tener en cuenta la naturaleza cooperativa de las oscilaciones usando una de las

* Los datos graficados en las figuras 3 y 4 son las capacidades caloríficas molares a volumen constante, C_v , mientras que los valores dados en la tabla 1 son C_p , las capacidades caloríficas molares a presión constante. C_p es más fácil de medir, porque la dilatación térmica no necesita tomarse en cuenta, pero C_v es más fácil de calcular. Las dos se relacionan por la fórmula

$$C_p = C_v + T\beta^2 B/\rho,$$

en donde β es el coeficiente térmico de dilatación volumétrica, $B (= -V\Delta p/\Delta V)$ es el módulo volumétrico isotérmico, y ρ es la densidad. A la temperatura ambiente, la diferencia entre C_p y C_v es alrededor del 5%.

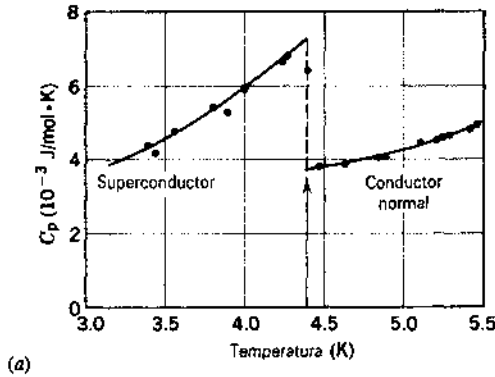
distribuciones estadísticas cuánticas. La curva de línea continua de la figura 4 fue obtenida a partir del cálculo de Debye, y su excelente concordancia con los datos es un triunfo de la física cuántica.[†]

Los datos graficados en la figura 4 varían suavemente y caracterizan a materiales que no cambian su estado en ese intervalo de temperaturas. Esto es, no se funden o cambian de una forma cristalina a otra. A menudo podemos detectar tales cambios al medir el calor específico de una sustancia. La figura 5 muestra los calores específicos del tantalio y del latón. En el caso del tantalio, puede verse que ocurre un cambio súbito a una temperatura de unos 4.4 K. Por debajo de 4.4 K, el tantalio es un superconductor: no ofrece resistencia al flujo de la corriente eléctrica. Tal "anomalía" del calor específico no siempre indica la transición de un conductor normal a un superconductor, sino que indica un cambio de alguna clase en las propiedades del material. En el caso del latón, ocurre un cambio en la estructura cristalina a unos 460°C de una estructura muy ordenada, por debajo de esa temperatura, a una estructura más bien desordenada, por arriba de ella. El cambio de estructura a 460°C está indicado claramente por un cambio súbito en el calor específico del latón (Fig. 5b).

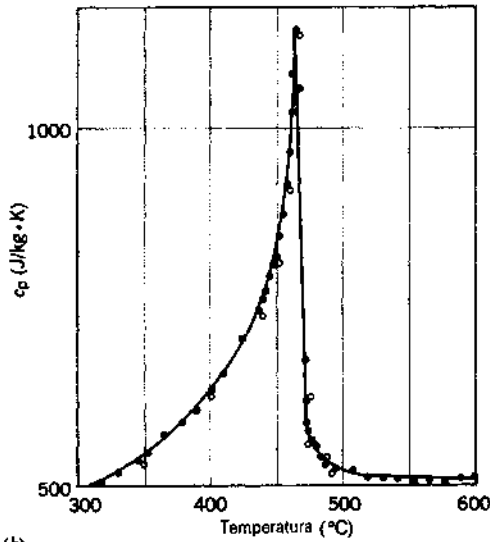
25-4 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE UN GAS IDEAL

Al calcular las capacidades caloríficas de un gas ideal, usamos los resultados de la teoría cinética de un gas ideal discutidos en el capítulo 23. Puede encontrarse útil revisar las secciones 23-5 y 23-6.

[†] Pueden encontrarse detalles del cálculo de Einstein, que es un tanto más sencillo pero menos aplicable que el de Debye, en *Modern Physics*, por Kenneth S. Krane (Wiley, 1983), capítulo 12.



(a)



(b)

Figura 5 (a) El calor específico del tantalio cerca de su temperatura de transición a superconductor. (b) El calor específico del latón.

Capacidad calorífica a volumen constante

Introduzcamos cierta cantidad de energía como calor Q en un gas que esté confinado dentro de un cilindro equipado con un émbolo. El gas puede entonces (1) almacenar la energía en forma de energía cinética al azar de sus moléculas (energía interna), o bien (2) usar la energía para efectuar un trabajo sobre el entorno (tal como elevando una pesa sobre el émbolo). Consideremos primero el caso en que el émbolo esté fijo, de modo que el volumen del gas permanezca constante, y no se efectúe ningún trabajo externo. En este caso toda la energía térmica se convierte en energía interna:

$$Q = \Delta E_{\text{int}}. \quad (10)$$

Sea C_V represente la *capacidad calorífica molar a volumen constante*, de modo que la ecuación 8 da

$$C_V = \frac{Q}{n \Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{n \Delta T}. \quad (11)$$

Partiendo de la ecuación 35 del capítulo 23 para un gas ideal monoatómico, $\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nR \Delta T$, y así

$$C_V = \frac{3}{2} R = 12.5 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (\text{gas monoatómico}). \quad (12)$$

Repitiendo esta derivación mediante las ecuaciones 36 y 37 del capítulo 23 para los gases diatómicos y poliatómicos, hallamos

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (\text{gas diatómico}), \quad (13)$$

$$C_V = 3R = 24.1 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (\text{gas poliatómico}). \quad (14)$$

Capacidad calorífica a presión constante

La figura 6 muestra dos isotermas del gas ideal que difieren en temperatura en ΔT . La trayectoria ab es el proceso a volumen constante considerado previamente. La trayectoria ac es un proceso a presión constante que conecta a las mismas dos isotermas. En la sección 23-6 establecimos que *la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura*. Para todas las trayectorias que conecten las dos isotermas de la figura 6, el cambio en energía interna tiene el mismo valor, porque todas las trayectorias corresponden al mismo cambio de temperatura. En particular, el cambio en la energía interna es el mismo para las trayectorias ab y ac :

$$\Delta E_{\text{int}, ab} = \Delta E_{\text{int}, ac}. \quad (15)$$

Existen dos contribuciones al cambio de la energía interna a lo largo de la trayectoria ac —el calor Q transferido al gas y el trabajo W efectuado sobre el gas:

$$\Delta E_{\text{int}, ac} = Q + W. \quad (16)$$

Obsérvense las convenciones del signo que están implícitas en la ecuación 16. Se considera que el calor transferido *desde* el entorno es positivo y tiende a incrementar la energía interna. Si el volumen disminuye, el trabajo efectuado sobre el gas por el entorno es positivo, lo cual tiende a aumentar la energía interna. Si el volumen aumenta ($W < 0$), el gas efectúa un trabajo sobre el entorno, lo cual tiende a disminuir la energía interna del gas.

Usando la ecuación 8, el calor transferido en un proceso a presión constante puede escribirse así:

$$Q = nC_p \Delta T, \quad (17)$$

donde C_p es la *capacidad calorífica molar a presión constante*. La ecuación 26 del capítulo 23 da el trabajo a lo largo de la trayectoria ac como $W = -p \Delta V$, lo cual puede expresarse para este proceso a presión constante usando la ley del gas ideal como:

$$W = -p \Delta V = -nR \Delta T. \quad (18)$$

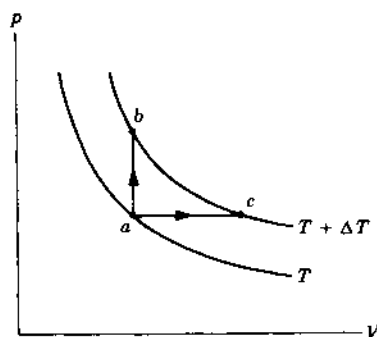


Figura 6 Dos isotermas de gas ideal que difieren en temperatura en ΔT están conectadas por el proceso a volumen constante ab y el proceso a presión constante ac .

Usando la ecuación 11 para obtener el cambio en la energía interna a lo largo de la trayectoria ab , podemos sustituir en la ecuación 16 para hallar

$$nC_V \Delta T = nC_p \Delta T - nR \Delta T$$

o sea

$$C_p = C_V + R. \quad (19)$$

Partiendo de las ecuaciones 12 a 14 podemos entonces hallar las capacidades caloríficas molares a presión constante.

$$C_p = \frac{5}{2}R = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (\text{gas monoatómico}), \quad (20)$$

$$C_p = \frac{7}{2}R = 29.1 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (\text{gas biatómico}), \quad (21)$$

$$C_p = 4R = 33.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (\text{gas poliatómico}). \quad (22)$$

Otro parámetro de interés que puede medirse de manera directa, independientemente de los valores de C_p y de C_V , es la *razón de las capacidades caloríficas molares* γ , definida como

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \quad (23)$$

Ya que la capacidad calorífica específica está relacionada con la capacidad calorífica molar por $c = C/M$, en donde M es la masa molar de la sustancia, podemos también expresar a γ como c_p/c_v . Por esta razón es llamada a menudo la *relación de calores específicos*, o *razón del calor específico*. Usamos γ previamente en la expresión para la velocidad del sonido en un gas (problema muestra 6 del capítulo 23) y en la relación entre la presión y el volumen en un proceso adiabático (ecuación 28 del capítulo 23).

Usando las ecuaciones 20 a 22 para C_p y las ecuaciones 12 a 14 para C_V , obtenemos

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1.67 \quad (\text{gas monoatómico}), \quad (24)$$

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1.40 \quad (\text{gas biatómico}), \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{4}{3} = 1.33 \quad (\text{gas poliatómico}). \quad (26)$$

TABLA 3 CAPACIDADES CALORÍFICAS MOLARES DE LOS GASES

Gas	C_p (J/mol · K)	C_V (J/mol · K)	$C_p - C_V$ (J/mol · K)	γ
Monoatómico				
Ideal	20.8	12.5	8.3	1.67
He	20.8	12.5	8.3	1.66
Ar	20.8	12.5	8.3	1.67
Diatómico				
Ideal	29.1	20.8	8.3	1.40
H ₂	28.8	20.4	8.4	1.41
N ₂	29.1	20.8	8.3	1.40
O ₂	29.4	21.1	8.3	1.40
Poliatómico				
Ideal	33.3	24.9	8.3	1.33
CO ₂	37.0	28.5	8.5	1.30
NH ₃	36.8	27.8	9.0	1.31

La tabla 3 muestra una comparación de los valores observados con las predicciones del modelo del gas ideal. La concordancia es excelente.

Problema muestra 2 Una familia entra en una cabaña de vacaciones de invierno que no ha sido calentada en un tiempo tan largo que la temperatura del interior es la misma que la temperatura del exterior (0°C). La cabina consta de una sola sala de 6 m por 4 m en la planta y una altura de 3 m. La sala contiene un calefactor eléctrico de 2 kW. Suponiendo que la sala sea perfectamente hermética y que todo el calor del calefactor eléctrico sea absorbido por el aire, no escapando nada a través de las paredes o absorbido por el mobiliario, ¿cuánto tiempo después de que el calefactor haya sido encendido alcanzará la temperatura del aire el nivel de comodidad de 21°C (= 70°F)?

Solución Suponemos que el aire en la sala (que en su mayoría es nitrógeno y oxígeno) se comporta como un gas diatómico ideal. El volumen de la sala es

$$V = (6 \text{ m})(4 \text{ m})(3 \text{ m}) = 72 \text{ m}^3 = 72,000 \text{ L}.$$

Puesto que 1 mol de un gas ideal ocupa 22.4 L a 0°C y 1 atm, el número de moles es

$$n = (72,000 \text{ L}) / (22.4 \text{ L/mol}) = 3.2 \times 10^3 \text{ mol}.$$

Si la sala es hermética (véase la explicación más adelante), podemos considerar que la absorción de calor tiene lugar a volumen constante, para lo cual

$$Q = nC_V \Delta T = (3.2 \times 10^3 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(21 \text{ K}) \\ = 1.4 \times 10^6 \text{ J}.$$

El calefactor entrega una potencia P de 2 kW y puede proporcionar esta energía en un tiempo de

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{1.4 \times 10^6 \text{ J}}{2 \times 10^3 \text{ W}} = 700 \text{ s}$$

o unos 12 minutos.

Este problema contiene algunas suposiciones poco físicas con respecto a la absorción del calor en esta sala. Tratemos de

estimar la capacidad calorífica de algunas piezas del mobiliario para ver si fue razonable despreciar su efecto sobre la absorción del calor (y, por lo tanto, sobre el tiempo para que la sala alcance el nivel de comodidad). La pérdida de calor a través de las paredes de la sala, la cual estudiaremos en la sección 25-7, tendrá también un efecto considerable sobre este problema.

¿Es razonable la suposición de que la sala sea hermética? Si el aire de la sala estuviese originalmente a una presión de 1 atm cuando la temperatura era de 0 °C, ¿cuál sería la presión del interior a 21°C? ¿Cuál sería la fuerza resultante hacia afuera sobre el techo y las paredes? Podría ser una suposición más razonable que la sala no sea realmente hermética, sino que escaparía alguna cantidad de aire al elevarse la temperatura, manteniéndose por tanto constante la presión. Véase el problema 30 para un cálculo basado en esta suposición.

Efecto de la teoría cuántica (Opcional)

Los valores mostrados en la tabla 3 son característicos de la temperatura ambiente, y por lo tanto cabe preguntar si la capacidad calorífica molar de un gas muestra algún efecto de temperatura. La figura 7 muestra la capacidad calorífica molar del hidrógeno en función de la temperatura. A bajas temperaturas, $C_v = \frac{3}{2}R$, característico de un gas con grados de libertad de traslación únicamente. Entre unos 200 a 600 K, el hidrógeno tiene $C_v = \frac{5}{2}R$ como lo esperamos para un gas diatómico con dos grados de libertad rotatorios; arriba de unos 2000 K, C_v parece acercarse al valor $\frac{7}{2}R$ que sería característico de dos grados de libertad adicionales asociados con el movimiento vibratorio.

La clave para entender estas características radica en la teoría cuántica. Veamos primero la energía rotatoria. De acuerdo con la ecuación 23 del capítulo 13, el cambio más pequeño posible del ímpetu angular de un sistema rotatorio es $\Delta L = h/2\pi$, donde h es la constante de Planck. La energía cinética rotatoria E_r se relaciona con el ímpetu angular L por medio de $E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$, donde I es la inercia rotatoria de una molécula de H_2 con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la línea que une a los dos átomos de H, dada por

$$I = m \left(\frac{R}{2} \right)^2 + m \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}mR^2,$$

donde m es la masa de un átomo de hidrógeno y R ($= 0.074$ nm) es la separación en equilibrio de los dos átomos. Introduciendo los valores numéricos y calculando la energía cinética rotatoria correspondiente al cambio más pequeño permitido en el ímpetu angular ($h/2\pi$), estimamos

$$E_r = 3.8 \times 10^{-3} \text{ eV}.$$

De acuerdo con el teorema de equipartición, se le adjudica a esta rotación una energía de $\frac{1}{2}kT$, pero este valor de E_r es la mínima energía de rotación. Si T es tan pequeña que $\frac{1}{2}kT < E_r$, no existe (en promedio) suficiente energía térmica disponible para proporcionar la energía cinética rotatoria mínima, y no pueden ocurrir rotaciones. Hallemos este umbral de temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kT &= E_r \\ T &= \frac{2E_r}{k} = \frac{2(3.8 \times 10^{-3} \text{ eV})}{8.6 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 88 \text{ K}. \end{aligned}$$

El valor es enteramente consistente con los datos mostrados en la figura 7: los efectos de rotación no aparecen hasta temperaturas por arriba de unos 88 K.

Ocurre una situación similar para la energía vibratoria. La frecuencia vibratoria puede ser hallada de la "constante del resorte" efectiva, la cual puede calcularse a su vez al tratar a la

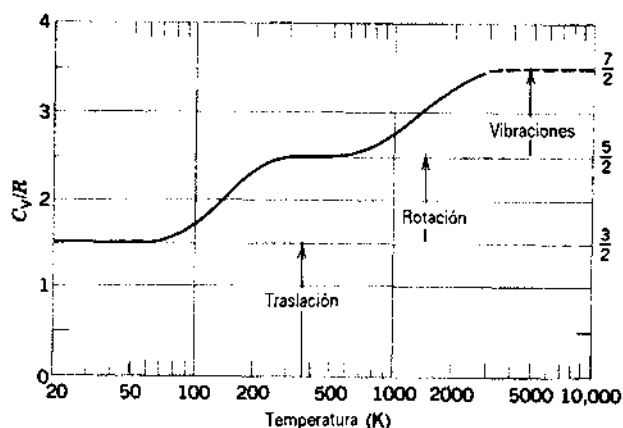


Figura 7 La razón C_v/R para el hidrógeno en función de la temperatura. Debido a que los movimientos rotatorio y vibratorio ocurren a energías cuantizadas, únicamente el movimiento de traslación ocurre a bajas temperaturas. Al aumentar la temperatura, puede excitarse el movimiento rotatorio durante las colisiones. A temperaturas aún más elevadas, puede ocurrir el movimiento vibratorio.

energía potencial de la molécula diatómica como aproximadamente parabólica cerca de su mínimo (véase la Fig. 10 del capítulo 8). Para el H_2 , sucede que la frecuencia es $\nu = 1.3 \times 10^{14}$ Hz, y la energía vibratoria cuantificada E_v (véase la Ec. 38 del capítulo 8) es

$$E_v = h\nu = 0.54 \text{ eV}.$$

El teorema de equipartición permite una energía total de kT para los dos grados de libertad vibratorios, pero la molécula no vibrará a no ser que tenga cuando menos 0.54 eV de energía térmica disponibles. Entonces, el umbral vibratorio está determinado por

$$\begin{aligned} kT &= E_v \\ T &= \frac{E_v}{k} = \frac{0.54 \text{ eV}}{8.6 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 6300 \text{ K}. \end{aligned}$$

Esta burda aproximación es consistente con los datos de la figura 7.

La descripción que hemos ofrecido de la estructura del hidrógeno nos proporciona una visión del comportamiento de las moléculas, pero deberíamos tener presente que contradice a los principios de la teoría cinética clásica que desarrollamos en el capítulo 23. La teoría cinética se basa en la aplicación de la mecánica newtoniana a un gas de partículas, y la equipartición de la energía (Secc. 23-6) se deduce directamente de la mecánica estadística clásica. Sin embargo, si la equipartición de la energía se cumple, entonces la capacidad calorífica molar del hidrógeno sería independiente de la temperatura. La física clásica no permite que un modo de movimiento, como el movimiento vibratorio o rotatorio de H_2 , sea "congelado" por debajo de cierto umbral de temperatura, como tampoco permite que se añada energía a únicamente un modo de movimiento a la vez. La física clásica está entonces en obvio desacuerdo con los resultados experimentales mostrados en la figura 7.

Nuestro estudio de la teoría cinética ha indicado la insuficiencia de la mecánica clásica y sugerido la necesidad de una nueva teoría, la mecánica cuántica. Así como la mecánica newtoniana debe ser reemplazada por la teoría de la relatividad para descri-

bir el movimiento a alta velocidad (cerca de la velocidad de la luz), la mecánica newtoniana debe sustituirse por la mecánica cuántica para describir el comportamiento de los sistemas físicos de pequeñas dimensiones (subatómicos). Por fortuna, la mecánica cuántica se reduce directamente a la mecánica newtoniana en el límite de los objetos de tamaño ordinario, y por lo tanto podemos continuar aplicando la termodinámica clásica con confianza a sistemas en que no sea evidente la estructura subatómica.

Problema muestra 3 La estructura interna del hidrógeno muestra una serie de estados discretos excitados, estando el primero de tales estados a una energía de $E = 10.2 \text{ eV}$ por arriba del estado más bajo (el estado base). ¿A qué temperatura será igual la energía cinética promedio de traslación a la energía del estado excitado?

Solución Querimos que

$$\frac{3}{2}kT = E,$$

o sea

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2(10.2 \text{ eV})}{3(8.6 \times 10^{-5} \text{ eV/K})} = 7.9 \times 10^4 \text{ K}.$$

Basados en este cálculo, vemos por qué la hipótesis básica de la teoría cinética, de que las moléculas pueden ser consideradas como si no tuviesen estructura interna, es verdadera a temperaturas ordinarias. Únicamente cambiará la estructura interna de la molécula a temperaturas lo suficientemente elevadas como para proporcionar a las moléculas una energía cinética promedio de traslación comparable a la diferencia de energía entre el estado base y el estado excitado más bajo, cuando las colisiones resultan inelásticas. Inversamente, puede decirse que la falla de la teoría cinética clásica en los gases a temperaturas elevadas proporciona una evidencia de la estructura interna cuantizada de los átomos.

25-5 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La figura 8 muestra un sistema que consta de dos gases separados por una pared diatérmica en un recipiente que por lo demás está aislado del entorno. El sistema no tiene partes móviles, de modo que no se efectúa ningún trabajo. Supongamos que los gases están originalmente a las temperaturas T_1 y T_2 y que, después de un tiempo suficiente en contacto térmico, el sistema alcanza el equilibrio a alguna temperatura intermedia T . Partiendo de las técnicas ya discutidas en este capítulo, sabemos cómo obtener esta temperatura basados en una hipótesis: la energía perdida como calor por el gas más caliente (Q_1 , una cantidad negativa) es igual en magnitud a la energía ganada como calor por el gas más frío (Q_2 , una cantidad positiva). En efecto, esto no es más que un postulado de la conservación de la energía: $|Q_1| = |Q_2|$. Otra manera de dejar esto asentado es: $Q_1 + Q_2 = 0$; es decir, puesto que no se

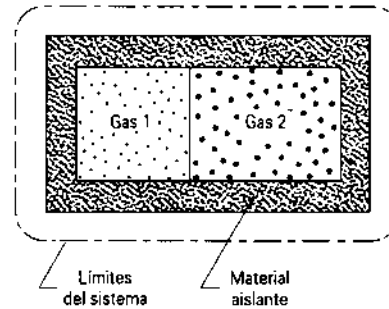


Figura 8 Dos gases separados por una pared diatérmica (que conduce calor) en un recipiente aislado.

transfiere ningún calor entre este sistema combinado y su entorno, la energía total de los dos gases permanece constante.

En lugar de considerar a la combinación como nuestro sistema, elijamos al gas 2, que absorbe el calor Q_2 . Después de que esta energía sea absorbida, no existe otro cambio en el sistema aparte de un aumento de su temperatura de T_2 a T . Para un gas ideal podemos calcular el cambio correspondiente en la energía interna $\Delta E_{\text{int}, 2}$. La única fuente para este cambio en la energía interna es el calor absorbido, y por lo tanto $\Delta E_{\text{int}, 2} = Q_2$, siendo positivas ambas cantidades. Esto es un enunciado de la conservación de la energía aplicado al gas 2. También podemos escribir un enunciado similar de la conservación de la energía aplicado al gas 1: $\Delta E_{\text{int}, 1} = Q_1$, donde ambas cantidades son negativas. Suponiendo que hayamos tenido el cuidado suficiente para hacer que los signos sean correctos, podemos escribir una ecuación general que describa cómo puede aplicarse la conservación de la energía a cualquier gas, en ausencia de un trabajo externo:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q. \quad (27)$$

Consideremos ahora la situación familiar ilustrada en la figura 9. Hagamos que el sistema (incluyendo ahora el peso) esté aislado del entorno, de modo que no entre ni salga calor. Supongamos que la carga sobre el émbolo se aumenta gradualmente, de modo que el émbolo cargado descienda a través de cierta distancia. La gravedad (una fuerza externa ejercida por el entorno) realiza cierta cantidad de trabajo (positivo) W sobre el sistema. (Véase la ecuación 30 del capítulo 23 para una expresión del trabajo efectuado en este proceso adiabático). La temperatura aumenta en este proceso, y por lo tanto el sistema experimenta un cambio positivo en su energía interna. Puesto que no está implicada ninguna transferencia de calor, la energía interna del gas aumenta a causa del trabajo efectuado sobre él, o sea

$$\Delta E_{\text{int}} = W, \quad (28)$$

siendo ambas cantidades positivas en esta ecuación. La ecuación 28 es otra expresión de la conservación de la energía aplicada al sistema.

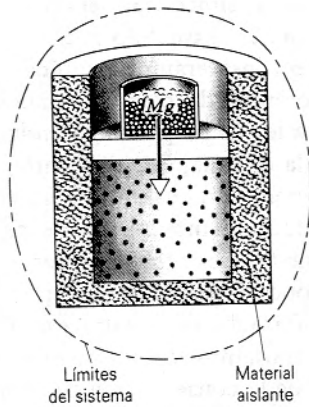


Figura 9 Un gas en un contenedor aislado experimenta un trabajo externo sobre él debido a la gravedad.

Estos dos ejemplos, cambiando en uno de ellos la energía interna debido a la transferencia de calor y el otro debido a causa del trabajo externo, están representados esquemáticamente en la figura 10. Consideramos un sistema termodinámico general, y hemos tenido cuidado en trazar unos límites definidos entre el sistema y su entorno. El sistema arranca en un estado inicial de equilibrio i en la figura 10a, en donde las variables termodinámicas tienen ciertos valores. Luego sujetamos al sistema a una interacción con su entorno, como en la figura 10b, de modo que debe efectuarse un trabajo W y debe ser intercambiado un calor Q . Por último, como en la figura 10c, el sistema está en un estado de equilibrio final f .

Consideremos ahora al sistema del estado i al estado f a lo largo de una variedad de trayectorias diferentes (veamos, por ejemplo, la figura 11 y el problema 38). Sabemos de nuestras reflexiones previas que tanto W como Q dependen de la trayectoria. Guiados por nuestra discusión de la energía interna, evaluemos la cantidad $Q + W$ para cada trayectoria. *Hallamos que, en cada caso, la cantidad $Q + W$ tiene el mismo valor. Si bien Q y W dependen individualmente de la trayectoria seguida, la cantidad $Q + W$ es independiente de la trayectoria, dependiendo únicamente de los estados de equilibrio inicial i y final f del gas.*

Recordaremos de nuestra exposición de las fuerzas conservativas en el capítulo 8 que, cuando el trabajo efectuado sobre un objeto depende únicamente de los estados inicial y final y sea independiente de la trayectoria, podemos definir una función (la energía potencial en el capítulo 8) que depende únicamente de los valores de las coordenadas inicial y final, de modo que el trabajo efectuado al desplazar al objeto es igual a la diferencia entre los valores final e inicial de esta función. En termodinámica tenemos una situación similar en la que la cantidad $Q + W$ depende únicamente de las coordenadas inicial y final y *no depende en absoluto* de la trayectoria seguida entre i y f . Extraemos una conclusión similar: *debe haber una función de las coordenadas termodinámicas, cuyo valor final menos el valor inicial sea igual al valor de $Q + W$ en el proceso.*

Esta función es la *energía interna* del sistema. Ya hemos representado a la energía interna E_{int} de un gas ideal como la suma de la energía de traslación y posiblemente de las energías rotatoria o vibratoria de sus moléculas. Aquí nos estamos refiriendo a una función de la energía interna más general aplicable a *cualquier* sistema termodinámico. En el caso de un gas real, debiéramos incluir (además de las energías cinéticas de traslación y rotatoria) a la energía potencial entre los átomos en una molécula, así como a la energía potencial entre moléculas diferentes. Incluso podemos incluir las excitaciones internas de los electrones de los átomos. Si nuestro sistema termodinámico es un sólido, la energía interna debería incluir la energía de amarré o descarga de los átomos de la malla cristalina.

El cambio en energía interna entre los estados de equilibrio i y f es

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i}. \quad (29)$$

El valor de $E_{\text{int},i}$ depende únicamente de las coordenadas del estado i (quizás de su temperatura, volumen, y presión en el caso de un gas, si bien únicamente de la temperatura para un gas ideal). De manera similar, $E_{\text{int},f}$ depende únicamente de las coordenadas del punto f . Tal función es llamada una *función de estado*: depende sólo del estado del sistema y no depende en absoluto de cómo llegó el sistema a ese estado.

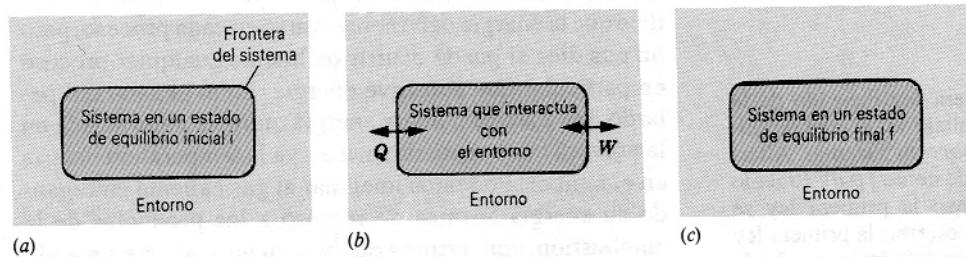


Figura 10 (a) Sistema en un estado inicial de equilibrio con su entorno. (b) Un proceso termodinámico durante el cual el sistema puede intercambiar calor Q o trabajo W con su entorno. (c) Sistema en equilibrio final logrado como resultado del proceso.

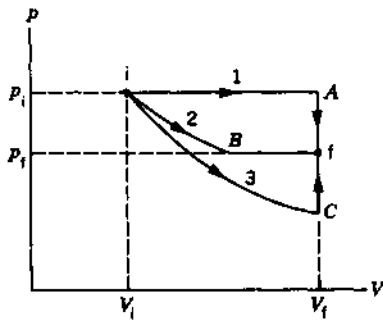


Figura 11 Un sistema en un estado de equilibrio inicial i es llevado a un estado de equilibrio final f a lo largo de tres trayectorias diferentes: (1) un proceso a presión constante hasta A , seguido de un proceso a volumen constante hasta f ; (2) un proceso isotérmico hasta B , seguido por un proceso a presión constante hasta f ; (3) un proceso adiabático hasta C , seguido por un proceso a volumen constante hasta f . El calor Q transferido y el trabajo W efectuado son diferentes para cada trayectoria, pero la suma $Q + W$ tiene el mismo valor para todas las trayectorias entre i y f .

Esto nos lleva a la *primera ley de la termodinámica*, la cual puede enunciarse como sigue:

En cualquier proceso termodinámico entre los estados de equilibrio i y f , la cantidad $Q + W$ tiene el mismo valor para cualquier trayectoria entre i y f . Esta cantidad es igual al cambio en el valor de una función de estado llamada energía interna.

Matemáticamente, la primera ley es*

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W. \quad (30)$$

En la primera ley existen implícitas tres características: (1) la existencia de la energía interna E_{int} (en forma parecida a como la ley cero incluye la existencia de la temperatura); (2) la relación matemática entre E_{int} , Q , y W ; y (3) las convenciones del signo necesarias para aplicar la primera ley ($Q > 0$ cuando *entra* calor al sistema, lo cual tiende a aumentar E_{int} ; $W > 0$ cuando se efectúa un trabajo *sobre* un sistema, lo cual tiende también a aumentar E_{int}).

La ecuación 30 expresa la primera ley en una forma que se relaciona directamente con nuestro resultado general

* La forma en que se escriba la primera ley depende de la convención de signos elegida para el trabajo W , al cual definimos como $-\int p dV$ (trabajo efectuado *sobre* un sistema). Alternativamente, el trabajo puede ser definido como $\int p dV$ (trabajo efectuado *por* el sistema), en cuyo caso la primera ley se escribiría $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$. Hemos elegido escribir la primera ley en esta forma de modo que el trabajo termodinámico tendrá la misma convención de signos que empleamos en el capítulo 7 para el trabajo mecánico; esto es, el trabajo efectuado *sobre* el sistema es positivo.

previo para la conservación de la energía en un sistema de partículas, ecuación 28 del capítulo 8: $\Delta U + \Delta K + E_{\text{int}} = W$. En ese capítulo no consideramos cambios de energía por medio de transferencia de calor, de modo que en un sentido la primera ley es un postulado *más* general de la conservación de la energía. Por otra parte, es al mismo tiempo *menos* general, en cuanto que la termodinámica no trata usualmente con el movimiento del centro de masa, y así $\Delta K = 0$, como tampoco trata con casos en los que la fuerza externa proporcione una energía potencial, de modo que $\Delta U = 0$. Basados en nuestra experiencia con la termodinámica, estaríamos tentados a escribir una ecuación más general de la conservación de la energía, como $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = Q + W$, y es apropiado ver a la primera ley como una expresión de la conservación de la energía válida bajo estas circunstancias especiales.

Si el sistema experimenta sólo un cambio infinitesimal en su estado, únicamente es absorbida una cantidad infinitesimal de calor dQ , y únicamente se efectúa una cantidad infinitesimal de trabajo dW . En tal caso, la primera ley se escribe en la forma diferencial:

$$dE_{\text{int}} = dQ + dW. \quad (31)$$

Debido que Q y W no son funciones del estado de un sistema, no pueden ser tratadas como diferenciales exactas en el sentido matemático; esto es, no existe una función de las coordenadas Q o W cuya diferencial sea dQ o dW . Su significado en la ecuación 31 es el de una cantidad muy pequeña. Sin embargo, dE_{int} es una diferencial exacta, porque E_{int} es una función de las coordenadas del sistema.

La primera ley de la termodinámica es un resultado general que se cree se aplica a todo proceso de la naturaleza que proceda entre estados de equilibrio. No es necesario que cada etapa del proceso sea un estado de equilibrio, únicamente los estados inicial y final. Por ejemplo, podemos aplicar la primera ley a la explosión de un petardo dentro de un tambor de acero aislado. Podemos efectuar el balance de energía antes de la explosión y después de que el sistema haya regresado al equilibrio, y para este cálculo no necesitamos preocuparnos de que la condición intermedia sea turbulenta y de que la presión y la temperatura no estén bien definidas.

A causa de su generalidad, la primera ley es un tanto incompleta como una descripción de la naturaleza. Nos dice que la energía debe conservarse en cada proceso, pero no nos dice si puede ocurrir realmente cualquier proceso en particular que conserve energía. La explosión del petardo, por ejemplo, libera energía química almacenada en la pólvora que eventualmente eleva la temperatura del gas en el tambor. Podemos imaginar al gas caliente entregando su energía térmica de regreso a los productos de la combustión, convertirlos otra vez en pólvora y rearmando el petardo, pero esto nunca se observa. La conservación de la energía se cumple en ambos casos, pero la naturaleza parece seguir una dirección preferida. Para proporcionar

esta distinción, necesitamos la segunda ley de la termodinámica, que será discutida en el capítulo 26.

25-6 APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY

Proceso adiabático

En un proceso adiabático, el sistema está bien aislado de modo que no entra ni sale ningún calor, en cuyo caso $Q = 0$. La primera ley resulta ser, en este caso,

$$\Delta E_{\text{int}} = W \quad (\text{proceso adiabático}). \quad (32)$$

Derivemos la relación entre p y V para un proceso adiabático llevado a cabo en un gas ideal, que empleamos en la sección 23-5. Suponemos que el proceso se va a llevar a cabo lentamente, de modo que la presión esté siempre bien definida. Para un gas ideal, podemos escribir la ecuación 11 como:

$$dE_{\text{int}} = nC_v dT.$$

Entonces,

$$p dV = -dW = -dE_{\text{int}} = -nC_v dT. \quad (33)$$

La ecuación de estado del gas puede ser escrita en forma diferencial como:

$$\begin{aligned} d(pV) &= d(nRT) \\ p dV + V dp &= nR dT. \end{aligned} \quad (34)$$

Pero $p dV$ es precisamente $-dW$, que es igual a $-dE_{\text{int}}$ (puesto que la Ec. 32 puede expresarse en forma diferencial como $dE_{\text{int}} = dW$). Resolviendo la ecuación 34 para obtener $V dp$ y sustituyendo la ecuación 33, tenemos

$$V dp = nC_v dT + nR dT = nC_p dT, \quad (35)$$

donde el último resultado se obtuvo usando la ecuación 19, $C_p = C_v + R$. Podemos ahora considerar la razón entre las ecuaciones 35 y 33, lo cual da

$$\frac{V dp}{p dV} = \frac{nC_p dT}{-nC_v dT} = -\frac{C_p}{C_v} = -\gamma,$$

usando la ecuación 23 para la razón de las capacidades caloríficas molares γ . Reescribiendo, hallamos

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V},$$

la cual podemos integrar entre el estado inicial i y el estado final f

$$\begin{aligned} \int_{p_i}^{p_f} \frac{dp}{p} &= -\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \\ \ln \frac{p_f}{p_i} &= -\gamma \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

lo cual puede expresarse

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma. \quad (36)$$

Puesto que i y f son puntos arbitrarios, podemos escribir esta ecuación como:

$$pV^\gamma = \text{constante}. \quad (37)$$

Las ecuaciones 36 y 37 dan la relación entre la presión y el volumen de un gas ideal que experimente un proceso adiabático. Dados los valores de la presión y del volumen en el punto inicial, el proceso adiabático procederá a través de puntos finales cuya presión y volumen puedan ser calculados a partir de la ecuación 36. De manera equivalente, la ecuación 37 define una familia de curvas en un diagrama pV . Todo proceso adiabático puede estar representado por un segmento de una de estas curvas (Fig. 12).

Podemos reescribir estos resultados en términos de temperatura, usando la ecuación de estado del gas ideal:

$$\begin{aligned} (pV) V^{\gamma-1} &= \text{constante} \\ TV^{\gamma-1} &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (38)$$

La constante en la ecuación 38 no es la misma que la de la ecuación 37. De manera equivalente, podemos escribir la ecuación 38 como:

$$\begin{aligned} T_i V_i^{\gamma-1} &= T_f V_f^{\gamma-1} \\ T_f &= T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (39)$$

A partir de nuestra definición básica del trabajo termodinámico, $W = -\int p dV$, podemos demostrar (véase la Secc. 23-5) que, para un proceso adiabático,

$$W = \frac{1}{\gamma-1} (p_f V_f - p_i V_i). \quad (40)$$

Supongamos que comprimimos un gas en un proceso adiabático (como se ilustró en la Fig. 9). Entonces $V_i > V_f$, y la ecuación 39 requiere entonces que $T_f > T_i$. La temperatura de un gas se eleva al ser comprimido, como observamos frecuentemente del calentamiento de una bomba de bicicleta. Inversamente, la temperatura disminuye cuando un gas se expande, lo cual se usa a menudo como un medio para alcanzar temperaturas bajas en el laboratorio (véase la Fig. 12).

Las ondas sonoras en el aire pueden representarse en términos de procesos adiabáticos. A las frecuencias de audio, el aire es un mal conductor del calor. Existe un aumento de temperatura en las zonas de compresión de una onda sonora, pero debido a la mala conducción no existe un flujo de calor apreciable a los enrarecimientos vecinos más fríos; el proceso es entonces adiabático. Las compresiones y expansiones del vapor en una máquina de vapor, o de los gases calientes en los cilindros de una

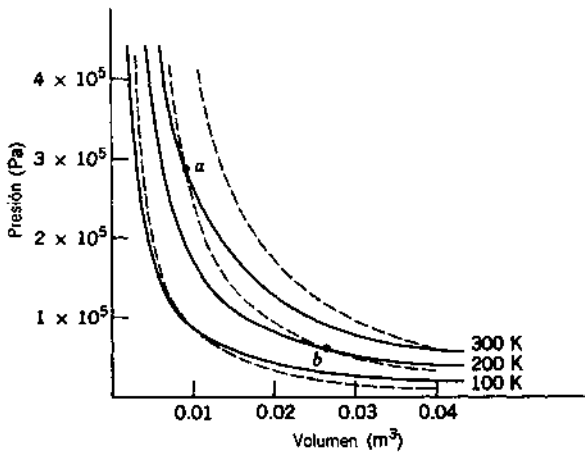


Figura 12 Procesos isotérmicos (líneas continuas) y procesos adiabáticos (líneas de puntos) llevados a cabo en 1 mol de un gas ideal diatómico. Obsérvese que un *aumento* adiabático del volumen (por ejemplo, el segmento *ab*) está siempre acompañado de una *disminución* en la temperatura.

máquina de combustión interna, son también esencialmente adiabáticas, porque el tiempo para que el calor fluya es insuficiente.

Procesos isotérmicos

En un proceso isotérmico, la temperatura permanece constante. Si el sistema es un gas ideal, entonces la energía interna debe, por lo tanto, permanecer constante también. Con $\Delta E_{int} = 0$, la primera ley da

$$Q + W = 0 \text{ (proceso isotérmico; gas ideal).} \quad (41)$$

Si se efectúa sobre el gas una cantidad de trabajo (positivo) W , una cantidad equivalente de calor $Q = -W$ se libera por el gas hacia el entorno. Nada del trabajo efectuado sobre el gas permanece con el gas como energía interna almacenada.

La figura 12 compara los procesos isotérmico y adiabático para 1 mol de un gas monoatómico ideal.

Procesos a volumen constante

Si el volumen de un gas permanece constante, no puede efectuarse un trabajo. Entonces $W = 0$, y la primera ley da

$$\Delta E_{int} = Q \text{ (proceso a volumen constante).} \quad (42)$$

En este caso, todo el calor que entra al gas ($Q > 0$) es almacenado como energía interna ($\Delta E_{int} > 0$).

Procesos cíclicos

En un proceso cíclico, llevamos a cabo una secuencia de operaciones que finalmente llevan al sistema a su estado

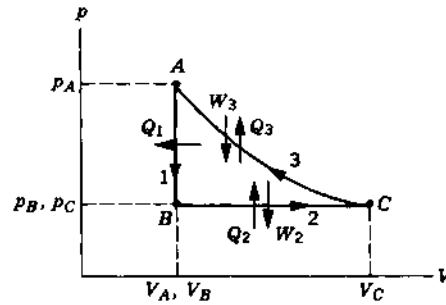


Figura 13 Un gas experimenta un proceso cíclico que comienza en el punto *A* y consiste en (1) un proceso *AB* a volumen constante, (2) un proceso *BC* a presión constante, y (3) un proceso *CA* isotérmico.

inicial, como, por ejemplo, el proceso de tres etapas ilustrado en la figura 13. Debido a que el proceso comienza y termina en el punto *A*, el cambio en la energía interna durante el ciclo es cero. Entonces, de acuerdo con la primera ley,

$$Q + W = 0 \text{ (proceso cíclico),} \quad (43)$$

en donde Q y W representan los totales para el ciclo. En la figura 13, el trabajo total es positivo, porque existe más área positiva bajo la curva que representa a la etapa 3 que área negativa bajo la línea que representa a la etapa 2. Entonces, $W > 0$ y se deduce de la ecuación 43 que $Q < 0$. De hecho, para cualquier ciclo que se efectúe en la dirección antihoraria, debemos tener $W > 0$ (y por ello $Q < 0$), mientras que los ciclos que se efectúen en la dirección horaria tienen $W < 0$ y $Q > 0$.

Expansión libre

La figura 14 representa el proceso conocido como *expansión libre*. El gas está inicialmente sólo en un lado del recipiente, y cuando se abre la llave de paso, el gas se expande hacia la mitad previamente evacuada. No hay pesas que puedan ser elevadas en este proceso, así que no se efectúa ningún trabajo. El recipiente está aislado, de modo que el proceso es adiabático. De aquí que, con $W = 0$ y $Q = 0$, la primera ley da

$$\Delta E_{int} = 0 \text{ (expansión libre)} \quad (44)$$

Entonces, la energía interna de un gas ideal que experimenta una expansión libre permanece constante, y debido a que la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura, su temperatura debe, similarmente, permanecer constante.

La expansión libre es un buen ejemplo de un proceso *que no está en equilibrio*. Si un gas tiene una presión y un volumen (y por lo tanto una temperatura) bien definidos, podemos representar el estado del gas como un punto en

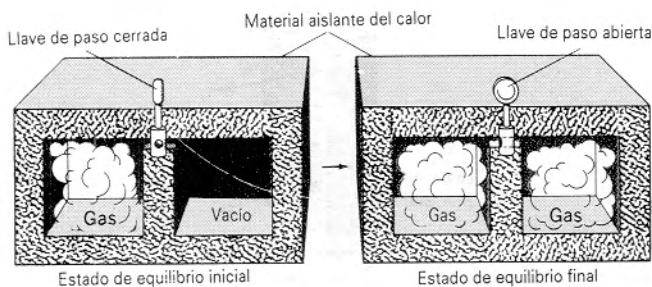


Figura 14 Expansión libre. Al abrir la llave de paso se permite que el gas fluya de un lado del recipiente aislado al otro. No se efectúa ningún trabajo, y no se transfiere ningún calor al entorno.

un diagrama pV . La asignación de una temperatura al gas significa que debe estar en equilibrio térmico; cada punto en un diagrama pV representa, por lo tanto, un sistema en equilibrio. En el caso de una expansión libre, el estado inicial (todo el gas en un lado) es un estado de equilibrio, así como también el estado final; pero en tiempos intermedios, cuando el gas pasa de un lado al otro, la temperatura y la presión no tienen valores únicos, y no podemos trazar este proceso en un diagrama pV . Únicamente los puntos inicial y final aparecen en la gráfica. No obstante, podemos todavía emplear la primera ley para analizar este proceso, porque el cambio en la energía interna depende únicamente de los puntos inicial y final.

La tabla 4 resume los procesos que hemos considerado y sus transferencias de energía.

Problema muestra 4 Convirtamos 1.00 kg de agua líquida a vapor por medio de una ebullición a la presión atmosférica estándar; véase la figura 15. El volumen cambia de un valor inicial de $1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ como líquido a 1.671 m^3 como vapor. Para este proceso, halle (a) el trabajo efectuado sobre el sistema, (b) el calor añadido al sistema, y (c) el cambio en la energía interna del sistema.

Solución (a) El trabajo efectuado sobre el gas durante este proceso a presión constante está dado por la ecuación 26 del capítulo 23:

TABLA 4 APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY

Proceso	Restricción	Primera ley	Otros resultados
Todos	Ninguna	$\Delta E_{\text{int}} = Q + W$	$\Delta E_{\text{int}} = nC_v \Delta T$, $W = -\int p \, dV$
Adiabático	$Q = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = W$	$W = (p_f V_f - p_i V_i) / (\gamma - 1)$
A volumen constante	$W = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = Q$	$Q = nC_v \Delta T$
A presión constante	$\Delta p = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = Q + W$	$W = -p \Delta V$, $Q = nC_p \Delta T$
Isotérmico	$\Delta E_{\text{int}} = 0$	$Q = -W$	$W = -nRT \ln(V_f/V_i)$
Cíclico	$\Delta E_{\text{int}} = 0$	$Q = -W$	
Expansión libre	$Q = W = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = 0$	$\Delta T = 0$

† Las expresiones subrayadas se aplican únicamente a los gases ideales; todas las demás se aplican en general.

$$\begin{aligned} W &= -p(V_f - V_i) \\ &= -(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(1.671 \text{ m}^3 - 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= -1.69 \times 10^5 \text{ J} = -169 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

El trabajo efectuado sobre el sistema es negativo; de manera equivalente, el trabajo positivo es efectuado por el sistema sobre su entorno al levantar al émbolo cargado de la figura 15.

(b) Partiendo de la ecuación 7 tenemos

$$Q = Lm = (2260 \text{ kJ/kg})(1.00 \text{ kg}) = 2260 \text{ kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, como es lo apropiado para un proceso en el que se añade calor al sistema.

(c) Hallamos el cambio en la energía interna a partir de la primera ley:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 2260 \text{ kJ} + (-169 \text{ kJ}) = 2090 \text{ kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, indicando que la energía interna del sistema ha aumentado durante el proceso de ebullición. Esta energía representa el trabajo interno efectuado para vencer la fuerte atracción que las moléculas de H_2O ejercen entre sí en el estado líquido.

Vemos que, cuando el agua hierve, alrededor del 7.5% ($169 \text{ kJ}/2260 \text{ kJ} = 0.075$) del calor añadido se convierte en trabajo externo al empujar a la atmósfera. El resto se convierte en energía interna que se añade al sistema.

Problema muestra 5 El ciclo mostrado en la figura 13 consiste en tres procesos, que comienzan en el punto A: una reducción de presión a volumen constante del punto A al punto B; un aumento de volumen a presión constante del punto B al punto C; una compresión isotérmica (disminución de volumen) desde el punto C regresando al punto A. Hagamos que el ciclo sea llevado a cabo sobre 0.75 mol de un gas diatómico ideal, con $p_A = 3.2 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_A = 0.21 \text{ m}^3$, y $p_B = 1.2 \times 10^5 \text{ Pa}$. Hallar Q , W , y ΔE_{int} para cada uno de los tres procesos y para el ciclo.

Solución El primer paso es hallar los valores de p , V , y T en cada punto. En el punto A, se nos dan p_A y V_A , y podemos resolver para T_A a partir de la ley del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(3.2 \times 10^5 \text{ Pa})(0.21 \text{ m}^3)}{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})} = 108 \text{ K}.$$

En el punto B, se nos dan p_B y $V_B (= V_A)$, y podemos hallar a T similarmente:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{(1.2 \times 10^5 \text{ Pa})(0.21 \text{ m}^3)}{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})} = 40 \text{ K}.$$

En el punto C, sabemos que $p_C (= p_B)$ y que $T_C (= T_A)$, porque el proceso CA es isotérmico). Entonces podemos hallar V_C :

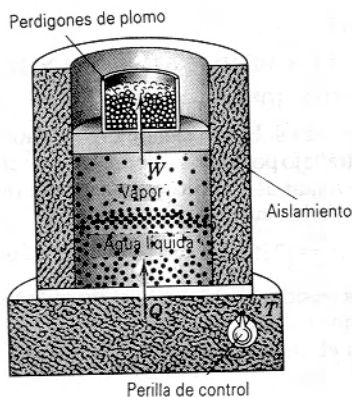


Figura 15 Problema muestra 4. El agua está hirviendo a presión constante. El calor fluye desde el depósito hasta que el agua ha sido cambiada completamente a vapor. Se efectúa un trabajo cuando el gas en expansión levanta al émbolo.

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(108 \text{ K})}{1.2 \times 10^5 \text{ Pa}} = 0.56 \text{ m}^3.$$

Con esta información, podemos ahora calcular la transferencia de calor, el trabajo efectuado, y el cambio en energía interna para cada proceso. Para el proceso 1 (AB), tenemos

$$Q_1 = nC_v(T_B - T_A) = (0.75 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(40 \text{ K} - 108 \text{ K}) = -1060 \text{ J},$$

$$W_1 = 0 \quad (\text{proceso a volumen constante}),$$

$$\Delta E_{\text{int},1} = Q_1 + W_1 = -1060 \text{ J} + 0 = -1060 \text{ J}.$$

El sistema transfiere energía al entorno como calor durante el proceso 1, y su temperatura cae, correspondiendo a un cambio negativo en la energía interna.

Para el proceso a presión constante 2 (BC), obtenemos

$$Q_2 = nC_p(T_C - T_B) = (0.75 \text{ mol})(29.1 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(108 \text{ K} - 40 \text{ K}) = 1480 \text{ J},$$

$$W_2 = -p(V_C - V_B) = -(1.2 \times 10^5 \text{ Pa})(0.56 \text{ m}^3 - 0.21 \text{ m}^3) = -420 \text{ J},$$

$$\Delta E_{\text{int},2} = Q_2 + W_2 = 1480 \text{ J} + (-420 \text{ J}) = 1060 \text{ J}.$$

Se transfiere energía al gas como calor durante el proceso 2 y, al dilatarse, el gas efectúa trabajo sobre su entorno (el entorno efectúa un trabajo negativo sobre el gas).

A lo largo de la isoterma (CA), el trabajo está dado por la ecuación 27 del capítulo 23:

$$W_3 = -nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C} = -(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(108 \text{ K}) \ln \frac{0.21 \text{ m}^3}{0.56 \text{ m}^3} = 660 \text{ J},$$

$$\Delta E_{\text{int},3} = 0 \quad (\text{proceso isotérmico}),$$

$$Q_3 = \Delta E_{\text{int},3} - W_3 = 0 - 660 \text{ J} = -660 \text{ J}.$$

Para el ciclo, tenemos

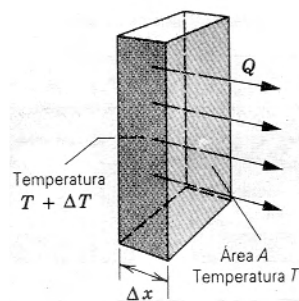


Figura 16 El calor Q fluye a través de una losa rectangular de material de espesor Δx y área A .

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -1060 \text{ J} + 1480 \text{ J} + (-660 \text{ J}) = -240 \text{ J},$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + (-420 \text{ J}) + 660 \text{ J} = 240 \text{ J},$$

$$\Delta E_{\text{int}} = \Delta E_{\text{int},1} + \Delta E_{\text{int},2} + \Delta E_{\text{int},3} = -1060 \text{ J} + 1060 \text{ J} + 0 = 0.$$

Nótese que, como era de esperarse para el ciclo, $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y $Q = -W$. El trabajo total para el ciclo es positivo, como lo esperamos para un ciclo que se efectúa en la dirección antihoraria.

25-7 LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Hemos discutido la transferencia de calor entre un sistema y su entorno, pero no hemos descrito aún cómo tiene lugar la transferencia. Existen tres mecanismos: conducción, convección, y radiación. Explicaremos cada uno de ellos por orden.

Conducción

Si dejamos un atizador metálico en la lumbre durante cualquier periodo de tiempo, su mango se calienta. Se transfiere energía de la lumbre al mango por *conducción* a lo largo de la longitud del mango de metal. En virtud de la alta temperatura en ese extremo, los átomos del extremo caliente están vibrando con una amplitud grande. Estas amplitudes vibratorias grandes pasan a lo largo del mango, de átomo a átomo, debido a las interacciones entre átomos adyacentes. De esta manera recorre una región de temperatura elevada a lo largo del mango hacia nuestra mano.

Consideremos una losa delgada de material homogéneo de espesor Δx y área A en su sección transversal (Fig. 16). La temperatura es $T + \Delta T$ en una cara y T en la otra. Por experimentación, describimos varias características sobre la razón $H = Q/\Delta t$ a la cual será transferida una pequeña cantidad de calor Q a través de la losa en un tiempo Δt . La razón de flujo calorífico a través de la losa es (1) directamente proporcional a A : cuanto mayor sea el área dispo-

TABLA 5 ALGUNAS CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS Y VALORES DE R '

Material	Conductividad (W/m · K)	Valor de R (ft ² · F° · h/Btu)
Metales		
Acero inoxidable	14	0.010
Plomo	35	0.0041
Aluminio	235	0.00061
Cobre	401	0.00036
Plata	428	0.00034
Gases		
Aire (seco)	0.026	5.5
Helio	0.15	0.96
Hidrógeno	0.18	0.80
Materiales de construcción		
Espuma de poliuretano	0.024	5.9
Lana mineral	0.043	3.3
Fibra de vidrio	0.048	3.0
Pino blanco	0.11	1.3
Vidrio de ventanería	1.0	0.14

' Los valores son a la temperatura ambiente. Nótese que los valores de k están dados en unidades SI y los de R en las unidades británicas acostumbradas. Los valores de R son para una losa de 1 in de espesor.

nible, más calor fluirá por unidad de tiempo; (2) inversamente proporcional a Δx : cuanto más gruesa sea la losa, menos calor fluirá por unidad de tiempo; y (3) directamente proporcional a ΔT : cuanto más grande sea la diferencia de temperatura, más calor fluirá por unidad de tiempo. [Estos resultados experimentales proporcionan claves para minimizar la pérdida de calor en su casa durante el invierno: haga que el área de la superficie sea más pequeña (una casa de dos plantas es más eficiente que una casa de una planta con la misma área total); use paredes gruesas llenas de material aislante; y, quizá lo más importante, cámbiese a un clima más templado.]

Matemáticamente, podemos resumir estos resultados experimentales como:

$$H = \frac{Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Introduciendo una constante de proporcionalidad k , llamada *conductividad térmica* (no debe confundirse con la constante de Boltzmann), podemos escribir

$$H = \frac{Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{45}$$

Una sustancia con un valor grande de k es buena conductora del calor; una con un valor pequeño de k es mala conductora, o buena aislante. En el caso de los sólidos, las propiedades de los materiales pueden hacerlos buenos conductores *eléctricos* (por ejemplo, la capacidad de los electrones de moverse con relativa facilidad en todo el volumen del material) así como también buenos conductores *térmicos*. La tabla 5 muestra algunos valores repre-

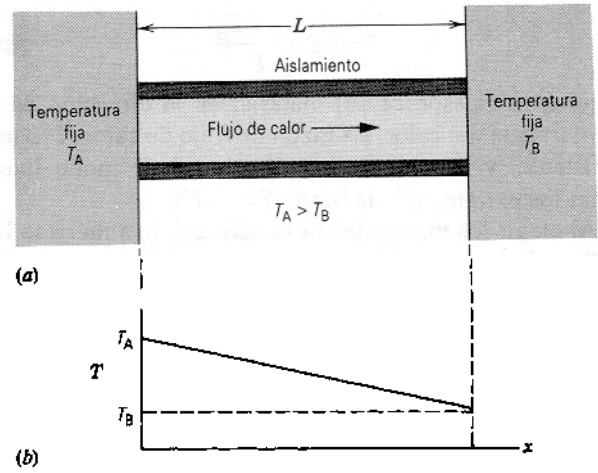


Figura 17 (a) Conducción de calor a través de una barra conductora aislada. (b) Variación de la temperatura a lo largo de la barra.

sentativos de k . Dentro de la gama de temperaturas que encontramos normalmente, podemos considerar a k como una constante, pero en gamas de temperatura más amplias se muestra una ligera variación con T . Nótese que los sólidos, aun aquellos que consideramos comúnmente como aislantes, tienen conductividades más elevadas que los gases.

Consideremos dos límites de aplicabilidad de la ecuación 45. Veamos primero el caso de una barra larga de longitud L y sección transversal uniforme A , donde un extremo se mantiene a la temperatura elevada T_A y el otro extremo a la temperatura baja T_B (Fig. 17). Esto es, los extremos de las barras están sumergidos en depósitos térmicos, de modo que uno puede abastecer una cantidad ilimitada de calor y seguir manteniendo la temperatura T_A , mientras que el otro puede absorber una cantidad ilimitada de calor y aún mantener la temperatura T_B . (Un depósito puede ser de un material de masa mayor que la barra, y por lo tanto tener una capacidad calorífica tan grande que el calor que fluye hacia, o desde la barra es despreciable, o bien que el depósito pueda ser conectado a una máquina de calor como un horno o un refrigerador que pueda abastecer o absorber calor continuamente a costa de trabajo externo. Una mezcla de agua y hielo a 0°C o una mezcla de vapor y agua a 100°C pueden ser consideradas también como un depósito térmico.)

Llamamos a esto una situación de *estado estacionario*: las temperaturas y la cantidad de calor transferido son constantes en el tiempo. En esta situación, todo incremento de calor Q que entre a la barra por el extremo caliente sale de ella por el extremo frío. Puesto de otra manera, mediríamos la misma razón de transferencia de calor a través de cualquier sección transversal a lo largo de la longitud de la barra.

Para este caso, podemos escribir la ecuación 45 así:

$$H = kA \frac{T_A - T_B}{L} \quad (46)$$

Aquí L es el espesor del material en la dirección de la transferencia del calor. La razón de flujo de calor H es una constante, y la temperatura disminuye de modo lineal entre los extremos de la barra (Fig. 17b).

Al elegir los materiales de construcción, a menudo los hallamos caracterizados por la *resistencia térmica* o valor de R , definido por

$$R = \frac{L}{k}. \quad (47)$$

Entonces, cuanto más baja sea la conductividad, mayor será el valor de R : los buenos aislantes tienen valores de R altos. Numéricamente, el valor de R se obtiene de acuerdo con la ecuación 47 expresada en las unidades británicas, $\text{ft}^2 \cdot \text{F}^\circ \cdot \text{h/Btu}$. El valor de R se determina para un cierto espesor del material. Por ejemplo, un espesor de 1 in de fibra de vidrio tiene un $R = 3$ en el sistema británico, mientras que un espesor de 1 in de madera tiene una $R = 1$ en el sistema británico, y por lo tanto, conduce calor a 3 veces la razón de la fibra de vidrio. Una pulgada de aire tiene un $R = 5$ en el sistema británico, pero el aire es un mal aislante térmico porque puede transferir más calor por convección, y la conductividad térmica no es entonces una buena medida del valor aislante del aire. La tabla 5 muestra los valores de R para algunos materiales.

Consideraremos ahora el caso en que la losa tenga un espesor infinitesimal dx y una diferencia de temperatura dT a través de su espesor. En este límite, obtenemos

$$H = -kA \frac{dT}{dx}. \quad (48)$$

A menudo se conoce a la derivada dT/dx como el *gradiente de temperatura*, siendo la palabra "gradiente" un término matemático general para la derivada de una variable escalar con respecto a una coordenada específica. Como una variable, x indica la dirección del flujo de calor y, por lo tanto, introducimos un signo menos en la ecuación 48 como un recordatorio de que el calor fluye en la dirección de dT/dx decreciente.

La ecuación 48 tiene una aplicabilidad particular en los casos en que la sección transversal del material no sea uniforme. Usaremos esta forma diferencial en la solución del problema muestra 7.

Convección

Si se mira a la llama de una vela o de un cerillo, estamos viendo que la energía calorífica es transportada hacia arriba por *convección*. La transferencia de calor por convección ocurre cuando un fluido, tal como el aire o el agua, está en contacto con un objeto cuya temperatura es más alta que la de su entorno. La temperatura del fluido que

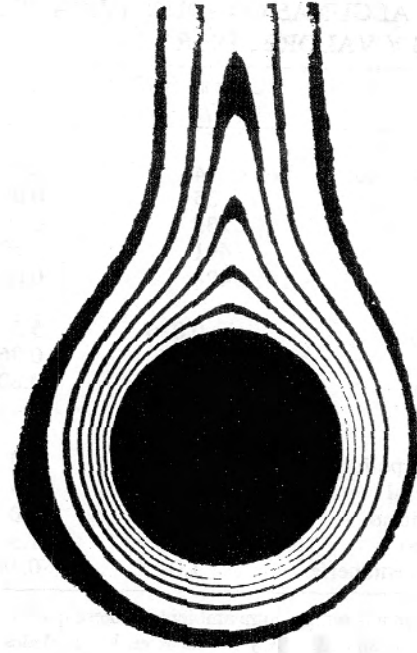


Figura 18 El aire se eleva por convección alrededor de un cilindro calentado. Las áreas oscuras representan regiones de temperatura uniforme.

está en contacto con el objeto caliente aumenta, y (en la mayoría de los casos) el fluido se dilata. Por ser menos denso que el fluido más frío circundante, se eleva a causa de las fuerzas de flotación; véase la figura 18. El fluido más frío circundante cae para tomar el lugar del fluido que se eleva, más caliente, y se establece una circulación por convección.

La convección atmosférica juega un papel fundamental en la determinación de los patrones climáticos globales y en nuestras variaciones diarias del tiempo. Los pilotos de los planeadores y los cóndores buscan por igual las corrientes por termoconvección que los mantienen en vuelo al elevarse desde la Tierra, más caliente. En los océanos tienen lugar enormes transferencias de energía por el mismo proceso. La región exterior del Sol, llamada *fotosfera*, contiene una vasta ordenación de celdas de convección que transportan energía a la superficie solar y dan a la superficie una apariencia granulada.

Hemos estado describiendo la convección *libre* o *natural*. La convección puede también ser forzada, como cuando el soplador de un horno provoca que la circulación del aire caliente las habitaciones de una casa.

Radiación

La energía es transportada desde el Sol hasta nosotros por medio de ondas electromagnéticas que viajan libremente

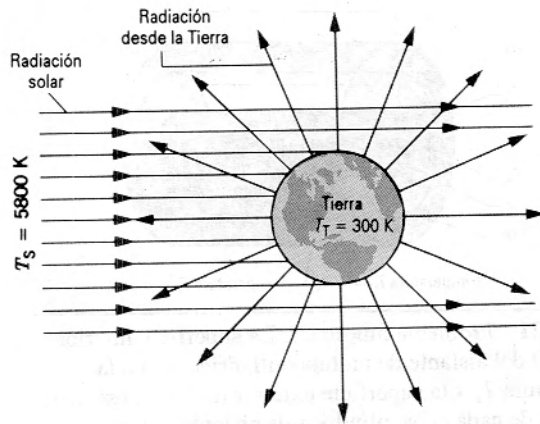


Figura 19 La radiación solar es interceptada por la Tierra y en su mayor parte absorbida. La temperatura T_T de la Tierra se ajusta por sí misma a un valor en el que la pérdida de calor de la Tierra por radiación es precisamente igual al calor solar que absorbe.

a través del casi vacío del espacio intermedio. Si nos paramos cerca de una fogata, nos calentamos mediante el mismo proceso. Todos los objetos emiten esa radiación electromagnética a causa de su temperatura y también absorben parte de la radiación que cae sobre ellos a partir de otros objetos. Cuanto más alta sea la temperatura de un objeto, más irradiará. En el capítulo 49 de la versión ampliada de este texto veremos que la energía irradiada por un objeto es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura. Por ejemplo, la temperatura promedio de nuestra Tierra es de cerca de 300 K, a causa de que a esa temperatura la Tierra irradia energía al espacio a la misma razón que la que recibe del Sol; véase la figura 19.

Problema muestra 6 Consideremos una losa compuesta, que consta de dos materiales con espesores diferentes, L_1 y L_2 , y diferentes conductividades térmicas, k_1 y k_2 . Si las temperaturas de las superficies exteriores son T_2 y T_1 , halle la cantidad del calor transferido a través de la losa compuesta (Fig. 20) en un estado estacionario.

Solución Sea T_x la temperatura en la superficie de contacto entre los dos materiales. Entonces la razón de calor transferido a través de la losa 2 es

$$H_2 = \frac{k_2 A (T_2 - T_x)}{L_2}$$

y la razón a través de la losa 1 es

$$H_1 = \frac{k_1 A (T_x - T_1)}{L_1}$$

En el estado estacionario $H_2 = H_1$, de modo que

$$\frac{k_2 A (T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A (T_x - T_1)}{L_1}$$

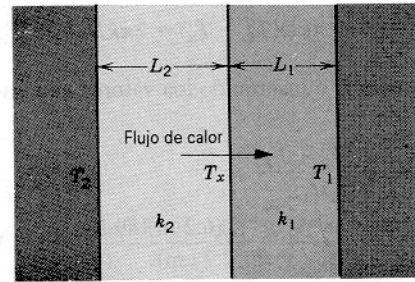


Figura 20 Problema muestra 6. Conducción de calor a través de dos capas de material con conductividades térmicas diferentes.

Hagamos que H sea la razón de transferencia de calor (la misma para todas las secciones). Entonces, resolviendo para T_x y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones para H_1 o para H_2 , obtenemos

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{R_1 + R_2}$$

La extensión a cualquier número de secciones en serie es

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\sum(L_i/k_i)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{\sum R_i} \quad (49)$$

Problema muestra 7 Una tubería metálica cilíndrica delgada transporta vapor a una temperatura de $T_s = 100^\circ\text{C}$. El tubo tiene un diámetro de 5.4 cm y está forrado con un espesor de 5.2 cm de fibra de vidrio aislante. A través de un salón pasa una tubería de longitud $D = 6.2$ m en que la temperatura es $T_n = 11^\circ\text{C}$. (a) ¿Cuánto calor se pierde a través del aislante? (b) ¿Cuánto aislante adicional debe ser añadido para reducir a la mitad la pérdida de calor?

Solución (a) La figura 21 ilustra la geometría apropiada para el cálculo. En el estado estacionario, a través de cada capa cilíndrica delgada, como la que se indica por medio de líneas discontinuas en la figura 21, pasará la misma cantidad constante de flujo de calor H . Podemos considerar a esta capa como una placa de material que tiene un espesor dr y un área de $2\pi rD$. Aplicando la ecuación 48 a esta geometría, tenemos

$$H = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rD) \frac{dT}{dr}$$

o sea

$$H \frac{dr}{r} = -2\pi kD dT$$

Suponemos que la tubería metálica delgada está a la temperatura del vapor, de modo que no interviene en el cálculo. Integramos a partir del radio interior r_1 del aislante a la temperatura T_s al radio exterior r_2 a la temperatura T_n :

$$\int_{r_1}^{r_2} H \frac{dr}{r} = -2\pi kD \int_{T_s}^{T_n} dT$$

Sacando la constante H de la integral de la izquierda y llevando a cabo las integraciones, obtenemos

$$H \ln \frac{r_2}{r_1} = -2\pi kD(T_R - T_S) = 2\pi kD(T_S - T_R).$$

Resolviendo para H e insertando los valores numéricos, hallamos

$$\begin{aligned} H &= \frac{2\pi kD(T_S - T_R)}{\ln(r_2/r_1)} \\ &= \frac{2\pi(0.048 \text{ W/m}\cdot\text{K})(6.2 \text{ m})(89 \text{ K})}{\ln(7.9 \text{ cm}/2.7 \text{ cm})} = 155 \text{ W}. \end{aligned}$$

(b) Para reducir la pérdida de calor a la mitad, debemos aumentar r_2 al valor r_2' , de modo que el denominador de la expresión de arriba para H resulte el doble de grande; esto es,

$$\frac{\ln(r_2'/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} = 2.$$

Resolviendo para r_2' , hallamos

$$r_2' = \frac{r_2^2}{r_1} = \frac{(7.9 \text{ cm})^2}{2.7 \text{ cm}} = 23 \text{ cm}.$$

Entonces, ¡necesitamos casi cuatro veces el espesor del aislante para reducir la transferencia de calor a la mitad! Este efecto es debido al aumento de área, y por lo tanto al aumento de masa, contenidos en cada capa delgada cuando aumentamos el radio en la geometría cilíndrica. Existe más material disponible para conducir calor a los radios exteriores, y por lo tanto debemos

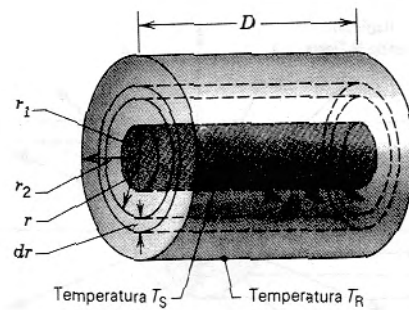


Figura 21 Problema muestra 7. La superficie interior (radio r_1) del aislante de un tubo cilíndrico está a la temperatura T_S y la superficie exterior (radio r_2) está a T_R . A través de cada capa cilíndrica de aislante, tal como la intermedia de espesor dr y radio r que se muestra con líneas de puntos, fluye el mismo calor Q .

suministrar una cantidad creciente de aislante al crecer r . Esto difiere de la geometría lineal, en la cual el calor transferido disminuye linealmente al aumentar el espesor del aislante. En la geometría esférica (que pudiera ser apropiada para calcular el calor perdido a partir del núcleo de la Tierra hacia su superficie), el cálculo es también diferente; véase el problema 61.

PREGUNTAS

1. La temperatura y el calor se confunden a menudo, como cuando decimos "hoy hará frío". A modo de ejemplo, distinga estos dos conceptos tan cuidadosamente como pueda.
2. Dé un ejemplo de un proceso en que no se transfiera ningún calor a o desde el sistema pero la temperatura del sistema cambie.
3. ¿Es el equivalente mecánico del calor un concepto físico o simplemente un factor de conversión para convertir energía de unidades de calor a unidades mecánicas y viceversa?
4. ¿Puede considerarse el calor como una forma de energía almacenada (o potencial)? ¿Contradice tal interpretación al concepto de calor como energía en el proceso de transferencia debida a una diferencia de temperatura?
5. ¿Puede añadirse calor a una sustancia sin causar que la temperatura de la sustancia se eleve? De ser así, ¿contradice esto el concepto de calor como energía en el proceso de transferencia debido a una diferencia de temperatura?
6. ¿Por qué debe suministrarse energía calorífica para fundir hielo si, después de todo, la temperatura no cambia?
7. Explique el hecho de que la presencia de un cuerpo grande de agua cercano, como el mar o el océano, tiende a moderar los extremos de temperatura del clima en la tierra adyacente.
8. Cuando se calienta el hielo se funde, formando un líquido, y luego hierve. Sin embargo, cuando se calienta bióxido de carbono sólido se convierte directamente al estado de vapor (decimos que *se sublima*) sin pasar por el estado líquido. ¿Cómo podría producirse bióxido de carbono líquido?
9. En tiempo de hielo se colocan unas ollas con agua caliente y fría. Explique (a) si las ollas tienen tapa, el agua fría se congelará primero pero (b) si las ollas no tienen tapa, es posible que el agua caliente se congele primero.
10. El aumento de presión siempre favorece la condensación y por lo general favorece la solidificación. Explique estas tendencias del cambio de estado en términos microscópicos.
11. ¿Por qué aumenta con la presión la temperatura de ebullición de un líquido?
12. Un bloque de madera y un bloque de metal están a la misma temperatura. Cuando los bloques se sienten fríos, el metal se siente más frío que la madera; cuando los bloques se sienten calientes, el metal se siente más caliente que la madera. Explique. ¿A qué temperatura se sentirán los bloques igualmente fríos o calientes?
13. ¿Cómo puede usted usar mejor una cucharilla para enfriar una taza de café? Agitándola, lo cual implica efectuar un trabajo, parecería calentar al café en vez de enfriarlo.
14. ¿Por qué, durante el frío las plantas quedan protegidas bajo una capa de nieve? En las temporadas de heladas, los productores de cítricos en Florida rocían a menudo sus frutos con agua, a sabiendas de que se congelará. ¿Por qué ayuda esto?

15. Explique por qué las bajas temperaturas y el fuerte viento causan daños en la piel expuesta a la intemperie.
16. Es más probable que un vaso grueso se raje antes que uno delgado cuando se pone agua caliente en él. ¿Por qué?
17. Usted introduce su mano en el horno caliente para retirar una cacerola y se quema los dedos con ella. Sin embargo, el aire en el horno está a la misma temperatura que la cacerola y usted no se quema los dedos con él. ¿Por qué no?
18. Los obreros de la industria metalúrgica saben que pueden sumergir su mano breves momentos en el metal fundido caliente sin sufrir quemadura. Explique.
19. ¿Por qué debe usarse un aislante más grueso en un ático que o buhardilla que en las paredes de una casa?
20. ¿Está siempre a 0°C el hielo? ¿Puede estar más frío? ¿Puede estar más caliente? ¿Qué sucede si hay una mezcla de agua y hielo?
21. (a) ¿Puede calentarse el hielo a una temperatura por encima de los 0°C sin que se funda? Explique. (b) ¿Puede enfriarse el agua a una temperatura abajo de 0°C sin que se congele? Explique. (Véase "The Undercooling of Liquids", por David Turnbull, *Scientific American*, enero de 1965, pág. 38).
22. Explique por qué los dedos se pegan a una charola metálica de hielos que acaba de sacarse del refrigerador.
23. El agua de una marmita hace un ruido burbujeante notable cuando se la calienta hasta la ebullición. Sin embargo, una vez que comienza a hervir, cesa el ruido. ¿Cuál es la explicación? (Sugerencia: Piense en el destino de una burbuja de vapor que se eleva desde el fondo de la marmita antes de que el agua se caliente uniformemente.)
24. Es difícil "hervir" un huevo en agua en la cima de una montaña muy alta porque el agua hierve allí a una temperatura relativamente baja. ¿Cuál es una manera sencilla y práctica de vencer esta dificultad?
25. ¿Se cocerá un huevo (en 3 minutos normalmente) más rápidamente si el agua está hirviendo con fuerza que si está hirviendo despacio a fuego lento?
26. El agua es un enfriador mucho mejor que la mayoría de los líquidos. ¿Por qué? ¿Habrá ejemplos en que pudiera preferirse otro líquido?
27. Explique por qué cabría esperar que el calor latente de vaporización de una sustancia fuese considerablemente mayor que su calor latente de fusión.
28. Explique por qué el calor específico a presión constante es mayor que el calor específico a volumen constante.
29. ¿Por qué se desprecia a menudo la diferencia entre C_p y C_v en los sólidos?
30. Los gases reales siempre se enfrían al efectuar una expansión libre, mientras que un gas ideal no. Explique.
31. Exponga las similitudes y especialmente las diferencias entre calor, trabajo, y energía interna.
32. Explique el proceso de congelación del agua desde el punto de vista de la primera ley de la termodinámica. Recuerde que el hielo ocupa un volumen más grande que una masa igual de agua.
33. Una botella termo contiene café. El termo es sacudido vigorosamente. Considere al café como el sistema. (a) ¿Se eleva su temperatura? (b) ¿Se le ha añadido calor? (c) ¿Se ha efectuado un trabajo sobre él? (d) ¿Ha cambiado su energía interna?
34. ¿Se conserva la temperatura de un sistema aislado (que no tiene interacción con el entorno)? Explique.
35. ¿Es el calor lo mismo que la energía interna? Si no, dé un ejemplo en el que la energía interna de un sistema cambie sin haber un flujo de calor a través de la frontera del sistema.
36. ¿Puede usted decir si la energía interna de un cuerpo fue adquirida por transferencia de calor o por efectos del trabajo?
37. Si se dan la presión y el volumen de un sistema, ¿queda siempre determinada la temperatura?
38. Teniendo en cuenta que la energía interna de un cuerpo consta de la energía cinética y la energía potencial de sus partículas, ¿cómo distinguiría usted entre la energía interna de un cuerpo y su temperatura?
39. Los gases dentro de dos recipientes idénticos están a 1 atm de presión y a la temperatura ambiente. Uno contiene gas helio (monoatómico, masa molar = 4 g/mol) y el otro contiene un número igual de moles de gas argón (monoatómico, masa molar = 40 g/mol). Si 1 J de calor añadido al gas helio aumenta su temperatura en una cantidad determinada, ¿qué cantidad de calor debe añadirse al gas argón para aumentar su temperatura en la misma cantidad?
40. Explique cómo podríamos mantener un gas a temperatura constante durante un proceso termodinámico.
41. ¿Por qué es más común excitar una radiación a partir de átomos gaseosos por medio del uso de una descarga eléctrica que por medio de métodos térmicos?
42. Hemos visto que la "conservación de la energía" es una ley universal de la naturaleza. Al mismo tiempo, los líderes en las naciones nos instan a cada uno de nosotros a "conservar la energía" (por ejemplo, conduciendo más despacio). Explique los dos significados bastante diferentes de esa recomendación.
43. En un día invernal la temperatura de la superficie interior de una pared es mucho más baja que la temperatura de la habitación y la de la superficie exterior es mucho más alta que la temperatura ambiente exterior. Explique.
44. Los mecanismos fisiológicos que mantienen la temperatura interna de una persona actúan dentro de un intervalo limitado de temperatura externa. Explique cómo puede extenderse este intervalo en ambos extremos con el uso de la ropa. (Véase "Heat, Cold, and Clothing", por James B. Kelley, *Scientific American*, febrero de 1956, pág. 109.)
45. ¿Qué requisitos, a su juicio, debería llenar un material para uso como utensilio de cocina para una buena conductividad térmica, determinada capacidad calorífica, y coeficiente de dilatación?
46. Tanto la conducción del calor como la propagación de las ondas implican la transferencia de energía. ¿Existe alguna diferencia en principio entre estos dos fenómenos?
47. ¿Puede transferirse por radiación la energía calorífica a través de la materia? De ser así, dé un ejemplo. Si no es así, explique por qué.

48. ¿Por qué los utensilios de cocina de acero inoxidable suelen tener una capa de cobre o de aluminio en el fondo?
49. Considere que el calor puede ser transferido por convección y radiación, así como por conducción, y explique

por qué una botella de termo tiene pared doble, y ésta está al vacío y es plateada.

50. Un lago se congela primero en su superficie. ¿Participa la convección en este fenómeno? ¿Qué sucede con la conducción y la radiación?

PROBLEMAS

Sección 25-2 Capacidad calorífica y calor específico

- En cierta casa con energía solar, se almacena energía del sol en barriles llenos con agua. En un lapso de cinco días nublados de invierno, se necesitaron 5.22 GJ para mantener el interior de la casa a 22.0°C. Suponiendo que el agua de los barriles estuviera a 50.0°C, ¿qué volumen de agua se necesitó?
- Los icebergs del norte del Atlántico presentan peligros a la navegación (véase la Fig. 22), provocando que la longitud de las rutas de navegación aumente en casi un 30% durante la estación de icebergs. Entre los intentos para destruirlos se cuentan la utilización de explosivos, el bombardeo, el torpedeo, la desintegración, el uso de arietes, y la pintura con negro de humo. Suponga que se intenta la fusión directa del iceberg colocando fuentes de calor en el hielo. ¿Cuánto calor se requeriría para fundir el 10% de un iceberg de 210,000 toneladas métricas? (Una tonelada métrica = 1000 kg.)

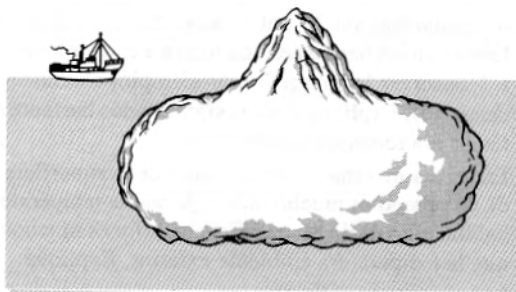


Figura 22 Problema 2.

- ¿Cuánta agua permanece sin congelar después de haber extraído 50.4 kJ de calor de 258 g de agua líquida inicialmente a 0°C?
- Un objeto de 6.50 kg de masa cae desde una altura de 50.0 m y, por medio de una transmisión mecánica, hace girar a una rueda de paletas que agita 520 g de agua. El agua está inicialmente a 15°C. ¿Cuál es la máxima elevación posible de la temperatura?
- (a) Calcule el aumento posible de la temperatura del agua que pasa por las Cataratas del Niágara, de 49.4 m de altura. (b) ¿Qué factores tenderían a impedir esta posible elevación?

- Un pequeño calentador eléctrico por inmersión se utiliza para hervir 136 g de agua para una taza de café instantáneo. El calentador es de 220 watts. Calcule el tiempo necesario para llevar esta agua de 23.5°C al punto de ebullición, despreciando cualquier pérdida de calor.
- Un tazón de 146 g de cobre contiene 223 g de agua; tanto el tazón como el agua están a 21.0°C. Se deja caer en el agua un cilindro de cobre muy caliente de 314 g. Esto hace que el agua hierva, convirtiéndose 4.70 g en vapor, y la temperatura final de todo el sistema es de 100°C. (a) ¿Cuánto calor se transfirió al agua? (b) ¿Cuánto al tazón? (c) ¿Cuál era la temperatura original del cilindro?
- Un atleta necesita perder peso y decide hacerlo levantando pesas. (a) ¿Cuántas veces debe levantar una pesa de 80.0 kg a una altura de 1.30 m para quemar 1 lb de grasa, suponiendo que se requieren 3500 Cal para hacerlo? (b) Si la pesa se levanta una vez cada 4 s, ¿cuánto tiempo le tomará?
- Calcule la cantidad mínima de calor necesario para fundir completamente 130 g de plata inicialmente a 16.0°C. Suponga que el calor específico no cambia con la temperatura. Véanse las tablas 1 y 2.
- Un termómetro de 0.055 kg de masa y 46.1 J/K de capacidad calorífica indica 15.0°C. Luego se le sumerge completamente en 0.300 kg de agua y llega a la misma temperatura final del agua. Si el termómetro indica 44.4°C, ¿cuál era la temperatura del agua antes de la inmersión del termómetro, despreciando otras pérdidas de calor?
- Un jefe de cocina quien, una mañana se encuentra que la estufa no funciona, decide hervir agua para café sacudiéndola en un termo. Suponga que el "chef" usa 560 cm³ de agua de la llave a 59°F, y que el agua cae 35 cm en cada sacudida, ejecutando el "chef" 30 sacudidas por minuto. Despreciando cualquier pérdida de energía. ¿Durante cuánto tiempo estará sacudiendo el frasco antes de que hierva el agua?
- En un calentador solar de agua, los colectores del tejado, dentro de cuyos tubos circula el agua, captan energía del sol. La radiación solar entra al colector a través de una cubierta transparente y calienta el agua en los tubos; esta agua es bombeada a un tanque de depósito. Suponiendo que la eficiencia de todo el sistema sea de 20% (es decir, se pierde el 80% de la energía solar incidente en el sistema), ¿qué área del colector es necesaria para sacar agua de un tanque de 200 L y elevar su temperatura de 20 a 40°C

en 1.0 h? La intensidad de la luz solar incidente es de 700 W/m^2 .

13. Una marmita eléctrica de aluminio tiene una masa de 0.560 kg y contiene un elemento calefactor de 2.40 kW . Se llena con 0.640 l de agua a 12.0°C . ¿Cuánto tiempo se necesitará (a) para que comience la ebullición y (b) para que la marmita se quede seca? (Suponga que la temperatura de la marmita no sobrepasa los 100°C en ningún momento.)
14. Para medir el calor específico de un líquido se emplea un calorímetro de flujo. Se añade calor en una cantidad conocida a una corriente del líquido que pasa por el calorímetro con un volumen conocido. Entonces, una medición de la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y salida de la corriente de líquido nos permite calcular el calor específico del líquido. Un líquido de 0.85 g/cm^3 de densidad fluye a través de un calorímetro a razón de $8.2 \text{ cm}^3/\text{s}$. Se añade calor por medio de un calentador eléctrico en espiral de 250 W , y se establece una diferencia de temperatura de 15°C en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y salida del flujo. Halle el calor específico del líquido.
15. El agua estancada a cielo abierto a 32°C se evapora a causa del escape de algunas de las moléculas de su superficie. El calor de vaporización es aproximadamente igual a ϵn , en donde ϵ es la energía media de las moléculas que escapan y n es el número de moléculas por kilogramo. (a) Halle ϵ . (b) ¿Cuál es la razón entre ϵ y la energía cinética promedio de las moléculas de H_2O , suponiendo que la energía cinética se relaciona con la temperatura de la misma manera que lo hace en los gases?
16. ¿Qué masa de vapor a 100°C debe mezclarse con 150 g de hielo a 0°C , en un recipiente térmicamente aislado, para producir agua líquida a 50°C ?
17. Una persona prepara una cantidad de té helado mezclando 520 g del té caliente (esencialmente agua) con una masa igual de hielo a 0°C . ¿Cuáles son la temperatura final y la masa de hielo restante si el té caliente está inicialmente a una temperatura de (a) 90.0°C y (b) 70.0°C ?
18. (a) Dos cubos de hielo de 50 g cada uno se dejan caer en 200 g de agua en un vaso. Si el agua estaba inicialmente a una temperatura de 25°C , y el hielo venía directamente de un congelador a -15°C , ¿cuál es la temperatura final de la bebida? (b) Si sólo se hubiera usado un cubo de hielo en (a), ¿cuál sería la temperatura final de la bebida? Desprecie la capacidad calorífica del vaso.
19. Un anillo de cobre de 21.6 g tiene un diámetro de 2.54000 cm a la temperatura de 0°C . Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2.54533 cm a la temperatura de 100°C . La esfera se sitúa sobre el anillo (Fig. 23), y se deja que ambos lleguen al equilibrio térmico, sin que se disipe calor alguno al entorno. La esfera pasa justamente a través del anillo a la temperatura de equilibrio. Halle la masa de la esfera.

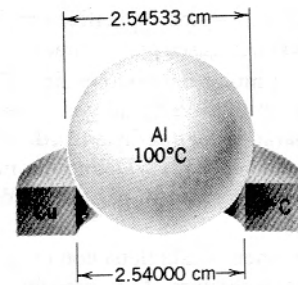


Figura 23 Problema 19.

de este material, su temperatura se eleva de 26.1 a 42.0°C . (a) Halle el calor específico de la sustancia. (b) ¿Cuántos moles de la sustancia están presentes? (c) Calcule la capacidad calorífica molar de la sustancia.

21. Cerca del cero absoluto la capacidad calorífica molar del aluminio varía con la temperatura absoluta T y está dada por $C = (3.16 \times 10^{-3})T^3$, en $\text{J/mol} \cdot \text{K}$. Cuánto calor se necesita para elevar la temperatura de 1.2 g de aluminio de 6.6 a 15 K ?
22. Se encuentra que la capacidad calorífica molar de la plata, medida a la presión atmosférica, varía con la temperatura entre 50 y 100 K según la ecuación empírica

$$C = 0.318T - 0.00109T^2 - 0.628,$$

donde C está en $\text{J/mol} \cdot \text{K}$ y T está en K . Calcule la cantidad de calor necesario para elevar 316 g de plata desde de 50.0 a 90.0 K . La masa molar de plata es 107.87 g/mol .

23. Partiendo de la figura 3, calcule la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de 0.45 mol de carbono de 200 a 500 K . (Sugerencia: Aproxime la curva real en esta región con un segmento de línea recta.)

Sección 25-4 Capacidades caloríficas de un gas ideal

24. La masa de un átomo de helio es de $6.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Calcule el calor específico a volumen constante del gas helio (en $\text{J/kg} \cdot \text{K}$) a partir de la capacidad calorífica molar a volumen constante.
25. En un experimento, se calientan 1.35 mol de oxígeno (O_2) a presión constante comenzando en 11.0°C . ¿Cuánto calor debe añadirse al gas para duplicar su volumen?
26. Se calientan doce gramos de nitrógeno (N_2) en un tanque de acero de 25.0 a 125°C . (c) ¿Cuántos moles de nitrógeno están presentes? (b) ¿Cuánto calor se transfiere al nitrógeno?
27. Una muestra de 4.34 mol de un gas diatómico ideal experimenta un aumento de temperatura de 62.4 K bajo condiciones de presión constante. (a) ¿Cuánto calor se añadió al gas? (b) ¿En cuánto aumentó la energía interna del gas? Véase la ecuación 36 del capítulo 23. (c) ¿En cuánto aumentó la energía cinética interna de traslación del gas?
28. Un recipiente contiene una mezcla de tres gases no reactivos: n_1 moles del primer gas con calor específico molar a volumen constante C_{1v} , y así sucesivamente. Halle el calor específico molar a volumen constante de la mezcla,

Sección 25-3 Capacidades caloríficas de los sólidos

20. Cierta sustancia tiene una masa molar de 51.4 g/mol . Cuando se añaden 320 J de calor a una muestra de 37.1 g

en términos de los calores específicos molares y de las cantidades de los tres gases por separado.

29. La masa atómica molar del yodo es de 127 g. Una onda estacionaria en un tubo lleno de yodo gaseoso a 400 K tiene nodos separados por una distancia de 6.77 cm cuando la frecuencia es de 1000 Hz. Determine mediante estos datos si el yodo gaseoso es un gas monoatómico o diatómico.
30. Una sala de volumen V está llena con un gas ideal diatómico (aire) a temperatura T_1 y presión p_0 . El aire se calienta a una temperatura más alta T_2 , permaneciendo la presión constante en p_0 , ya que las paredes de la sala no son herméticas. Demuestre que el contenido de energía interna del aire que permanece en la sala es el mismo a T_1 y T_2 y que la energía suministrada por el horno para calentar el aire se ha ido toda para calentar el aire exterior a la sala. Si no añadimos energía al aire, ¿por qué preocuparse por encender el horno? (Desprecie la energía del horno empleada para elevar la temperatura de las paredes, y considere únicamente la energía empleada para elevar la temperatura del aire.)

Sección 25-6 Aplicaciones de la primera ley

31. Una muestra de n moles de un gas ideal experimenta una expansión isotérmica. Halle el flujo de calor hacia el gas en términos de los volúmenes inicial y final y de la temperatura.
32. Un gas encerrado en una cámara pasa por el ciclo mostrado en la figura 24. Determine el calor neto añadido al gas durante el proceso CA si $Q_{AB} = 20$ J, $Q_{BC} = 0$, y $W_{BCA} = -15$ J.

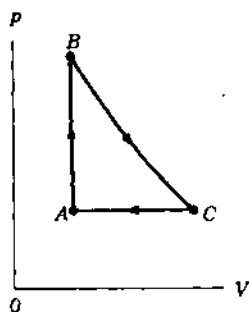


Figura 24 Problema 32.

33. Considere que se efectúa un trabajo de 214 J sobre un sistema y que se extraen 293 J de calor del sistema. En el sentido de la primera ley de la termodinámica, ¿cuáles son los valores (incluyendo los signos algebraicos) de (a) W , (b) Q , y (c) ΔE_{int} ?
34. La figura 25a muestra un cilindro que contiene gas, el cual está confinado por medio de un émbolo móvil. El cilindro está sumergido en una mezcla de hielo y agua. El émbolo se empuja rápidamente hacia abajo de la posición 1 a la posición 2. El émbolo se mantiene en la posición 2 hasta que el gas está de nuevo a 0°C y luego se le eleva lentamente

de regreso a la posición 1. La figura 25b es un diagrama pV del proceso. Si durante el ciclo se funden 122 g de hielo, ¿cuánto trabajo se efectuó sobre el gas?

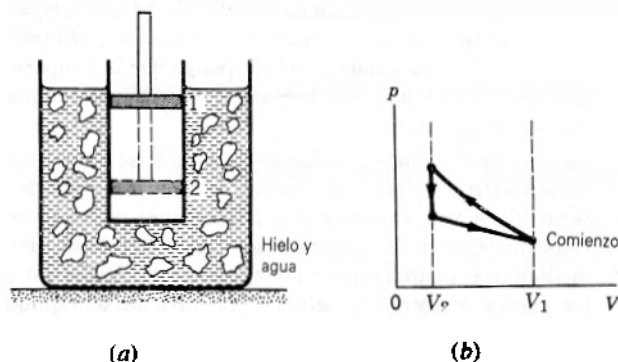


Figura 25 Problema 34.

35. (a) Un gas ideal monoatómico inicialmente a 19.0°C es comprimido súbitamente a un décimo de su volumen original. ¿Cuál es su temperatura después de la compresión? (b) Haga el mismo cálculo para un gas diatómico.
36. Una cantidad de gas ideal ocupa un volumen inicial V_0 a una presión p_0 y una temperatura T_0 . Se dilata hasta el volumen V_1 (a) a presión constante, (b) a temperatura constante, (c) adiabáticamente. Grafique cada caso en un diagrama pV . ¿En qué caso es Q máximo? ¿Mínimo? ¿En qué caso es W máximo? ¿Mínimo? ¿En qué caso es ΔE_{int} máximo? ¿Mínimo?
37. Una cantidad de gas monoatómico ideal consta de n moles inicialmente a la temperatura T_i . La presión y el volumen se duplican luego lentamente de manera que se traza una línea recta en un diagrama pV . En términos de n , R , y T_i , halle (a) W , (b) ΔE_{int} , y (c) Q . (d) Si fuésemos a definir un calor específico equivalente para este proceso, ¿cuál sería su valor?
38. En la figura 11, suponga los siguientes valores: $p_1 = 2.20 \times 10^5$ Pa, $V_1 = 0.0120$ m³, $p_2 = 1.60 \times 10^5$ Pa, $V_2 = 0.0270$ m³. Halle el valor de Q , W , y $Q + W$ para cada una de las tres trayectorias mostradas. (Sugerencia: Halle p , V , T en los puntos A , B , C . Suponga un gas monoatómico ideal.)
39. Cuando un sistema se lleva del estado i al estado f a lo largo de la trayectoria iaf en la figura 26, se encuentra que $Q = 50$ J y $W = -20$ J. A lo largo de la trayectoria ibf , $Q = 36$ J. (a) ¿Qué valor tiene W a lo largo de la trayectoria ibf ? (b) Si $W = +13$ J para la trayectoria curva de regreso fi , ¿qué valor tiene Q en esta trayectoria? (c) Considere que $E_{int,i} = 10$ J. ¿Cuánto vale $E_{int,f}$? (d) Si $E_{int,b} = 22$ J, halle Q para el proceso ib y para el proceso bf .
40. Un gas dentro de una cámara experimenta los procesos mostrados en el diagrama pV de la figura 27. Calcule el calor neto añadido al sistema durante un ciclo completo.
41. Sea 20.9 J el calor añadido a determinado gas ideal. Como resultado, su volumen cambia de 63.0 a 113 cm³ mientras que la presión permanece constante a 1.00 atm. (a) ¿En cuánto cambió la energía interna del gas? (b) Si la cantidad

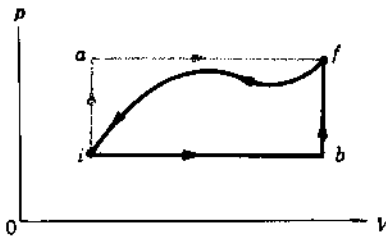


Figura 26 Problema 39.

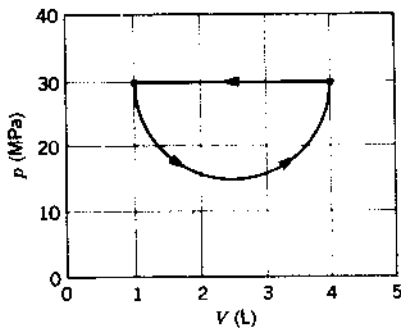


Figura 27 Problema 40.

de gas presente es de 2.00×10^{-3} mol, halle la capacidad calorífica molar a presión constante. (c) Halle la capacidad calorífica molar a volumen constante.

42. La temperatura de 3.15 mol de un gas poliatómico ideal se eleva 52.0 K mediante cada uno de los tres procesos dinámicos diferentes: a volumen constante, a presión constante, y según una compresión adiabática. Complete una tabla que muestre, para cada procedimiento, el calor añadido, el trabajo efectuado sobre el gas, el cambio de energía interna del gas, y el cambio de la energía cinética total de traslación de las moléculas del gas.
43. Una máquina lleva 1.00 mol de un gas monoatómico ideal alrededor del ciclo mostrado en la figura 28. El proceso AB tiene lugar a volumen constante, el proceso BC es adiabático, y el proceso CA tiene lugar a presión constante. (a) Calcule el calor Q , el cambio en la energía interna ΔE_{int} , y el trabajo W para cada uno de los tres procesos y para el ciclo en total. (b) Si la presión inicial en el punto A es de 1.00 atm, halle la presión y el volumen en los puntos B y C. Use $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $R = 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$.
44. Un cilindro tiene un émbolo de metal de 2.0 kg bien ajustado con área en su sección transversal de 2.0 cm^2 (figura 29). El cilindro contiene agua y vapor a temperatura constante. Se observa que el émbolo desciende lentamente a razón de 0.30 cm/s ya que fluye calor hacia afuera del cilindro a través de sus paredes. Cuando esto sucede, parte del vapor se condensa en la cámara. La densidad del vapor dentro de la cámara es de $6.0 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ y la presión atmosférica es de 1.0 atm. (a) Calcule la cantidad de condensación del vapor. (b) ¿A qué cantidad está saliendo el calor de la cámara? (c) ¿Cuál es la cantidad de cambio de la energía interna del vapor y del agua dentro de la cámara?

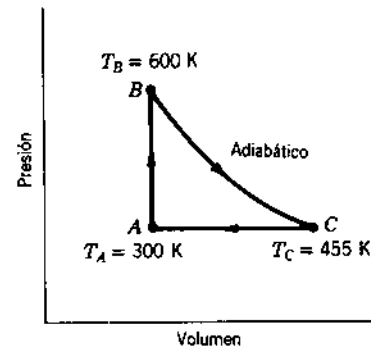


Figura 28 Problema 43.

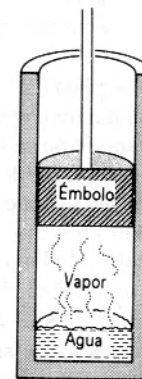


Figura 29 Problema 44.

45. En el motor de una motocicleta, después de que ocurre la combustión en la parte superior del cilindro, el émbolo es forzado hacia abajo mientras la mezcla de los productos gaseosos experimenta una expansión adiabática. Halle la potencia promedio implicada en esta expansión cuando el motor está girando a 4000 rpm, suponiendo que la presión indicada inmediatamente después de la combustión es de 15.0 atm, el volumen inicial es de 50.0 cm^3 , y el volumen de la mezcla al final de la carrera, de 250 cm^3 . Suponga que los gases son diatómicos y que el tiempo implicado en la expansión es la mitad del tiempo total del ciclo.

Sección 25-7 La transferencia de calor

46. Calcule la cantidad de calor que se perdería en un día de invierno muy frío a través de una pared de ladrillos de $6.2 \text{ m} \times 3.8 \text{ m}$ y 32 cm de espesor. La temperatura del interior es de 26°C y la temperatura del exterior es de -18°C ; suponga que la conductividad térmica del ladrillo es de $0.74 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.
47. La cantidad promedio a que fluye el calor a través de la superficie de la Tierra en América del Norte es de 54 mW/m^2 , y la conductividad térmica promedio de las rocas cercanas a la superficie es de $2.5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$. Suponiendo una temperatura en la superficie de 10°C , ¿cuál sería la temperatura a una profundidad de 33 km (cerca de la base de la corteza)? Desprecie el calor generado por los elementos radiactivos; puede ignorarse también la curvatura de la Tierra.

48. (a) Calcule la cantidad a la cual fluye el calor del cuerpo a través de la ropa de un esquiador, dados los datos siguientes: el área de la superficie del cuerpo es de 1.8 m^2 y la ropa tiene un espesor de 1.2 cm ; la temperatura de la piel es de 33°C , mientras que la superficie exterior de la ropa está a 1.0°C ; la conductividad térmica de la ropa es de $0.040 \text{ W/m} \cdot \text{K}$. (b) ¿Cuál sería el cambio en la respuesta si, después de una caída, las ropas del esquiador quedasen empapadas de agua? Suponga que la conductividad térmica del agua es de $0.60 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.
49. Considere la placa mostrada en la figura 16. Suponga que $\Delta x = 24.9 \text{ cm}$, $A = 1.80 \text{ m}^2$, y que el material es cobre. Si $T = -12.0^\circ\text{C}$, $\Delta T = 136^\circ\text{C}$, y que se alcanza el estado permanente, halle (a) el gradiente de temperatura, (b) la cantidad del calor transferido, y (c) la temperatura en un punto de la placa a 11.0 cm del extremo de mayor temperatura.
50. Una barra cilíndrica de plata de 1.17 m de longitud y 4.76 cm^2 de área en su sección transversal se aísla para impedir la pérdida de calor a través de su superficie. Los extremos se mantienen a una diferencia de temperatura de 100°C colocando un extremo en una mezcla de agua y hielo y el otro en agua hirviendo y vapor. (a) Halle la cantidad a la que se transfiere el calor a lo largo de la barra. (b) Calcule la cantidad a la que se funde el hielo en el extremo frío.
51. Para cubrir una abertura de área $2A$ se dispone de cuatro piezas cuadradas de dos materiales aislantes diferentes, todas con el mismo espesor y área A . Esto puede hacerse en cualquiera de las dos maneras mostradas en la figura 30. ¿Cuál de los arreglos, (a) o (b), daría el menor flujo de calor, siendo $k_2 \neq k_1$?

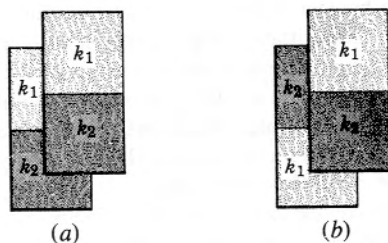


Figura 30 Problema 51.

52. Demuestre que la temperatura T_s en la superficie de contacto de una placa compuesta (véase el problema muestra 6) está dada por

$$T_s = \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 + R_2}$$

53. Un alambre largo de tungsteno de un calefactor está tiene una especificación de 3.08 kW/m y un diámetro de 0.520 mm . Está empotrado a lo largo del eje de un cilindro de cerámica de 12.4 cm de diámetro. Cuando se opera a la potencia especificada, el alambre está a 1480°C y el exterior del cilindro está a 22.0°C . Calcule la conductividad térmica de la cerámica.
54. Dos barras rectangulares de metal idénticas están soldadas a tope como se muestra en la figura 31a, y a través de las

barras fluyen 10 J de calor en 2.0 min . ¿Cuánto tiempo transcurriría para que fluyesen 30 J a través de las barras si están soldadas como se muestra en la figura 31b?

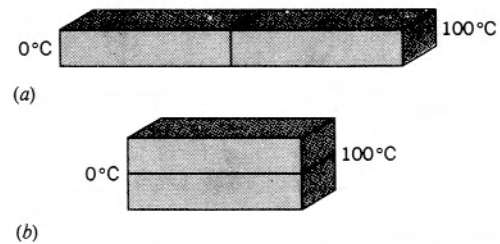


Figura 31 Problema 54.

55. Calcule la cantidad de pérdida de calor a través del vidrio de una ventana de 1.4 m^2 de área y 3.0 mm de espesor si la temperatura del exterior es de -20°F y la temperatura del interior es de $+72^\circ\text{F}$. (b) Se instala una ventana contra tormentas que tiene el mismo espesor de vidrio pero con un claro de aire de 7.5 cm entre las dos ventanas. ¿Cuál será la cantidad de pérdida de calor correspondiente suponiendo que la conducción sea el único mecanismo importante de pérdida de calor?
56. Calcule la cantidad de flujo de calor a través de dos puertas contra tormentas de 1.96 m de altura y 0.770 m de ancho. (a) Una puerta está hecha de láminas de aluminio de 1.50 mm de espesor y una hoja de vidrio de 3.10 mm que cubre el 75.0% de su superficie (se considera que el marco estructural tiene un área despreciable). (b) La segunda puerta está hecha enteramente de abeto con 2.55 cm de espesor. Considere que la caída de temperatura a través de las puertas es de 33.0°C ($= 59.4^\circ\text{F}$). Véase la tabla 5.
57. En la figura 32 se muestra una representación idealizada de la temperatura del aire en función de la distancia desde una ventana de un solo vidrio en un día de invierno en calma. Las dimensiones de la ventana son $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm} \times 0.50 \text{ cm}$. (a) ¿En qué cantidad fluye el calor hacia fuera de la ventana? (Sugerencia: La caída de temperatura a través del vidrio es muy pequeña.) (b) Calcule la diferencia de temperatura entre las superficies interior y exterior del vidrio.
58. Un tanque de agua ha estado a la intemperie en un clima frío hasta que se formó en su superficie una capa de hielo de 5.0 cm de espesor (Fig. 33). El aire sobre el hielo está a -10°C . Calcule la razón de formación de hielo (en cm por hora) en el fondo de la capa de hielo. Considere que la conductividad térmica y la densidad del hielo son $1.7 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ y 0.92 g/cm^3 . Suponga que no fluye calor a través de las paredes del tanque.
59. Se ha formado hielo en un estanque poco profundo y se ha alcanzado un estado estacionario estando el aire de encima del hielo a -5.20°C y el fondo del estanque a 3.98°C . Si la profundidad total del hielo + agua es de 1.42 m , ¿qué espesor tiene el hielo? (Suponga que las conductividades térmicas del hielo y el agua son de 1.67 y $0.502 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, respectivamente.)

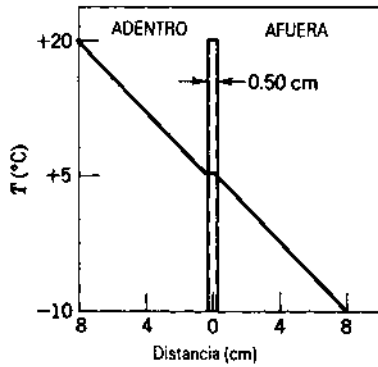


Figura 32 Problema 57.

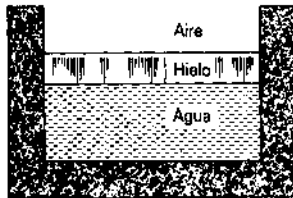


Figura 33 Problema 58.

60. La estructura de una pared consta de un marco de 20 ft × 12 ft hecho de 16 puntales verticales de 2 × 4, cada uno de 12 ft de altura y colocados a 16 in centro a centro. El exterior de la pared está recubierto con hojas de madera chapeada de $\frac{1}{4}$ in de espesor ($R = 0.30$) y hojas de abeto de $\frac{3}{4}$ in ($R = 0.98$). El interior está recubierto de yeso de $\frac{1}{4}$ in ($R = 0.47$), y el espacio entre los puntales está lleno de espuma de poliuretano ($R = 5.9$ para una capa de 1 in.) Un puntal de "dos por cuatro" tiene realmente un tamaño de 1.75 in × 3.75 in. Suponga que están hechos de madera para la cual $R \approx 1.3$ para un tablero de 1 in. (a) ¿A qué

razón fluye el calor a través de esta pared para un diferencia de temperatura de 30 F°? (b) ¿Cuál es el valor de R para la pared así estructurada? (c) ¿Qué fracción del área de la pared contiene puntales, en comparación con el área de espuma? (d) ¿Qué fracción del flujo de calor pasa a través de los puntales, en comparación con el que pasa por la espuma?

61. Suponiendo que k sea constante, demuestre que la cantidad radial de flujo de calor en una sustancia entre dos esferas concéntricas está dada por

$$H = \frac{(T_1 - T_2)4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

en donde la esfera interior tiene un radio r_1 y una temperatura T_1 , y la esfera exterior tiene un radio r_2 y una temperatura T_2 .

62. (a) Utilice los datos del problema 47 para calcular la cantidad a la que fluye el calor hacia afuera a través de la superficie de la Tierra. (a) Suponga que este flujo de calor se debe a la presencia de un núcleo caliente en la Tierra y que este núcleo tenga un radio de 3470 km. Suponga también que el material que está entre el núcleo y la superficie de la Tierra no contiene fuentes de calor y tiene una conductividad térmica promedio de 4.2 W/m · K. Use el resultado del problema 61 para calcular la temperatura del núcleo. (Suponga que la superficie de la Tierra está a 0°C.) La respuesta que se obtiene es demasiado grande por un factor de aproximadamente 10. ¿Por qué?

63. A bajas temperaturas (por debajo de unos 50 K), la conductividad térmica de un metal es proporcional a la temperatura absoluta: es decir, $k \approx aT$, donde a es una constante con un valor numérico que depende del metal en particular. Demuestre que la razón de flujo de calor a través de una barra de longitud L y área A en su sección transversal y cuyos extremos están a las temperaturas T_1 y T_2 está dada por

$$H = \frac{aA}{2L} (T_1^2 - T_2^2).$$

(Desprecie la pérdida de calor de la superficie.)

CAPÍTULO 26

ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Podemos imaginar muchos procesos que conservan la energía (y por lo tanto satisfacen la primera ley), pero que no llegan a suceder jamás. Por ejemplo, que una taza de café caliente ceda algo de energía interna a energía rotatoria y espontáneamente comience a girar; que un bloque y la superficie de una mesa conviertan parte de su energía interna para hacer que el bloque se mueva; que un vaso de agua fría se transforme en un cubo de hielo en un vaso de agua más caliente. Sin embargo, en cada uno de estos casos suele observarse, por lo general, el proceso inverso. Como estudiaremos en este capítulo, la segunda ley de la termodinámica trata de si ocurren o no tales procesos en la naturaleza. A menudo se dice que la segunda ley sigue la dirección de la "flecha del tiempo", significando con esto que los sistemas evolucionan naturalmente con el tiempo en una dirección pero no en la otra.

En este capítulo empleamos la segunda ley para analizar las máquinas que convierten el calor en trabajo útil, y demostramos que existe un límite superior para la eficiencia a la que puede funcionar una máquina. La segunda ley conduce a un nuevo concepto, la entropía, al igual que la ley cero conducía a la temperatura y la primera ley a la energía interna. Concluimos nuestro estudio de la termodinámica demostrando cómo la relación entre la entropía (una cantidad macroscópica) y su cantidad microscópica correspondiente (la probabilidad estadística de diferentes arreglos de un sistema) refuerzan la conexión entre la termodinámica y la mecánica estadística, el objetivo que nos propusimos en la sección 22-1.

26-1 PROCESOS REVERSIBLES Y PROCESOS IRREVERSIBLES

Consideremos un sistema típico en equilibrio termodinámico, digamos n moles de un gas (real), confinados en un arreglo cilindro-émbolo de volumen V , teniendo el gas una presión p y una temperatura T . En un estado de equilibrio, estas variables termodinámicas permanecen constantes con el tiempo. Supongamos que el cilindro, cuyas paredes son aislantes pero cuya base conduce calor, se coloca en un depósito grande a la misma temperatura T , como vemos en la figura 1. Llevemos ahora al sistema a otro estado de equilibrio en el que la temperatura T sea la misma pero el volumen V se reduzca a la mitad. De entre las muchas maneras en que esto se puede hacer, estudiaremos dos casos extremos.

1. Presionamos el émbolo muy rápidamente; entonces esperamos que se restablezca el equilibrio con el depósito. Durante este proceso el gas es turbulento, y su presión y

temperatura no están bien definidos. No podemos trazar el proceso como una línea continua en un diagrama pV porque no sabríamos qué valor de la presión (o de la temperatura) asociaríamos con un volumen dado. El sistema pasa de un estado de equilibrio i a otro f a través de una serie de estados de no equilibrio (Fig. 1a).

2. Presionamos el émbolo (suponiendo que no existe fricción) muy lentamente, quizá añadiendo en forma gradual arena a la parte superior del émbolo, de modo que la presión, el volumen, y la temperatura del gas sean, en todo momento, cantidades bien definidas. Primero, dejamos caer unos cuantos granos de arena sobre el émbolo. Esto reducirá el volumen del sistema un poco y la temperatura tenderá a elevarse; el sistema se saldrá del equilibrio, pero sólo ligeramente. Se transferirá al depósito una pequeña cantidad de calor, y en un tiempo corto el sistema alcanzará un nuevo estado de equilibrio, siendo su temperatura de nuevo la del depósito. Luego dejamos caer unos cuantos granos más de arena sobre el émbolo, reduciendo el volumen aún más. De nuevo, esperamos que se establezca

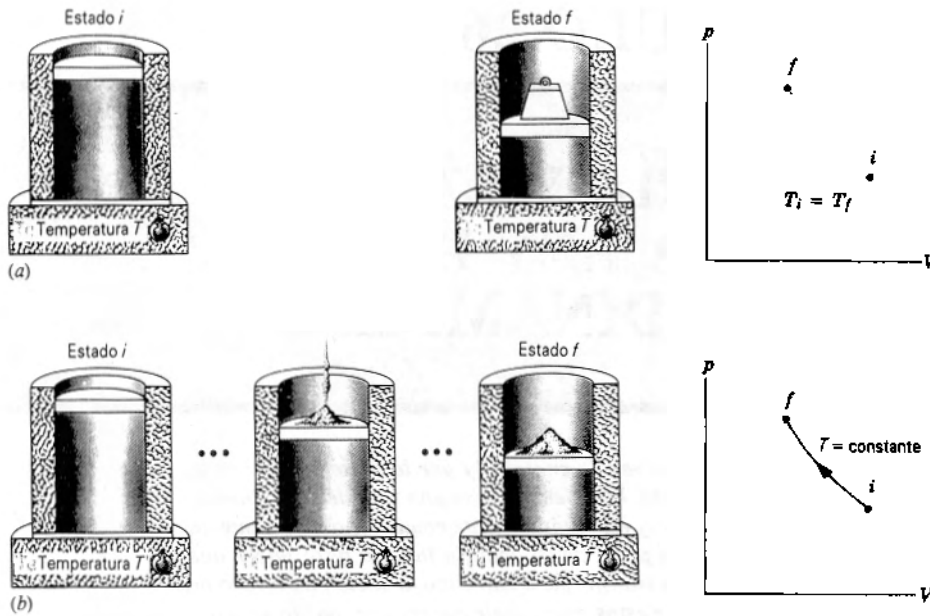


Figura 1 Se hace que un gas real pase de un estado inicial i (caracterizado por la presión p_i , el volumen V_i , y la temperatura T_i) a un estado final f (caracterizado por p_f , V_f , y T_f). El proceso puede llevarse a cabo (a) irreversiblemente, dejando caer de forma súbita un peso sobre el émbolo, o (b) reversiblemente, añadiendo arena al émbolo, unos cuantos granos a la vez.

un nuevo estado de equilibrio, y así sucesivamente. Después de muchas repeticiones de este procedimiento reducimos, finalmente el volumen a la mitad. Durante todo este proceso el sistema está siempre en un estado que difiere sólo ligeramente de un estado de equilibrio. Si imaginamos llevar a cabo este procedimiento con aumentos sucesivos de presión aún más pequeños, los estados intermedios se saldrán del equilibrio todavía menos que antes. Aumentando indefinidamente el número de cambios y disminuyendo en consecuencia el tamaño de cada cambio, llegamos a un proceso ideal en el que el sistema pasa a través de una sucesión continua de estados de equilibrio, los cuales podemos trazar como una línea continua en un diagrama pV (Fig. 1b). Durante este proceso se transfiere cierta cantidad de calor Q del sistema al depósito.

Los procesos del tipo 1 se llaman *irreversibles*, y los del tipo 2 se llaman *reversibles*. *Un proceso reversible es aquel en que, por medio de un cambio diferencial en el entorno, puede hacerse que regrese sobre su trayectoria*. Es decir, si añadimos unos cuantos granos de arena al émbolo cuando el sistema está en un estado particular A , el volumen disminuye en dV y una pequeña cantidad de calor es transferida al depósito. Si seguidamente quitamos aquellos pocos granos de arena (un cambio diferencial en el entorno), el volumen aumenta en dV y una cantidad igual de calor se transfiere del depósito, regresando por ello tanto el sistema como el entorno al estado original A .

En la práctica, todos los procesos son irreversibles, pero podemos aproximarnos arbitrariamente a la reversibilidad por medio de refinamientos experimentales apropiados. El proceso estrictamente reversible es una abstracción sencilla y útil que guarda una relación similar con los procesos reales como la abstracción del gas ideal lo hace con los gases reales.

No todos los procesos llevados a cabo lentamente son reversibles. Por ejemplo, si el émbolo de nuestro ejemplo ejerciera una fuerza de fricción sobre las paredes del cilindro, no regresaría a su estado previo por el hecho de quitar unos cuantos granos de arena. Si añadimos arena al émbolo lentamente, el sistema seguiría evolucionando a través de una serie de estados de equilibrio, pero no lo haría en forma reversible. Se usa la palabra *casi-estático* para describir procesos que se llevan a cabo con la lentitud suficiente como para que el sistema pase a través de una secuencia continua de estados de equilibrio; un proceso casi-estático puede ser o puede no ser reversible.

El proceso descrito en 2 es no sólo reversible sino también *isotérmico*, porque hemos supuesto que la temperatura del gas difiere en todo momento en sólo una cantidad diferencial dT de la temperatura (constante) del depósito en que descansa el cilindro.

Podríamos también reducir el volumen *adiabáticamente* sacando al cilindro del depósito térmico y poniéndolo sobre una plataforma no conductora. En un proceso adiabático no se permite que el calor entre o salga del sistema.

Un proceso adiabático puede ser reversible o irreversible; la definición no excluye a ninguna de las dos posibilidades. En un proceso adiabático reversible movemos al émbolo con lentitud extrema, quizás usando la técnica de la carga con arena; en un proceso adiabático irreversible empujamos al émbolo hacia abajo rápidamente.

La temperatura del gas se elevará durante una compresión adiabática porque, según la primera ley con $Q = 0$, el trabajo W efectuado sobre el sistema por el entorno al empujar hacia abajo al émbolo debe aparecer como un aumento ΔE_{int} en la energía interna del sistema. El trabajo W tiene valores diferentes para cantidades diferentes del descenso del émbolo, siendo $-\int p dV$ (es decir, el área bajo una curva de un diagrama pV) únicamente para procesos reversibles, para los cuales p tiene un valor bien definido. Entonces, ΔE_{int} y el cambio de temperatura correspondiente ΔT no son los mismos para procesos adiabáticos reversibles e irreversibles.

Por otra parte, para una transformación de un punto inicial dado i a un punto final dado f , el cambio en la energía interna depende únicamente de las coordenadas termodinámicas (p , V , y T , quizá) de i y f . Si bien W y Q dependen de la trayectoria, ΔE_{int} no depende de ella. En particular, si nos es posible calcular ΔE_{int} para una trayectoria reversible determinada, tiene el mismo valor para las demás trayectorias, incluyendo las irreversibles. La entropía, como veremos, es también una variable de estado como E_{int} cuyo cambio en cualquier proceso irreversible puede hallarse a partir de un proceso reversible escogido apropiadamente que conecte a los mismos estados inicial y final.

26-2 MÁQUINAS TÉRMICAS Y LA SEGUNDA LEY

Una *máquina térmica* es un dispositivo para convertir calor en trabajo útil. Esto es, la energía fluye hacia un sistema en forma de calor, y parte de esta energía sale del sistema en forma de trabajo efectuado sobre el entorno. El proceso inverso, que convierte trabajo en calor, ocurre también: las fuerzas de fricción pueden convertir el trabajo en energía interna, como en el calentamiento de dos superficies que se frotan entre sí, y esta energía puede ser entonces transferida a otros objetos del entorno en forma de calor. En otro ejemplo, el trabajo mecánico efectuado por un generador eléctrico conduce corriente a los hogares, donde un calefactor eléctrico convierte el trabajo en energía interna, la cual fluye entonces en forma de calor.

El cilindro de gas ideal colocado sobre el depósito térmico a una temperatura T puede servir como un ejemplo representativo de una máquina térmica. Si quitamos una pequeña cantidad de peso del émbolo, el gas se dilata (isotérmicamente). Entra calor al gas a partir del depósito,

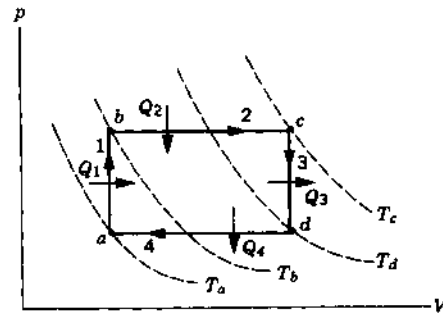


Figura 2 Un proceso cíclico, que consta de cuatro etapas, dos (ab y cd) a volumen constante y dos (bc y da) a presión constante. Las líneas de puntos muestran las isoterma correspondientes a las temperatura T_a , T_b , T_c , y T_d .

y se efectúa trabajo por el gas. Puesto que la temperatura es constante, la energía interna es constante también, y entonces tenemos un aparato para convertir calor en trabajo.

Esta máquina térmica no sería muy útil a la larga, porque no podría operar indefinidamente: nos quedaríamos sin peso que quitar del émbolo o bien el émbolo llegaría hasta arriba del cilindro. Una máquina más útil sería la que operase en un ciclo, regresando a su punto inicial después de haber efectuado cada trabajo unitario W , y repitiendo sus etapas continuamente. La figura 2 muestra un ejemplo de un proceso cíclico que podría constituir la base para una máquina térmica. El ciclo consta de varias etapas, pudiendo todas ellas efectuarse en pequeños incrementos y por lo tanto reversiblemente. Suponemos que el cilindro de gas está situado sobre un depósito térmico, cuya temperatura puede ajustarse fácilmente.

Al analizar las etapas del ciclo, es conveniente tener en cuenta las convenciones de signo que hemos estado usando para el calor y el trabajo:

Se considera que el calor que entra al sistema es positivo, y que el calor que sale del sistema es negativo.

El trabajo efectuado sobre un sistema, correspondiente a una disminución de volumen se considera positivo; el trabajo efectuado por un sistema es el negativo del trabajo efectuado sobre un sistema.

El trabajo efectuado en un proceso cíclico es negativo si el ciclo se efectúa en sentido horario en un diagrama pV , y positivo si el ciclo se efectúa en sentido antihorario.

Para recordar estas convenciones de signo, podemos relacionar el efecto del calor transferido o del trabajo efectuado con el cambio en la energía interna del sistema.

Las cuatro etapas de nuestro ciclo son las siguientes:

Etapas 1 (ab). Aumentamos la temperatura del depósito, y simultáneamente añadimos algún peso adicional al émbolo, de modo que la presión aumente pero el volumen permanezca constante.

Etapas 2 (bc). Aumentamos la temperatura del depósito y dejamos que el gas se dilate a presión constante. El émbolo efectúa un trabajo negativo sobre el gas.

Etapas 3 (cd). Disminuimos la temperatura del depósito y simultáneamente retiramos algo de peso del émbolo, de modo que el volumen permanezca constante.

Etapas 4 (da). Continuamos disminuyendo la temperatura del depósito, pero mantenemos constante la carga sobre el émbolo, con el fin de que la presión permanezca constante mientras el volumen disminuya a su valor original.

Obsérvese de las isotermas mostradas en la figura 2 que la temperatura aumenta en las etapas 1 y 2 y disminuye en las etapas 3 y 4. Entonces, durante las etapas 1 y 2 entra calor al sistema ($Q_1 > 0$ y $Q_2 > 0$), y durante las etapas 3 y 4 sale calor del sistema ($Q_3 < 0$ y $Q_4 < 0$). Además, observamos que $W < 0$ para todo el ciclo, porque el ciclo se efectúa en dirección horaria. En la etapa 1, hemos añadido peso cuando el émbolo estaba en la posición más baja, y en la etapa 3 hemos retirado peso cuando el émbolo estaba en la posición más alta. El efecto total del ciclo sobre el entorno es, entonces, elevar cierto peso mg a la distancia h a la que asciende el émbolo en la etapa 2; la magnitud del trabajo efectuado por el gas sobre el entorno es igual a mgh .

Examinemos ahora las transferencias de energía durante el ciclo. El calor total Q_{in} que entra al sistema es $Q_1 + Q_2$, y el calor total Q_{out} que sale del sistema es $Q_3 + Q_4$. El calor neto transferido Q para el ciclo es $Q_{in} + Q_{out}$; para recordar que Q_{in} es positiva y Q_{out} negativa, escribimos, usando magnitudes absolutas,

$$|Q| = |Q_{in}| - |Q_{out}|. \quad (1)$$

El cambio en la energía interna para el ciclo debe ser cero, porque el ciclo comienza y termina en el mismo punto. La primera ley da entonces $W = -Q$ o sea, usando de nuevo magnitudes absolutas,

$$|W| = |Q| = |Q_{in}| - |Q_{out}|. \quad (2)$$

Para este ciclo, $|Q_{in}| > |Q_{out}|$, de modo que los miembros derechos de las ecuaciones 1 y 2 son positivos, como es necesario cuando escribimos aquellas ecuaciones en términos de magnitudes.

Definimos la *eficiencia* e de cualquier ciclo como la cantidad neta de trabajo efectuado sobre el entorno durante el ciclo, dividido por la *entrada de calor* Q_{in} :

$$e = \frac{|W|}{|Q_{in}|}. \quad (3)$$

El trabajo efectuado sobre el entorno, que es como medimos la salida útil de una máquina, es el negativo del trabajo efectuado por el entorno sobre el gas. Escribimos la razón en la ecuación 3 de esta manera para que tanto el numerador como el denominador sean cantidades positivas.

Podemos también escribir la eficiencia como:

$$e = \frac{|Q_{in}| - |Q_{out}|}{|Q_{in}|} = 1 - \frac{|Q_{out}|}{|Q_{in}|}. \quad (4)$$

Podríamos hacer una máquina perfectamente eficiente ($e = 1.00$ ó 100%) si pudiéramos diseñar un ciclo que reduzca a cero a $|Q_{out}|$, el calor descargado; de otro modo, la eficiencia es siempre menos de 100% . Una forma de la *segunda ley de la termodinámica* afirma que el hacer una máquina térmica perfectamente eficiente es imposible:

En un proceso cíclico, no es posible convertir calor enteramente en trabajo, sin que exista algún otro cambio.

En nuestro ejemplo el "otro cambio que existe" es el calor de escape $|Q_{out}|$, y entonces la segunda ley dice que es imposible reducir $|Q_{out}|$ a cero. La ecuación 4 implica que la eficiencia de la máquina térmica no puede nunca llegar al 100% . Esta forma de la segunda ley, que suele llamarse forma de *Kelvin-Planck*, establece que *no existen máquinas térmicas perfectas*.

La figura 3 muestra una representación esquemática simplificada de una máquina perfecta, la cual convierte al calor Q enteramente en trabajo, y una máquina real, que obtiene el calor Q_H de un recipiente a alta temperatura T_H y descarga calor Q_L al recipiente a baja temperatura T_L . En esta máquina generalizada, el calor de entrada, que puede ser transferido en varias etapas, se representa simplemente como Q_H , y el calor de escape se representa similarmente como Q_L . El ciclo implica una serie de operaciones llevadas a cabo sobre una *sustancia de operación*; en nuestro caso, la serie de operaciones mostradas en la figura 2 se llevaron a cabo en un gas ideal, pero en la práctica podemos diseñar una máquina térmica usando cualquiera de una gran variedad de sustancias de operación. Por ejemplo, en una planta de potencia, el agua es a menudo la sustancia de operación, absorbiendo calor Q_H cuando se convierte en vapor y descargando calor Q_L cuando el vapor se condensa nuevamente en agua. (No debe confundirse el combustible de un motor con la sustancia de operación; el combustible simplemente mantiene la temperatura T_H del recipiente caliente.) El recipiente de baja temperatura, hacia el que escapa el calor Q_L , podría ser la atmósfera, un estanque de enfriamiento, o un río.

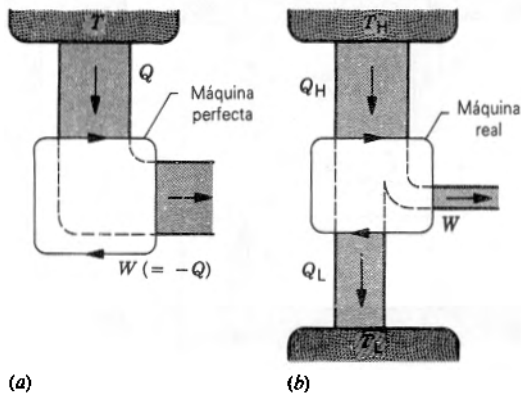


Figura 3 Se representa una máquina por las flechas en el sentido horario que rodean al bloque central. (a) En una máquina perfecta, todo el calor extraído de un depósito a alta temperatura se convierte en trabajo. (b) En una máquina real, el calor Q_H extraído del depósito de alta temperatura se convierte parcialmente en trabajo y parcialmente en calor Q_L que escapa a un recipiente de baja temperatura.

Problema muestra 1 Un motor de automóvil, cuya eficiencia térmica e es de 22%, opera a 95 ciclos por segundo y efectúa trabajo a 120 hp. (a) ¿Cuánto trabajo por ciclo efectúa el entorno sobre el sistema? (b) ¿Cuánto calor entra y sale del motor en cada ciclo?

Solución (a) El trabajo por ciclo efectuado sobre el sistema, una cantidad negativa, es

$$W = -\frac{(120 \text{ hp})[746 \text{ (J/s)/hp}]}{95 \text{ s}^{-1}} = -942 \text{ J.}$$

O, lo que es lo mismo, el motor efectúa +942 J de trabajo por ciclo sobre el entorno.

(b) Para hallar el calor de entrada Q_H absorbido del depósito a alta temperatura (la explosión de la mezcla de combustible), usamos la ecuación 3:

$$|Q_H| = \frac{|W|}{e} = \frac{942 \text{ J}}{0.22} = 4.3 \times 10^3 \text{ J.}$$

Partiendo de la ecuación 2, hallamos el calor de salida, que se descarga al recipiente a baja temperatura (el entorno):

$$|Q_L| = |Q_H| - |W| = 4.3 \times 10^3 \text{ J} - 942 \text{ J} = 3.4 \times 10^3 \text{ J.}$$

El calor descargado del motor lleva un signo negativo de modo que

$$Q_L = -3.4 \times 10^3 \text{ J.}$$

Vemos que este motor absorbe $4.3 \times 10^3 \text{ J}$ de calor por ciclo, por el que debemos pagar en la estación de gasolina, efectúa 942 J de trabajo, y transfiere $3.4 \times 10^3 \text{ J}$ de calor en el escape. El motor desecha 3.6 veces más energía de la que convierte para propósitos útiles. Algunas máquinas pueden poner este calor del escape a trabajar en forma útil. Por ejemplo, el calor del vapor escapado en una planta de potencia puede transferirse a edificios comerciales para mantenerlos calientes durante el tiempo frío.

26-3 REFRIGERADORES Y LA SEGUNDA LEY

Un refrigerador es básicamente una máquina térmica que funciona en sentido inverso. Al igual que una máquina térmica, se considera que un refrigerador funciona en un proceso cíclico, y el recorrido del ciclo de la figura 2 en sentido inverso representaría la operación de un tipo de refrigerador. Un refrigerador más general puede estar representado por el motor de la figura 3 operado en sentido inverso. El calor Q_L se extrae del depósito de baja temperatura a la temperatura T_L , y el calor Q_H se descarga del recipiente de alta temperatura a la temperatura T_H . La figura 4 muestra una representación esquemática de un refrigerador perfecto, en el que $|Q_L| = |Q_H|$, y un refrigerador real, en el que $|Q_L| < |Q_H|$ y debe suministrársele trabajo W .

Como en el caso de la máquina térmica, no existe un cambio de la energía interna en un ciclo completo, y por lo tanto $|W| = |Q|$, o sea

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|. \quad (5)$$

En el refrigerador, el calor *entra* a partir del recipiente de baja temperatura, de modo que $Q_L > 0$, y *sale* al recipiente de alta temperatura, de modo que $Q_H < 0$, como lo sugiere la figura 4. También, $W > 0$, puesto que el entorno efectúa un trabajo sobre la sustancia de operación.

En analogía con la eficiencia de una máquina térmica, evaluamos un refrigerador en términos del *coeficiente de rendimiento* K , definido por

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|}. \quad (6)$$

En un refrigerador perfecto, $W = 0$ (entonces $|Q_H| = |Q_L|$), y el coeficiente de rendimiento es infinito.

Un enunciado alternativo de la segunda ley de la termodinámica trata del rendimiento de un refrigerador:

En un proceso cíclico, no es posible que fluya calor de un cuerpo a otro a mayor temperatura sin que exista algún otro cambio.

En este enunciado, el "otro cambio existente" significa que durante el ciclo debe efectuarse un trabajo externo para hacer que el calor se mueva de este modo, puesto que de por sí preferiría fluir en el sentido contrario. Este enunciado de la segunda ley se llama a menudo la forma *Clausius*, y en efecto dice que *no existen refrigeradores perfectos*.

En un refrigerador doméstico ordinario, la sustancia de operación es un líquido (Freón) que circula dentro del sistema. El depósito a baja temperatura es la cámara fría en la que se almacenan los alimentos, y el depósito a alta temperatura es la habitación en que se mantiene la unidad.

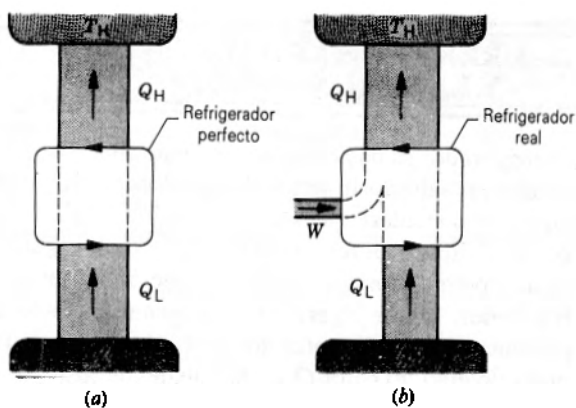


Figura 4 Se representa un refrigerador por flechas apuntando en sentido antihorario alrededor del bloque central. (a) En un refrigerador perfecto no se requiere ningún trabajo. (b) En un refrigerador real, el calor es extraído de un depósito a baja temperatura mediante la ejecución de algún trabajo externo, y la energía equivalente del calor extraído y del trabajo se descarga como calor a un depósito a alta temperatura.

El trabajo externo es proporcionado por un motor que impulsa a la unidad. Los refrigeradores típicos tienen coeficientes de rendimiento alrededor de 5.

Equivalencia de los enunciados de Clausius y de Kelvin-Planck

Los dos enunciados de la segunda ley que hemos presentado no son independientes y, de hecho, son enteramente equivalentes. Para demostrar esto, consideremos lo que pasaría si la forma Kelvin-Planck fuese incorrecta, y que pudiéramos construir una máquina perfecta, convirtiendo el calor Q_H enteramente a trabajo W . Usemos este trabajo W para impulsar un refrigerador real, como se muestra en la figura 5a. Este refrigerador toma el calor $|Q_L|$ del depósito a baja temperatura y bombea el calor $|Q_H| = |Q_L| + |W|$ al depósito a alta temperatura.

Consideremos la combinación de la máquina perfecta y el refrigerador real como un solo aparato, como se indica en la figura 5b. El trabajo W es una característica interna de este aparato y no entra en ningún intercambio de energía con el entorno. Este aparato toma el calor $|Q_L|$ del depósito a baja temperatura y transfiere al depósito a alta temperatura una cantidad neta de calor igual a $|Q_H| - |Q_L|$. Pero $|Q_H| = |W|$, y entonces

$$|Q_H| - |Q_L| = |Q_H| - |W| = |Q_L|.$$

Entonces nuestro aparato combinado actúa como un refrigerador perfecto, tomando el calor $|Q_L|$ del depósito a baja temperatura y bombeando el calor $|Q_H|$ al depósito a alta temperatura, sin que se efectúe ningún trabajo externo.

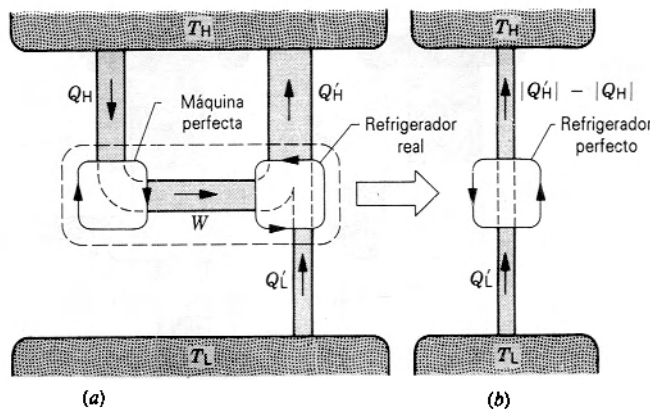


Figura 5 (a) Un refrigerador real, impulsado por una máquina perfecta, es equivalente a (b) un refrigerador perfecto.

Este ejemplo demuestra que, si podemos construir una máquina perfecta, entonces podemos construir un refrigerador perfecto. Es decir, una violación del enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley implica una violación del enunciado de Clausius. De manera similar, un refrigerador perfecto nos permite convertir a una máquina térmica real en una máquina térmica perfecta. Entonces, una violación del enunciado de Clausius implica una violación del enunciado de Kelvin-Planck. Puesto que una violación de cualquiera de los enunciados implica una violación del otro, los dos enunciados son lógicamente equivalentes.

Problema muestra 2 Un refrigerador doméstico, cuyo coeficiente de rendimiento K es 4.7, extrae calor de la cámara de enfriamiento a 250 J por ciclo. (a) ¿Cuánto trabajo por ciclo se requiere para operar el refrigerador? (b) ¿Cuánto calor por ciclo se descarga a la habitación, la cual constituye el depósito de alta temperatura del refrigerador?

Solución (a) Partiendo de la ecuación 6, $K = |Q_L|/|W|$, tenemos

$$|W| = \frac{|Q_L|}{K} = \frac{250 \text{ J}}{4.7} = 53 \text{ J}.$$

W representa el trabajo efectuado sobre el sistema, de modo que es una cantidad positiva.

(b) Para hallar el calor Q_H descargado a la habitación (la cual sirve como depósito de alta temperatura), usamos la ecuación 5, que es la primera ley de termodinámica para un aparato cíclico y es válida tanto para refrigeradores como para máquinas. Entonces, tenemos

$$|Q_H| = |W| + |Q_L| = 53 \text{ J} + 250 \text{ J} = 303 \text{ J}.$$

Un refrigerador ¡es también un calefactor eficiente! Al pagar por 53 J de trabajo (efectuado por el motor), obtenemos 303 J de calor abastecido a la habitación por medio de los tubos de condensación colocados atrás de la unidad. (Véase el problema muestra 4, que trata de la operación de una bomba de calor, aparato similar al refrigerador que puede calentar el hogar.)

Si calentásemos la habitación con un calefactor eléctrico, obtendríamos cuando más 53 J de calor por cada 53 J de trabajo por el que pagamos. Pensemos en lo sensato (?) que puede ser tratar de enfriar la cocina en un día caluroso ¡dejando abierta la puerta del refrigerador! Por supuesto, un cálculo completo de la eficiencia relativa de varios sistemas de calefacción debe tener en cuenta la eficiencia termodinámica de la producción de potencia eléctrica en la planta generadora.

26-4 EL CICLO DE CARNOT

Hemos visto que la segunda ley de la termodinámica nos impide construir máquinas térmicas y refrigeradores perfectos. Entonces es lógico preguntar si podemos llegar tan cerca de la perfección como queremos, o si existe alguna otra limitación fundamental en el funcionamiento de las máquinas térmicas y de los refrigeradores. Sucede que *sí existe un límite fundamental*, y para su estudio explicaremos una máquina que funciona en un ciclo particular, llamado *ciclo de Carnot*.*

En el ciclo de Carnot, la sustancia de operación es un gas ideal en nuestro cilindro usual. Usamos dos depósitos térmicos, uno a alta temperatura T_H y otro a baja temperatura T_L . El ciclo consta de cuatro procesos reversibles, dos isotérmicos y dos adiabáticos. La secuencia, indicada esquemáticamente en la figura 6 y trazada en un diagrama pV en la figura 7, es como sigue:

Etapa 1 (ab). Ponemos el cilindro sobre el depósito a alta temperatura, con el gas en un estado representado por el punto a en la figura 7. Gradualmente, quitamos algo de peso del émbolo, permitiendo que el gas se dilate lentamente hasta el punto b . Durante este proceso, el gas del depósito a alta temperatura absorbe calor $Q_1 = |Q_H|$. Ya que este proceso es isotérmico, la energía interna del gas no cambia ($\Delta E_{int} = 0$), y todo el calor (positivo) añadido aparece como trabajo (negativo) efectuado sobre el gas al elevarse el émbolo con el peso.

Etapa 2 (bc). Aislamos el cilindro del depósito y, quitando gradualmente más peso del émbolo, dejamos que el gas se dilate lentamente hasta el punto c de la figura 7. Esta expansión es adiabática porque no entra ni sale calor del sistema ($Q_2 = 0$). El émbolo efectúa un trabajo (negativo) W_2 sobre el gas. La temperatura del gas cae a T_L , porque la energía para efectuar el trabajo debe venir de la energía interna del gas.

Etapa 3 (cd). Ponemos el cilindro sobre el depósito a baja temperatura y, añadiendo gradualmente peso al émbolo, comprimimos el gas lentamente hasta el punto d en

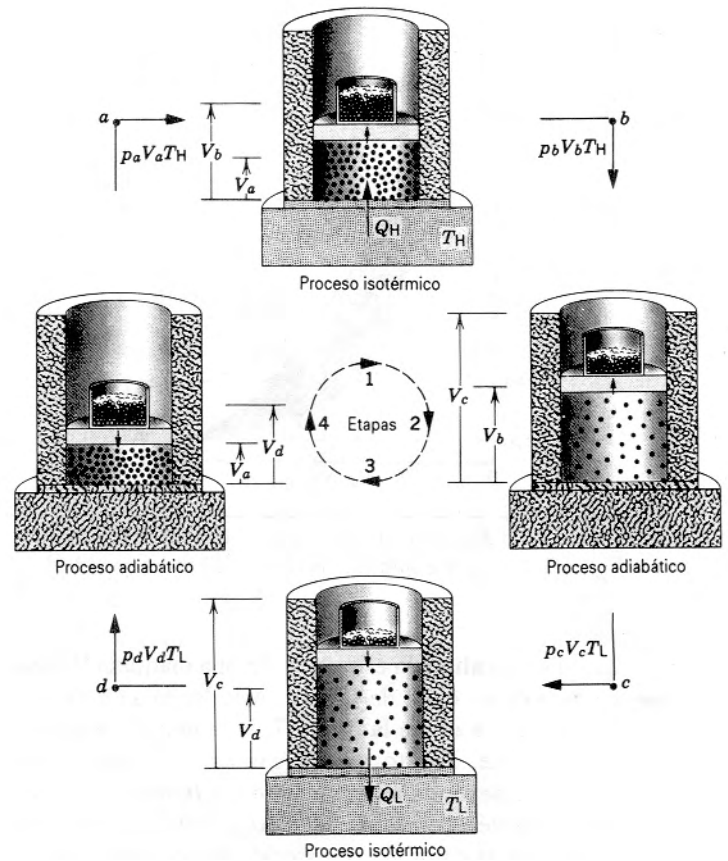


Figura 6 Ciclo de Carnot. Las cuatro etapas (1, 2, 3, 4) y los cuatro puntos finales (a, b, c, d) corresponden a los de la figura 7. El arreglo cilindro-émbolo se muestra en puntos intermedios, durante la realización de cada proceso.

la figura 7. Durante este proceso, se transfiere calor $Q_3 = -|Q_L|$ del gas al depósito. La compresión es isotérmica a la temperatura T_L , y se efectúa un trabajo (positivo) sobre el gas al descender el émbolo y su carga.

Etapa 4 (da). Aislamos al cilindro del depósito y, añadiendo aún más peso, comprimimos al gas lentamente de regreso a su punto inicial a de la figura 7, completando así el ciclo. La compresión es adiabática porque ningún calor entra o sale del sistema. El trabajo W_H es efectuado sobre el gas, y su temperatura se eleva hasta T_H .

Las transferencias de energía durante el ciclo pueden resumirse como sigue:

	Q	W	ΔE_{int}
Etapa 1	>0	<0	0
Etapa 2	0	<0	<0
Etapa 3	<0	>0	0
Etapa 4	0	>0	>0
Ciclo	>0	<0	0

* Llamado así en honor del ingeniero y científico francés N. L. Sadi Carnot (1796-1832), quien propuso el concepto en 1824.

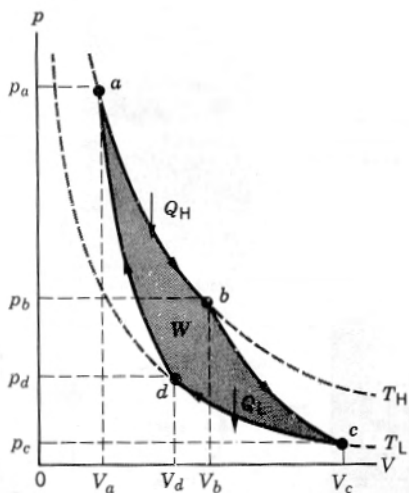


Figura 7 Un diagrama pV del ciclo de Carnot ilustrado en la figura 6. Se supone que la sustancia útil es un gas ideal.

Calculemos ahora la eficiencia de una máquina térmica que opere en un ciclo de Carnot. A lo largo de la trayectoria isotérmica ab en la figura 7, la temperatura permanece constante. Puesto que el gas es ideal, su energía interna, que depende únicamente de la temperatura, permanece también constante. Con $\Delta E_{\text{int}} = 0$, la primera ley requiere que el calor Q_H transferido del depósito de alta temperatura sea igual a la magnitud del trabajo W efectuado sobre el gas al expandirse. Según la ecuación 27 del capítulo 23 tenemos entonces

$$|Q_H| = |W_1| = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

Similarmente, para el proceso isotérmico cd en la figura 7, podemos escribir

$$|Q_L| = |W_3| = nRT_L \ln \frac{V_c}{V_d}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones tenemos que

$$\frac{|Q_H|}{|Q_L|} = \frac{T_H \ln(V_b/V_a)}{T_L \ln(V_c/V_d)}. \quad (7)$$

La ecuación 38 del capítulo 25 nos permite escribir, para los dos procesos adiabáticos bc y da ,

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_L V_c^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T_H V_a^{\gamma-1} = T_L V_d^{\gamma-1}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones resulta

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}}$$

o sea

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}. \quad (8)$$

Al combinar las ecuaciones 7 y 8 nos da

$$\frac{|Q_H|}{|Q_L|} = \frac{T_H}{T_L}. \quad (9)$$

La ecuación 9 es un resultado importante y fundamental del ciclo de Carnot. Necesitaremos este resultado nuevamente más adelante en este mismo capítulo cuando discutamos la entropía.

Usando la ecuación 4 con $Q_{\text{in}} = Q_H$ y $Q_{\text{out}} = Q_L$ y sustituyendo la ecuación 9, obtenemos la eficiencia de una máquina térmica que opere en un ciclo de Carnot:

$$e = 1 - \frac{T_L}{T_H} = \frac{T_H - T_L}{T_H}. \quad (10)$$

La eficiencia de una máquina Carnot depende únicamente de la temperatura de los dos depósitos entre los que opera. Obsérvese que la eficiencia aumenta al decrecer T_L , tendiendo a 1 cuando T_L tiende a 0. Puesto que T_L no puede llegar nunca a 0, la eficiencia debe ser menos del 100%.

Un ciclo de Carnot, por ser reversible, puede recorrerse en sentido inverso para constituir un refrigerador. Se deja como ejercicio (véase el problema 19) demostrar que el coeficiente de rendimiento de un refrigerador Carnot es

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L}. \quad (11)$$

Hemos empleado un gas ideal como ejemplo de una sustancia de operación. La sustancia de operación puede ser cualquier cosa, aunque los diagramas pV para otras sustancias serían diferentes. Las máquinas térmicas comunes usan vapor o una mezcla de combustible y aire o combustible y oxígeno como sustancias de operación. Puede obtenerse calor mediante la combustión de un combustible como la gasolina o el carbón, o mediante la liberación de energía nuclear en los reactores de fisión. El calor puede ser descargado en el escape o a un condensador. Si bien las máquinas térmicas reales no operan en un ciclo reversible, el ciclo de Carnot, que es reversible, da una información útil respecto al comportamiento de cualquier máquina térmica. Es especialmente importante, como lo veremos más adelante, porque pone un límite superior al rendimiento de las máquinas reales y por lo tanto ofrece un objetivo a lograr.

El teorema de Carnot y la segunda ley

Basado en su máquina térmica reversible ideal, Carnot desarrolló un teorema general aplicable a todas las máquinas térmicas:

La eficiencia de cualquier máquina térmica que opere entre dos temperaturas específicas nunca podrá superar la eficiencia de una máquina Carnot que opere entre las mismas dos temperaturas.

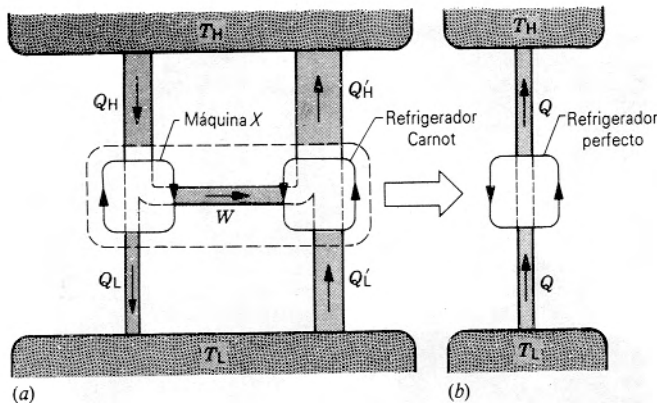


Figura 8 (a) La máquina X impulsa un refrigerador Carnot. Si la máquina X fuese más eficiente que una máquina Carnot, entonces la combinación sería equivalente al refrigerador perfecto mostrado en (b).

Es decir, la eficiencia Carnot (Ec. 10) es el límite superior del desempeño de una máquina térmica. Clausius y Kelvin demostraron que el teorema de Carnot era una consecuencia necesaria de la segunda ley de la termodinámica, pero es notable que el trabajo de Carnot haya sido terminado mucho tiempo antes de que Clausius y Kelvin desarrollasen los enunciados de la segunda ley. (¡El trabajo de Carnot sobre máquinas térmicas se publicó en 1824, el año del natalicio de Kelvin y dos años después de haber nacido Clausius!)

Para demostrar que la violación del teorema de Carnot es también una violación de la segunda ley, supongamos que tenemos una máquina, a la que llamaremos máquina X, cuya eficiencia e_x supera a la eficiencia Carnot e . Acoplemos la máquina X a una máquina Carnot que opere en sentido inverso como un refrigerador, como en la figura 8. La máquina X extrae calor Q_H del depósito de alta temperatura y descarga calor Q_L al depósito de baja temperatura, efectuando el trabajo W durante el proceso. Hagamos que este trabajo W impulse el refrigerador Carnot, que extrae calor Q'_L del depósito de baja temperatura y descarga calor Q'_H al depósito de alta temperatura.

El calor neto que fluye del depósito de baja temperatura debido a la combinación de los dos aparatos es $|Q'_L| - |Q_L|$, y el calor neto abastecido al depósito de alta temperatura es $|Q'_H| - |Q_H|$. Al aplicar la primera ley a cada aparato por separado, tenemos $|W| = |Q_H| - |Q_L|$ para la máquina X, y $|W| = |Q'_H| - |Q'_L|$ para el refrigerador Carnot. Igualando estas dos expresiones, hallamos

$$|W| = |Q_H| - |Q_L| = |Q'_H| - |Q'_L|,$$

o, definiendo que Q sea la diferencia entre $|Q'_H|$ y $|Q_H|$,

$$Q = |Q'_H| - |Q_H| = |Q'_L| - |Q_L|. \quad (12)$$

Nuestra hipótesis es que la eficiencia de la máquina X puede exceder a la eficiencia Carnot; es decir,

$$e_x > e \quad (\text{hipótesis}). \quad (13)$$

Investiguemos las consecuencias de esta hipótesis. Partiendo de la ecuación 3 de la definición básica de la eficiencia, nuestra hipótesis es equivalente a

$$\frac{|W|}{|Q_H|} > \frac{|W|}{|Q'_H|}$$

o sea

$$|Q'_H| > |Q_H| \quad (\text{consecuencia de la hipótesis}). \quad (14)$$

Al comparar las ecuaciones 12 y 14 vemos que $Q > 0$ como una consecuencia directa de nuestra hipótesis de que podemos construir una máquina que viole el teorema de Carnot. Entonces, la combinación de la máquina X y el refrigerador Carnot es equivalente al refrigerador perfecto mostrado en la figura 8b, donde el calor Q es transferido del depósito de baja temperatura a T_L al depósito de alta temperatura a T_H sin trabajo externo. Esto viola claramente la forma Clausius de la segunda ley, y por lo tanto nuestra hipótesis original (Ec. 13) debe ser falsa. El teorema de Carnot es, por lo tanto, una consecuencia necesaria de la segunda ley.

¿Cómo diferiría este argumento si X fuese una máquina real? Si $e_x < e$, entonces la ecuación 14 cambiaría a

$$|Q'_H| < |Q_H|,$$

y a partir de la ecuación 12 deduciríamos que $Q < 0$. En este caso, invertiríamos las direcciones de las flechas en la figura 8b, que entonces ya no sería más un refrigerador. En cambio, el calor Q fluiría del depósito de alta temperatura al depósito de baja temperatura, que es un proceso natural y no viola ninguna ley básica.

Si la máquina X opera en un ciclo compuesto enteramente de procesos reversibles, entonces su eficiencia es igual a la eficiencia Carnot. Si el ciclo es en parte irreversible, entonces en efecto, una porción de la energía transferida en cada ciclo se pierde, quizás por fricción, y no puede recuperarse como trabajo útil. En la figura 8, por ejemplo, no sería verdad que todo el trabajo W producido por una máquina X parcialmente irreversible estaría disponible para hacer funcionar al refrigerador; parte se perdería como fricción o por otra causa. Entonces podemos resumir el teorema de Carnot, aplicado a la eficiencia e de cualquier máquina, como sigue:

$$\begin{aligned} e &= e_{\text{Carnot}} \quad (\text{reversible}), \\ e &< e_{\text{Carnot}} \quad (\text{irreversible}). \end{aligned} \quad (15)$$

Problema muestra 3 La turbina de una planta de potencia por vapor toma vapor de una caldera a 520°C y lo descarga a un condensador a 100°C . ¿Cuál es su eficiencia máxima posible?

Solución La eficiencia máxima es la eficiencia de una máquina Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas. Entonces, según la ecuación 10,

$$e_{\text{máx}} = \frac{T_H - T_L}{T_H} = \frac{793 \text{ K} - 373 \text{ K}}{793 \text{ K}} \\ = 0.53 \text{ o sea } 53\%$$

Obsérvese que en esta ecuación las temperaturas deben expresarse en la escala Kelvin. Debido a la fricción, la turbulencia, y las pérdidas térmicas no deseadas, pueden obtenerse en tal turbina de vapor, eficiencias reales de alrededor del 40%. Obsérvese que la eficiencia máxima teórica depende únicamente de las dos temperaturas implicadas, no de las presiones o de otros factores.

La eficiencia teórica de un motor ordinario de automóvil es de alrededor del 56%, pero por consideraciones prácticas se reduce a alrededor del 25%.

Problema muestra 4 Una bomba de calor (véase la fig. 9) es un aparato que, actuando como un refrigerador, puede calentar una casa extrayendo calor del exterior, efectuando cierto trabajo, y descargando calor al interior de la casa. La temperatura exterior es de -10°C , y el interior ha de mantenerse a 22°C . Es necesario entregar calor al interior a 16 kW para compensar las pérdidas de calor normales. ¿Qué cantidad mínima de energía debe suministrarse a la bomba de calor?

Solución El depósito de baja temperatura es el exterior a $T_L = 273 - 10 = 263 \text{ K}$, y el depósito de alta temperatura es el interior a $T_H = 273 + 22 = 295 \text{ K}$. Partiendo de la ecuación 11, el coeficiente de rendimiento máximo de la bomba de calor, que actúa como un refrigerador, es

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{263 \text{ K}}{295 \text{ K} - 263 \text{ K}} = 8.22.$$

Podemos volver a escribir la ecuación 6 como:

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{|Q_H| - |W|}{|W|}.$$

Resolviendo para $|W|$ y dividiendo entre el tiempo para expresar el resultado en términos de potencia, obtenemos

$$\frac{|W|}{t} = \frac{|Q_H|/t}{K + 1} = \frac{16 \text{ kW}}{8.22 + 1} = 1.7 \text{ kW}.$$

En esto radica la "magia" de la bomba de calor. Al usar la bomba de calor como un refrigerador para enfriar el enorme exterior, podemos abastecer 16 kW al interior de la casa pero necesitamos pagar únicamente los 1.7 kW que toma hacer funcionar la bomba. En realidad, los 1.7 kW es un requisito mínimo teórico porque se basa en un rendimiento ideal. En la práctica se requeriría una mayor entrada de potencia, pero todavía existiría un ahorro muy considerable sobre, digamos, calentar la casa directamente con calefactores eléctricos. En ese caso, tendríamos que pagar directamente por cada kilowatt de transferencia de calor. Cuando la temperatura exterior es mayor que la temperatura interior, la bomba de calor puede utilizarse como un acondicionador de aire. Aun operando como un refrigerador, bombea ahora calor del interior de la casa al exterior. De nuevo, debe efectuarse un trabajo (y pagar por él) pero la energía trasladada como calor del interior de la casa supera a la energía equivalente del trabajo efectuado. ¡Otra ganancia termodinámica! (Véase también el problema muestra 2

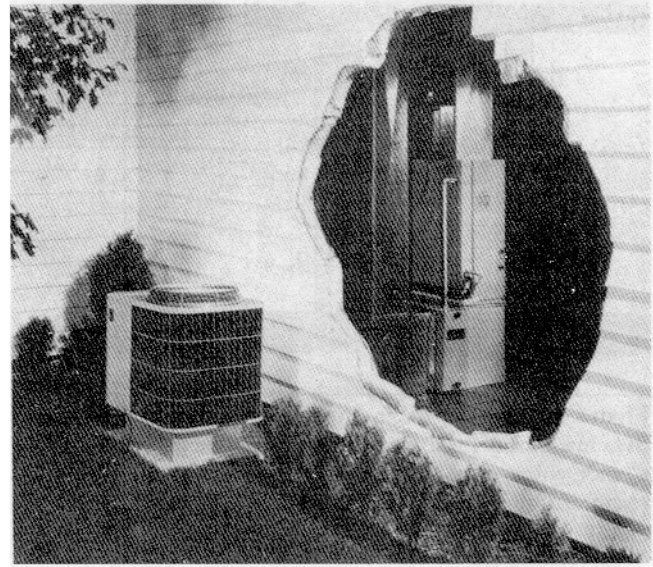


Figura 9 Problema muestra 4. Una bomba de calor.

para otra indicación de que el refrigerador es un calefactor eficiente.)

26-5 LA ESCALA DE TEMPERATURA TERMODINÁMICA

La eficiencia de una máquina reversible es independiente de la sustancia de operación y depende únicamente de las dos temperaturas entre las que trabaja la máquina. Ya que $e = 1 - |Q_L|/|Q_H|$, entonces $|Q_L|/|Q_H|$ puede depender únicamente de las temperaturas. Esto condujo a Kelvin a sugerir una nueva escala de temperatura. Si hacemos que θ_L y θ_H representen estas dos temperaturas, su ecuación definitiva es

$$\frac{\theta_L}{\theta_H} = \frac{|Q_L|}{|Q_H|}.$$

Es decir, dos temperaturas en esta escala tienen la misma razón que el calor absorbido y el calor cedido, respectivamente, por una máquina Carnot que opere entre estas temperaturas. Tal escala de temperatura se denomina escala de temperatura *termodinámica* (o de *Kelvin*).

Para completar la definición de la escala termodinámica, asignamos el valor estándar de 273.16 a la temperatura del punto triple del agua. De aquí que $\theta_{tr} = 273.16 \text{ K}$. Por lo tanto, para una máquina Carnot que opere entre depósitos a las temperaturas θ y θ_{tr} , tenemos

$$\frac{\theta}{\theta_{tr}} = \frac{|Q|}{|Q_{tr}|}$$

o sea

$$\theta = 273.16 \text{ K} \frac{|Q|}{|Q_w|} \quad (16)$$

Si comparamos a ésta con la ecuación 7 del capítulo 22,

$$T = 273.16 \text{ K} \frac{X}{X_w},$$

vemos que, en la escala termodinámica, $|Q|$ juega el papel de una propiedad termométrica. Sin embargo, $|Q|$ no depende de las características de ninguna sustancia porque *la eficiencia de una máquina Carnot es independiente de la naturaleza de la sustancia de operación*. Por lo tanto, obtenemos una escala de temperatura que está libre de la objeción que podemos poner a la escala del gas ideal del capítulo 22 y, de hecho, llegamos a una definición fundamental de temperatura.

La definición de temperatura termodinámica nos permite reescribir la ecuación para la eficiencia de una máquina reversible como:

$$e = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_H} \quad (17)$$

Pero hemos demostrado que la eficiencia de una máquina Carnot que use un gas ideal como sustancia de operación es

$$e = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = \frac{T_H - T_L}{T_H} \quad (18)$$

donde T es la temperatura dada por el termómetro a volumen constante que contiene el gas ideal. Al comparar las ecuaciones 17 y 18, vemos que $|Q_H|/|Q_L| = T_H/T_L$ y $|Q_H|/|Q_L| = \theta_H/\theta_L$. Ya que $\theta_w = T_w = 273.16$ y $\theta/T_w = T/T_w$, se deduce que $\theta = T$. De aquí que *si estuviese disponible un gas ideal para usarse en un termómetro a volumen constante, el termómetro indicaría la temperatura termodinámica (o Kelvin)*. Hemos visto que, si bien no se dispone de un gas ideal, las mediciones hechas usando el proceso límite con gases reales corresponden al comportamiento del gas ideal. Trataremos la escala del gas ideal y la escala termodinámica como idénticas, y usaremos la designación K intercambiamente para cada una, como de hecho ya lo hemos llevado a cabo.

El cero absoluto y las temperaturas negativas (Opcional)

En la práctica no podemos tener un gas a menos de 1 K, y por lo tanto no podemos medir temperaturas de menos de 1 K usando un termómetro de gas a volumen constante. Por fortuna, es posible medir temperaturas inferiores a 1 K usando la escala termodinámica directamente. Supongamos que tenemos un sistema a una temperatura T_2 que queremos medir. Podemos llevar al sistema alrededor de un ciclo Carnot (Fig. 10), primero efectuando un trabajo adiabático sobre él para elevar la temperatura a T_1 , que es supuestamente conocida en la escala del gas ideal, luego transfiriendo el calor conocido $|Q_1|$ isotérmicamente, efectuando un trabajo adiabático para reducir su temperatura otra vez a T_2 , y por último transfiriendo el calor $|Q_2|$ necesario

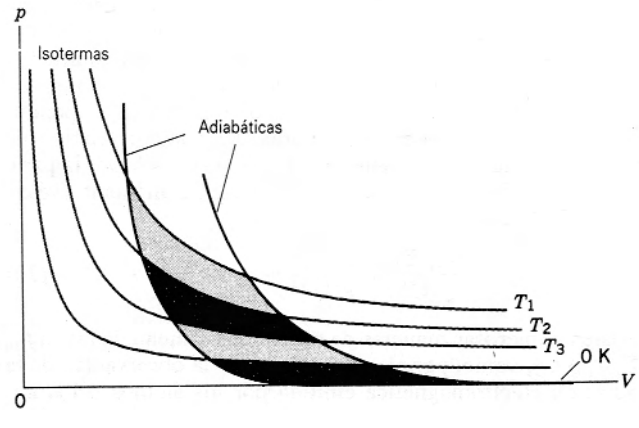


Figura 10 Una serie de ciclos de Carnot que tienden hacia el cero absoluto de temperatura. La diferencia en pendiente entre los procesos isotérmicos y adiabáticos se ha exagerado aquí para mayor claridad.

para regresar al sistema a su condición original. A partir de los argumentos anteriores concluimos que

$$T_2 = T_1 \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \quad (19)$$

Así pues, conociendo T_1 y midiendo $|Q_1|$ y $|Q_2|$ nos es posible determinar la temperatura T_2 directamente. Considerando a T_2 como una temperatura conocida, podemos llevar al sistema alrededor de otro ciclo de Carnot para determinar una temperatura T_3 aún más baja. En principio, podríamos continuar este proceso hasta el cero absoluto de temperatura; sin embargo, cuanto más pequeña sea la temperatura, menor será el calor $|Q|$ transferido en un proceso isotérmico entre dos procesos adiabáticos determinados (Fig. 10). En el límite del cero absoluto de la escala de temperatura termodinámica, el sistema podría experimentar un proceso isotérmico sin transferencia de calor.

La característica fundamental de todos los procesos de enfriamiento es que cuanto más baja es la temperatura tanto mayor la dificultad para bajarla más aún. Esta experiencia ha conducido a la formulación de la *tercera ley de la termodinámica*, que puede enunciarse como sigue: *Es imposible por cualquier procedimiento, sin importar lo idealizado que éste sea, reducir un sistema al cero absoluto de temperatura en un número finito de operaciones*. De aquí que una máquina térmica con 100% de eficiencia sea una imposibilidad práctica, a causa de que no podemos obtener un depósito al cero absoluto.

Como una alternativa al proceso cíclico podemos usar ciertos termómetros *absolutos* para determinar la temperatura termodinámica directamente. Estos termómetros se basan en la dependencia de la temperatura de los resultados básicos de la mecánica estadística. Un tipo de termómetro, llamado *termómetro de ruido*, utiliza el movimiento browniano de los electrones en un sólido. En analogía con nuestra explicación de la media de los cuadrados de la velocidad en la sección 24-3, podemos demostrar que la media de los cuadrados de la corriente de estos electrones es proporcional a la temperatura. El valor promedio de estas corrientes fluctuantes puede ser medido con sondas sensibles, y puede determinarse la temperatura directamente sin hacer uso de una calibración. De esta manera, pueden determinarse las temperaturas en la gama del milikelvin (0.001 K). Otro aparato útil en esta región de temperaturas hace

uso de la distribución de Maxwell-Boltzmann de la energía para determinar la temperatura. Supongamos que tenemos un sistema (un átomo o un núcleo) en que la energía pueda adquirir dos valores E_1 y $E_2 = E_1 + \Delta E$ (Fig. 11). Si tenemos un gran número de esos átomos o núcleos en equilibrio térmico a la temperatura T , entonces una estimación burda del número relativo de átomos o de núcleos con energías E_1 y E_2 está dada por la parte exponencial de la distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la Ec. 32 del capítulo 24):

$$\frac{f_{MB}(E_2)}{f_{MB}(E_1)} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-\Delta E/kT} \quad (20)$$

Existen numerosas maneras de medir directamente la razón $f_{MB}(E_2)/f_{MB}(E_1)$, como, por ejemplo, mediante la observación de la radiación electromagnética emitida por los átomos o los núcleos, y por lo tanto, una vez más, podemos determinar la temperatura termodinámica.

En el límite de temperatura muy baja, la mayoría de los átomos o de los núcleos en el esquema de la figura 11 estaría en el estado de energía más bajo, porque la ecuación 20 sugiere que $f_{MB}(E_2) \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$. En el límite de alta temperatura, la ecuación 20 indica que $f_{MB}(E_2) = f_{MB}(E_1)$; es decir, existen números iguales de átomos o de núcleos con los dos valores de la energía. Así pues, el aumento de la temperatura de muy baja a muy alta está acompañado por un aumento en el número relativo en el estado más alto de la energía de cerca de 0 a 50%. ¿Es posible que el número sobrepase el 50%? Podemos artificialmente "bombear" sistemas del estado de energía más bajo al estado más alto, haciendo que absorban radiación de la energía ΔE apropiada. (Tal procedimiento es básico para la operación de un láser, donde debemos tener una "inversión de la población" con más átomos en el estado de energía más alto.) Si tratamos de emplear la ecuación 20 para describir un sistema con $f_{MB}(E_2) > f_{MB}(E_1)$, el resultado es una temperatura *negativa*. Es, pues, posible tener temperaturas negativas, pero en contraste con el significado usual de los números negativos, las temperaturas negativas no están por debajo de cero; ¡están por arriba del infinito!*

26-6 ENTROPÍA: PROCESOS REVERSIBLES

La ley cero de la termodinámica se relaciona con el concepto de temperatura T , y la primera ley se relaciona con el concepto de energía interna E_{int} . En esta sección y en las siguientes demostraremos que la segunda ley de la termodinámica se relaciona con una variable termodinámica llamada *entropía*, S , y que podemos expresar la segunda ley cuantitativamente en términos de esta variable.

Comenzaremos considerando un ciclo de Carnot. Para tal ciclo podemos escribir la ecuación 9 como:

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L}$$

* Véase "Negative Absolute Temperatures", por Warren G. Proctor, *Scientific American*, agosto de 1978, pág. 90.

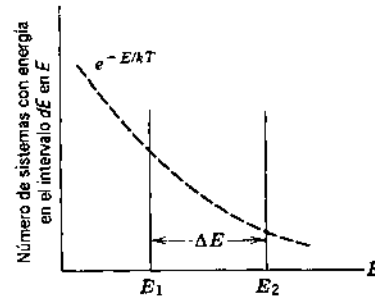


Figura 11 En un sistema que conste de un gran número de átomos o de núcleos con dos estados de energía discretos, los números relativos que ocupan cada estado de la energía pueden ser hallados partiendo de la distribución de Maxwell-Boltzmann (línea de puntos).

Descartamos ahora la notación del valor absoluto, reconociendo en el proceso que si el ciclo de Carnot se lleva a cabo en el sentido horario, como en una máquina, o antihorario, como en un refrigerador, Q_H y Q_L tienen siempre signos opuestos. Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = 0 \quad (21)$$

Esta ecuación establece que la suma de las cantidades algebraicas Q/T es cero en un ciclo de Carnot.

Como paso siguiente, queremos generalizar la ecuación 21 a cualquier ciclo reversible, no precisamente a un ciclo de Carnot. Para hacerlo, aproximamos cualquier ciclo reversible como un conjunto de ciclos de Carnot. La figura 12a muestra un ciclo reversible arbitrario superpuesto en una familia de isotermas. Podemos aproximar el ciclo real al unir las isotermas por medio de segmentos cortos de líneas adiabáticas elegidos convenientemente (Fig. 12b), formando así un conjunto de ciclos de Carnot delgados. Debe usted convencerse de que atravesar los ciclos de Carnot individuales de la figura 12b en secuencia es exactamente equivalente, en términos del calor transferido y del trabajo efectuado, a atravesar la secuencia mellada de líneas isotérmicas y adiabáticas que aproxima el ciclo real. Esto es así porque los ciclos de Carnot adyacentes tienen una isoterma común, y dos travesías, en direcciones opuestas, se cancelan entre sí en la región de traslape en lo que concierne a la transferencia de calor y al trabajo efectuado. Haciendo suficientemente pequeño el intervalo de temperatura entre las isotermas de la figura 12b, podemos aproximar el ciclo real tan cercanamente como lo deseemos por medio de una secuencia alternante de líneas isotérmicas y adiabáticas.

Entonces podemos escribir para la secuencia de líneas isotérmicas-adiabáticas de la figura 12b,

$$\sum \frac{Q}{T} = 0,$$

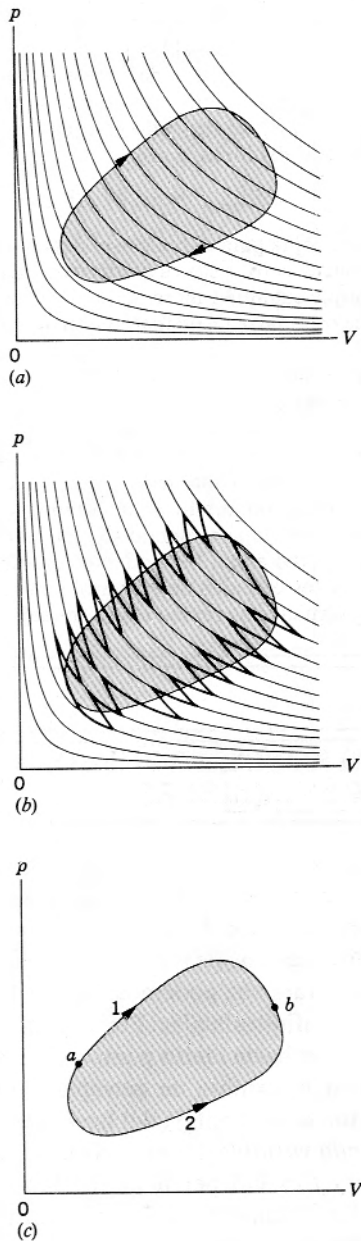


Figura 12 (a) Ciclo reversible superpuesto en una familia de isothermas. (b) Las isothermas están unidas por líneas adiabáticas, formando un conjunto de ciclos de Carnot que aproxima al ciclo dado. (c) a y b son dos puntos arbitrarios en el ciclo, y 1 y 2 son trayectorias reversibles que los unen.

o, en el límite de las diferencias de temperatura infinitesimales entre las isothermas de la figura 12b,

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0, \quad (22)$$

donde \oint indica que la integral es evaluada para una travesía completa del ciclo, comenzando y terminando en el mismo punto arbitrario del ciclo. (Téngase en cuenta que

dQ en la ecuación 22 no es una diferencial exacta, como ya hemos indicado previamente en conexión con la ecuación 31 del capítulo 25. Es decir, no existe una función Q , de la que dQ sea la diferencial. Usamos aquí dQ para significar una cantidad de calor pequeña, no como una diferencial verdadera. En el caso de la figura 12b, dQ significa la pequeña cantidad de calor que entra o sale del sistema a lo largo de un elemento corto de la trayectoria.)

Como ya lo hemos visto en la sección 8-1 en el caso de la energía potencial, si la integral de una variable alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un sistema de coordenadas es cero, entonces el valor de esa variable en un punto depende únicamente de las coordenadas del punto y no depende en absoluto de la trayectoria por la que se ha llegado a ese punto. Esta variable se llama *variable de estado*, significando que tiene un valor únicamente característico del estado del sistema, sin importar cómo se llegó a ese estado. La ecuación 22 es una integral de éstas, y por lo tanto dQ/T debe ser un cambio diferencial en una variable de estado. Llamamos a esta nueva variable la *entropía* S , de modo que

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (23)$$

y entonces la ecuación 22 se convierte en

$$\oint dS = 0. \quad (24)$$

La unidad SI para la entropía es J/K.

El punto esencial en las ecuaciones 22 a 24 es que, si bien dQ no es una diferencial exacta, dQ/T sí lo es. La energía potencial gravitatoria U_g , la energía interna E_{int} , la presión p , y la temperatura T son otras variables de estado, y las ecuaciones de la forma $\oint dX = 0$ son válidas para cada una de ellas, donde X se reemplaza por el símbolo apropiado. El calor Q y el trabajo W no son variables de estado; sabemos que, en general $\oint dQ \neq 0$ y $\oint dW \neq 0$, como podemos demostrarlo fácilmente en el caso especial de un ciclo de Carnot.

La propiedad de una variable de estado expresada por $\oint dX = 0$ puede expresarse también diciendo que $\int dX$ entre dos estados de equilibrio cualesquiera tiene el mismo valor para todas las trayectorias (reversibles) que unen a esos estados. Demostremos esto para la variable de estado entropía. Podemos escribir la ecuación 24 (véase la Fig. 12c) como:

$$\int_{\text{tray 1}}^b dS + \int_{\text{tray 2}}^a dS = 0, \quad (25)$$

donde a y b son puntos arbitrarios y 1 y 2 describen las trayectorias que unen a esos puntos. Puesto que el ciclo es reversible, podemos recorrer la trayectoria 2 en la dirección opuesta (esto es, de a a b en lugar de b a a), en cuyo caso podemos escribir la ecuación 25 como:

$$\int_{\text{tray } i}^b dS - \int_{\text{tray } 2}^b dS = 0$$

o sea

$$\int_a^b dS = \int_a^b dS. \quad (26)$$

Nótese que para cambiar el orden de los límites en la segunda integral de la ecuación 25 se requiere que cambiemos también el signo de la integral. Esto da la ecuación 26, la cual nos dice que la cantidad $\int_a^b dS$ entre dos estados de equilibrio cualesquiera del sistema, tales como a y b , es independiente de la trayectoria que une a esos estados, ya que 1 y 2 son trayectorias completamente arbitrarias.

Recordemos nuestra exposición casi idéntica en la sección 8-1, donde introdujimos el concepto de fuerza conservativa.

El cambio en la entropía entre dos estados i y f cualesquiera es entonces

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_f - S_i = \int_i^f dS \\ &= \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (\text{proceso reversible}), \end{aligned} \quad (27)$$

donde la integral se evalúa sobre cualquier trayectoria reversible que una a estos dos estados.

Problema muestra 5 Un trozo de hielo cuya masa m es de 235 g se funde (reversiblemente) a agua, permaneciendo la temperatura a 0°C durante el proceso. ¿Cuál es el cambio de entropía del cubo de hielo? El calor de fusión del hielo es de 333 kJ/kg.

Solución Fundir el hielo reversiblemente significa que debemos poner al hielo en contacto con un depósito térmico cuya temperatura supere los 0°C en una cantidad diferencial únicamente, fundiéndose por lo tanto sólo una pequeña cantidad del hielo. (Si después bajamos la temperatura del depósito en la misma cantidad diferencial, el hielo fundido se congelará; entonces el proceso es reversible.) Para un proceso reversible así, podemos usar la ecuación 27, o, puesto que la temperatura es constante,

$$S_{\text{agua}} - S_{\text{hielo}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T}.$$

Aquí dQ significa los pequeños elementos de energía térmica que entran al hielo desde el depósito térmico, y el total de todos estos elementos es precisamente el calor total absorbido por el hielo, o sea

$$Q = mL = (0.235 \text{ kg})(333 \text{ kJ/kg}) = 7.83 \times 10^4 \text{ J}.$$

Entonces

$$S_{\text{agua}} - S_{\text{hielo}} = \frac{Q}{T} = \frac{7.83 \times 10^4 \text{ J}}{273 \text{ K}} = 287 \text{ J/K}.$$

La respuesta anterior completa nuestro análisis del cambio de entropía del sistema, pero llevemos el problema un poco más

allá y consideremos también el cambio de entropía del entorno. En este caso, el entorno es el depósito térmico del que se extrae el calor necesario para fundir al hielo. Cada unidad térmica que entra al hielo debe haber salido del depósito, siendo la temperatura la misma tanto del hielo como del depósito. Por lo tanto, el cambio de entropía del depósito es igual en magnitud pero opuesto en signo al del hielo, o sea

$$\Delta S_{\text{depósito}} = -287 \text{ J/K}.$$

El cambio de entropía para el hielo + el depósito, considerados juntos, es entonces cero. Esto es cierto para cualquier proceso reversible, porque cualquier incremento de calor $+dQ$ que entre al sistema debe originarse de un incremento igual $-dQ$ que salga del depósito.

En la práctica, la fusión del hielo es más bien irreversible, como cuando ponemos un cubo de hielo en un vaso de agua a la temperatura ambiente. La diferencia de temperatura entre el hielo y el depósito (el agua) en este caso no es una cantidad diferencial sino que es de alrededor de 20°C. El proceso sólo opera en una dirección (el hielo se funde) y no puede ser invertido en ninguna etapa haciendo sólo un cambio diferencial en la temperatura del agua. No podemos emplear la ecuación 27 en tal caso, y los cálculos de este problema no son válidos. En la sección siguiente veremos cómo manejar un cálculo de este tipo.

26-7 ENTROPÍA: PROCESOS IRREVERSIBLES

La ecuación 27 describe el cálculo del cambio en entropía para un proceso reversible. Sin embargo, no existen en la naturaleza procesos absolutamente reversibles. La fricción y las transferencias de calor no deseadas están siempre presentes, y rara vez podemos llevar a cabo procesos reales en pasos infinitesimales. Por lo tanto, todo proceso termodinámico es hasta cierto punto irreversible.

Para calcular el cambio de entropía para un proceso irreversible, tomamos ventaja del hecho de que la entropía es un estado variable. La diferencia en entropía entre los estados i y f es independiente de la trayectoria que elijamos de i a f . Aun cuando la naturaleza puede elegir una trayectoria irreversible entre i y f para el proceso real, nosotros podemos elegir para el cálculo cualquier trayectoria reversible conveniente.

Para hallar el cambio de entropía para una trayectoria irreversible entre dos estados de equilibrio, debe hallarse el proceso reversible que une a los mismos estados, y calcularse el cambio de entropía usando la ecuación 27.

Consideremos dos ejemplos.

1. Expansión libre. Como en la sección 25-6 (véase la figura 14 del capítulo 25), hagamos que un gas ideal duplique su volumen expandiéndose en un espacio vacío. No se efectúa ningún trabajo contra el vacío, de modo que

$W = 0$, y el gas está confinado en un recipiente aislante, por lo que $Q = 0$. De la primera ley, debemos por lo tanto tener $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Para un gas ideal, cuya energía interna depende únicamente de la temperatura, se deduce que $T_i = T_f$.

La expansión libre es ciertamente irreversible, porque perdemos el control del sistema una vez que hemos abierto la válvula que separa los dos compartimentos. Existe una diferencia de entropía entre los estados inicial y final, pero no podemos calcularlo usando la ecuación 27, que se aplica únicamente a los procesos reversibles. Claramente, la ecuación 27 no debe ser empleada en forma directa, porque la temperatura no está definida para los pasos intermedios no en equilibrio a través de los cuales evoluciona el sistema una vez que el gas comienza a fluir. Además, $Q = 0$, lo cual presenta una dificultad más para emplear la ecuación 27.

Para hallar el cambio de entropía elegimos una trayectoria reversible de i a f para la cual podamos hacer este cálculo. Una elección conveniente es una expansión isotérmica que sufriese un gas ideal del mismo punto inicial (p_i, V_i, T_i) al mismo punto final (p_f, V_f, T_f). Representa un procedimiento muy diferente al de una expansión libre, pero une al mismo par de estados en equilibrio. De la ecuación 27, podemos tener entonces

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ = \frac{Q}{T} = \frac{-W}{T},$$

donde la última etapa puede llevarse a cabo porque $\Delta E_{\text{int}} = 0$ en un proceso isotérmico, y por lo tanto $-W = Q$. Usando la ecuación 27 del capítulo 23 para W , obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{-W}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= nR \ln 2. \end{aligned} \quad (28)$$

Esto es igual al cambio de entropía para la expansión libre irreversible. Nótese que ΔS es positivo para el sistema.

Puesto que en la expansión libre no existe transferencia de energía de ninguna clase al entorno, el cambio de entropía del entorno es cero. Así, la entropía total del sistema + el entorno aumenta durante una expansión libre.

2. Transferencia de calor irreversible. La figura 13a muestra dos bloques cuyas temperaturas iniciales son T_1 y T_2 . Para simplificar, suponemos que los bloques tienen la misma masa m y el mismo calor específico c . Quitamos la barrera aislante que separa a los bloques y los ponemos en contacto térmico, como se muestra en la figura 13b. Finalmente, llegan a la temperatura de equilibrio común T_c . Al igual que en la expansión libre, este proceso es totalmente irreversible, porque perdemos el control una vez que hayamos colocado a los bloques en contacto térmico entre sí.

Para hallar el cambio de entropía en este proceso irreversible elegimos una vez más una trayectoria reversible

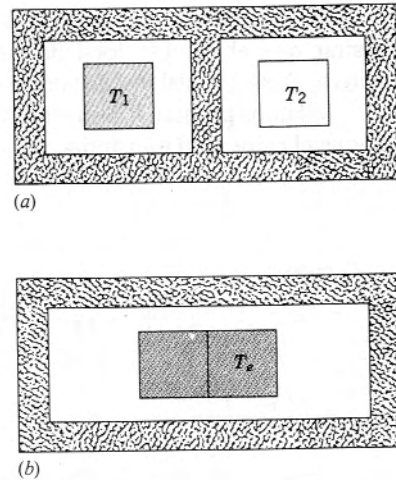


Figura 13 (a) El estado inicial: dos bloques están a temperaturas diferentes en recintos aislados individuales. (b) El estado final: la pared aislante entre los bloques se retira, y se permite que lleguen al equilibrio a la temperatura intermedia T_c .

que nos conduzca al mismo estado final. Consideremos primero el bloque 1 a la temperatura inicial T_1 . (Suponemos que ésta es la temperatura inicial más baja.) Imaginemos una serie de depósitos térmicos a las temperaturas $T_1, T_1 + dT, T_1 + 2dT, \dots, T_c - dT, T_c$. Comenzamos con el bloque 1 en contacto con el primer depósito, y luego lo movemos al siguiente hasta recorrer la secuencia. En cada etapa, entra al bloque una cantidad infinitesimal de calor dQ . El proceso es claramente reversible; en cualquier punto podemos mover el bloque de regreso a la etapa más baja anterior, y fluirá la misma cantidad de calor dQ del bloque de regreso hacia el depósito. Cada transferencia reversible de calor dQ puede expresarse como $mc dT$, pudiendo entonces emplear la ecuación 27 para hallar el cambio de entropía para el bloque 1:

$$\Delta S_1 = \int_i^f \frac{dQ}{T} = mc \int_{T_1}^{T_c} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_c}{T_1}. \quad (29)$$

De manera similar podemos construir una serie descendente de depósitos para el bloque 2 entre las temperaturas T_2 y T_c , y hallamos el cambio de entropía para el bloque 2:

$$\Delta S_2 = mc \int_{T_2}^{T_c} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_c}{T_2}. \quad (30)$$

El cambio total de la entropía es

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_c}{T_1} + mc \ln \frac{T_c}{T_2} \\ &= mc \ln \frac{T_c^2}{T_1 T_2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Si T_1 es la temperatura más baja, entonces $\Delta S_1 > 0$ y $\Delta S_2 < 0$. Podemos demostrar que el cambio total de entropía ΔS es siempre positivo, para lo cual necesitamos demostrar que $T_e^2/T_1T_2 > 1$. Hallamos primero la temperatura de equilibrio exigiendo que el calor total transferido sea cero:

$$Q_1 + Q_2 = mc(T_e - T_1) + mc(T_e - T_2) = 0,$$

o sea $T_e = (T_1 + T_2)/2$. Por lo tanto, podemos escribir la cantidad T_e^2/T_1T_2 como:

$$\begin{aligned} \frac{T_e^2}{T_1T_2} &= \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} = \frac{4T_1T_2 + (T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2} \\ &= 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2}. \end{aligned}$$

Claramente, esto es mayor que uno (la última cantidad es siempre positiva), de modo que el logaritmo de la ecuación 31 es mayor que cero, y el cambio de entropía es positivo.

El hecho de colocar a los dos bloques en contacto térmico no produce ningún cambio en absoluto en el entorno, de modo que $\Delta S = 0$ para el entorno. Por lo tanto, la entropía total del sistema + el entorno aumenta en esta transferencia de calor irreversible.

26-8 ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY

Ahora estamos listos para expresar la segunda ley en su forma más general en términos de entropía:

En cualquier proceso termodinámico pasa de un estado de equilibrio a otro, la entropía del sistema + el entorno o bien permanece sin cambio o bien aumenta.

Para los procesos reversibles, como vimos en la sección 26-6, la entropía permanece sin cambio. Como pudimos ver en el caso del problema muestra 5, el cambio de la entropía del sistema era positivo y el del entorno era negativo y de igual magnitud, así que el total era cero.

Para los procesos irreversibles, (es decir, para todos los procesos naturales), la entropía total del sistema + el entorno debe aumentar. Es posible que la entropía del sistema disminuya, pero la entropía del entorno siempre muestra un aumento de mayor magnitud, de modo que el cambio total en la entropía es siempre positivo. *Ningún proceso natural puede mostrar jamás una disminución en la entropía total del sistema + el entorno.*

Como era el caso para las leyes cero y primera, está implícito en esta forma de la segunda ley un enunciado acerca de la existencia y utilidad de una nueva variable termodinámica, en este caso la entropía.

La segunda ley, al igual que las leyes cero y primera, es una generalización de la experiencia. No puede ser de-

mostrada, pero podemos confirmarla en una variedad de circunstancias. Podemos demostrar que es consistente con la observación, en cuanto que prohíbe procesos que pudieran parecer satisfacer a todas las demás leyes conocidas, pero que no son observados. Consideremos este enunciado de la segunda ley respecto a alguno de los principios que ya hemos establecido en este capítulo.

Compresión libre

Imaginemos llevar a cabo la expansión libre con una división removible que separe a las dos mitades del recipiente. Cuando quitamos la división, las moléculas del gas que se movían originalmente hacia la derecha en la figura 14 del capítulo 25 no encuentran una división con la cual chocar, y por lo tanto se diseminan en la mitad del recipiente antes vacía, chocando finalmente contra la pared más lejana. Cuando rebotan de esa pared, no todas encuentran su camino de regreso a la otra mitad, porque posiblemente chocan con otras moléculas que encuentran en su camino. Al final, las colisiones tienden a hacer que los movimientos de las moléculas sucedan al azar, y llenen todo el recipiente.

¿Qué nos impide encontrar todas las moléculas de regreso en la mitad del recipiente un tiempo más tarde? Podríamos llamar a este proceso compresión libre, el inverso de la expansión libre. La ecuación 28 muestra que una compresión libre, en la que $V_f < V_i$, tendría un cambio negativo en la entropía del sistema (sin ningún cambio en la entropía del entorno, como en la expansión libre). Esta aseveración de la segunda ley en términos de entropía prohíbe entonces la compresión libre, y por lo tanto es poco probable que podamos hallar a todo el aire precipitándose al lado opuesto del salón en que estamos sentados. (En la siguiente sección damos otra interpretación de este suceso que nunca se presenta.)

La forma Kelvin-Planck de la segunda ley

A causa de que todas las máquinas operan en ciclos, el cambio de la entropía del sistema (la sustancia de operación) debe ser cero para un ciclo completo de operación. En una máquina perfecta, el entorno (véase la Fig. 3a) libera el calor Q a la temperatura T , y su cambio de entropía es Q/T , una cantidad negativa. Por lo tanto, el cambio total de la entropía del sistema + el entorno es negativo en una máquina perfecta. La existencia de una máquina perfecta violaría entonces el enunciado de la entropía de la segunda ley.

La forma Clausius de la segunda ley

En un refrigerador perfecto, el sistema nuevamente no tiene un cambio de entropía en un ciclo completo, sino

que el entorno libera el calor $-Q$ a la temperatura T_L y absorbe el calor Q a la temperatura T_H . Por lo tanto, el cambio total en la entropía del entorno es

$$\Delta S = \frac{Q}{T_H} - \frac{Q}{T_L} = Q \left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_L} \right).$$

Como $T_H > T_L$, este cambio de entropía es negativo. Entonces, un refrigerador perfecto violaría el enunciado de la entropía de la segunda ley.

La flecha del tiempo

Es el cambio en la entropía el que nos proporciona en última instancia la respuesta a por qué los sistemas evolucionarán naturalmente en una dirección con el tiempo y no en la otra: los sistemas evolucionan siempre en el tiempo de modo que la entropía total del sistema + el entorno aumenta. Si observamos a un sistema en el que la entropía parece disminuir, podemos estar seguros de que en alguna parte existe un cambio en la entropía del entorno lo suficientemente grande como para hacer positivo el cambio total de la entropía.

Problema muestra 6 Un trozo de hielo de masa $m_i = 0.012$ kg está inicialmente a la temperatura $T_i = -15^\circ\text{C}$. Se le deja caer en un recipiente aislado de capacidad calorífica despreciable que contiene una masa $m_w = 0.056$ kg de agua a la temperatura $T_w = 23^\circ\text{C}$. El sistema llega al equilibrio a la temperatura T_e . Calcule el cambio total de la entropía del sistema + el entorno. Utilice las capacidades térmicas específicas y el calor de fusión siguientes: $c_i = 2220$ J/kg · K, $c_w = 4190$ J/kg · K, $L = 333$ kJ/kg.

Solución Echar el hielo al agua es claramente un proceso irreversible; no se hace en etapas infinitesimales, y no podemos regresar al sistema a su estado original invirtiendo el proceso. Para calcular el cambio en la entropía del sistema, debemos primero hallar la temperatura de equilibrio final. Para hacerlo, suponemos que la temperatura final es mayor de 0°C y que todo el hielo se funde, convirtiéndose finalmente en agua a la temperatura de equilibrio. Más adelante, podemos comprobar si esta hipótesis es consistente. Exigiendo que el calor total transferido entre todos los objetos sea cero, podemos hallar la temperatura de equilibrio:

$$m_i c_i (0^\circ\text{C} - T_i) + m_i L + m_i c_w (T_e - 0^\circ\text{C}) + m_w c_w (T_e - T_w) = 0,$$

e insertando los valores dados y resolviendo hallamos

$$T_e = 276.6 \text{ K} = 3.5^\circ\text{C}.$$

Esto es ciertamente consistente con que todo el hielo se funda. (Si, por otra parte, hubiéramos obtenido una temperatura final de 0°C o más baja, sospecharíamos que nuestra hipótesis original era incorrecta, y cambiaríamos la solución en consecuencia.)

Ahora podemos hallar los cambios en la entropía. Primero para el hielo, separamos el procedimiento en tres etapas: el calenta-

miento del hielo a 0°C , la fusión del hielo, y por último el calentamiento del agua resultante a T_e . Usamos la ecuación 29 para el cambio de entropía (reversible) asociado con un cambio en la temperatura y usamos el resultado del problema muestra 5 para el cambio de la entropía en la fusión. El resultado del cambio de entropía ΔS_i para el hielo es

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= m_i c_i \ln \frac{273 \text{ K}}{T_i} + \frac{m_i L}{273 \text{ K}} + m_i c_w \ln \frac{T_e}{273 \text{ K}} \\ &= (0.012 \text{ kg})(2220 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{273 \text{ K}}{258 \text{ K}} \\ &\quad + \frac{(0.012 \text{ kg})(333 \text{ kJ/kg})}{273 \text{ K}} \\ &\quad + (0.012 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{276.6 \text{ K}}{273 \text{ K}} \\ &= 16.7 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

Para el agua, obtenemos similarmente su cambio de entropía (reversible):

$$\begin{aligned} \Delta S_w &= m_w c_w \ln \frac{T_e}{T_w} = (0.056 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{276.6 \text{ K}}{296 \text{ K}} \\ &= -15.9 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

El cambio de entropía del entorno es cero, puesto que todo el procedimiento tiene lugar en un recipiente aislado. El cambio total de la entropía del sistema más el entorno es, por lo tanto:

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_w = 16.7 \text{ J/K} + (-15.9 \text{ J/K}) = 0.8 \text{ J/K},$$

y éste es claramente positivo, como lo exige la segunda ley.

26-9 ENTROPÍA Y PROBABILIDAD

La entropía es una variable macroscópica, asociada con el estado general de un sistema y calculable a partir de cantidades macroscópicas asociadas con su estado general. Hemos visto que todas las variables macroscópicas en la termodinámica tienen una cantidad microscópica correspondiente (como temperatura, una cantidad macroscópica, y energía cinética molecular media, una cantidad microscópica). Si hacemos ciertas suposiciones respecto a las propiedades microscópicas del sistema, usualmente podemos hallar una manera de relacionar las cantidades macroscópicas y microscópicas. En el caso de la temperatura de un gas, estas suposiciones incluyen un modelo mecánico de las moléculas y sus interacciones, junto con una distribución estadística de las energías moleculares. Por lo tanto, nos gustaría considerar el cálculo microscópico de la entropía de un sistema.

La cantidad microscópica relacionada con la entropía es la probabilidad relativa de diferentes maneras de distribuir las moléculas del sistema. Consideremos primeramente algunas aplicaciones cualitativas de esta relación:

1. Expansión libre. En una expansión libre se permite que las moléculas de gas confinadas a una mitad de una

caja llenen toda la ésta. Consideremos a toda la caja en sus dos circunstancias: primero, en el instante en que la división se retira y todas las moléculas ocupan una mitad de la caja, y segundo, cuando las moléculas llenan toda la caja. La primera condición es un estado de probabilidad muy baja; dejado en libertad, sería muy poco probable que el sistema se distribuyera por sí mismo de esta manera. La segunda condición es más bien de alta probabilidad. Podemos considerar que las moléculas en expansión libre se mueven de una condición de probabilidad baja a otra de probabilidad alta. Es decir, dadas todas las maneras posibles de distribuir las moléculas al azar dentro de la caja, un gran número de esas maneras posibles muestra una distribución más bien uniforme de las moléculas, mientras que un número muy pequeño muestra una distribución no uniforme. Por ejemplo, consideremos una caja con 10 moléculas únicamente y evaluemos el número de maneras en que un número n determinado se encuentra en la mitad izquierda de la caja en cualquier instante. Puesto que, en este esquema, cada molécula tiene dos ubicaciones posibles en la caja (mitad izquierda o mitad derecha), el número total de maneras en que podemos distribuir a las moléculas, con dos alternativas para cada una, es $2^{10} = 1024$. De estas 1024 maneras, en sólo una hallaremos a todas las moléculas en la mitad izquierda ($n = 10$), mientras que puede demostrarse que existen 252 maneras de tener una distribución uniforme ($n = 5$). Al aumentar el número de moléculas, la probabilidad relativa de una distribución uniforme aumenta de manera muy acusada. Con 100 moléculas existe todavía una sola manera de distribuir las a todas en la mitad izquierda, pero existen unas 10^{29} maneras de distribuir las igualmente entre las dos mitades. La expansión libre, en la cual existe un aumento en entropía, puede ser entonces considerada microscópicamente como una transformación de un estado de muy baja probabilidad a un estado de muy alta probabilidad.

2. Conducción de calor. En este ejemplo dos cuerpos de temperaturas diferentes T_1 y T_2 alcanzan una temperatura intermedia uniforme T_c cuando entran en contacto. Este caso es similar a la expansión libre, excepto que hacemos la distribución por velocidad en lugar de hacerlo por posición. De nuevo, consideraremos a todo el sistema en dos circunstancias: justo después del contacto, con las moléculas "calientes" (las que se mueven más rápidamente) en un lado y las moléculas "frías" (que se mueven más despacio) en el otro, y mucho después, cuando la distribución de las velocidades entre las dos mitades es uniforme. Una vez más, la distribución separada (moléculas rápidas en un lado, moléculas lentas en el otro) es un estado de baja probabilidad y la distribución uniforme es un estado de alta probabilidad. Al entrar en contacto, el sistema evoluciona espontáneamente de un estado de baja probabilidad a otro de alta probabilidad.

3. Una taza de café revuelto. Supongamos que meneamos una taza de café y luego retiramos la cucharilla. Con el tiempo, la circulación del líquido cesa, y la viscosidad hace que la energía del fluido en rotación se disipe como energía interna de las moléculas. En el estado inicial, existe un movimiento ordenado del café en rotación. En el estado de equilibrio final existe un movimiento molecular al azar. Una vez más, la circulación ordenada de las moléculas es un estado de baja probabilidad, mientras que el movimiento desordenado al azar es un estado de alta probabilidad. En este proceso natural, el sistema ha pasado de un estado de baja probabilidad a un estado de alta probabilidad.

En los tres casos anteriores, el sistema ha pasado espontáneamente de un estado de baja probabilidad a otro de alta probabilidad. Las tres situaciones son procesos naturales irreversibles que se caracterizan por un aumento en la entropía del sistema. Por lo tanto, es razonable concluir que existe una relación cuantitativa entre la probabilidad y la entropía. Esta relación, que fue propuesta por Boltzmann, es

$$S = k \ln P. \quad (32)$$

Aquí k es la constante de Boltzmann, y S es la entropía del sistema. P , para definirla vagamente, es el número de ordenamientos moleculares diferentes que corresponden al mismo estado macroscópico. Si, por ejemplo, las circunstancias son tan especiales que únicamente es posible un ordenamiento, entonces $P = 1$ y $S (= k \ln P) = 0$, y tenemos un estado completamente ordenado. Los valores de P más grandes, como el que corresponde a la distribución más uniforme de las moléculas en el recipiente, dan valores de entropía más grandes. Cuando decimos que el estado A de un sistema es más probable que el estado B , queremos decir simplemente que el estado A tiene el valor de P más grande.

Se ha dicho también que un aumento en la entropía es una medida del aumento en el desorden de un sistema, y entonces la entropía es, en efecto, una medida del desorden. El término "desorden" no tiene una definición matemática precisa, sino que se relaciona cualitativamente con la probabilidad. Un estado de desorden bajo es un estado en el que las componentes de un sistema han sido distribuidas cuidadosamente, como colocando a todas las moléculas con velocidades bajas en una parte de un sistema. Un estado de desorden alto es un estado al azar en el que no ha ocurrido ninguna distribución. El aumento en la entropía de un sistema en los procesos naturales puede entonces considerarse también como un aumento en el nivel de desorden del sistema. Los procesos naturales tienden a hacer al universo más desordenado.*

* Para una relación de intentos de violar la segunda ley, incluyendo al diablo de Maxwell y un diseño de una máquina térmica perfecta en la que la sustancia de operación es una molécula de un gas, véase, "Demons, Engines, and the Second Law", por Charles H. Bennet, *Scientific American*, noviembre de 1987, pág. 108.

La segunda ley de la termodinámica nos dice que, si un sistema aislado experimenta un proceso espontáneo, su estado final será uno en el que la entropía (y también P) es máxima. Existe siempre (en principio) la posibilidad de que, debido a una fluctuación estadística, pueda ocurrir algún otro estado, incluso un estado cuya entropía sea más baja que la del estado inicial. En sistemas con un número de partículas muy pequeño, tales fluctuaciones del comportamiento promedio existen, en efecto, siendo un buen ejemplo el movimiento browniano (sección 24-5). En sistemas macroscópicos, sin embargo, la probabilidad de que la entropía crezca realmente en un proceso espontáneo resulta ser increíblemente pequeña. Entonces, podemos predecir con completa seguridad que (1) las moléculas del aire del salón *no* se agruparán

espontáneamente en un lado, (2) un vaso de agua a la temperatura ambiente no se separará espontáneamente en cubos de hielo y agua más templada, y (3) el café no comenzará a girar espontáneamente en la taza. Cada uno de estos procesos puede conservar energía, siendo entonces consistente con la primera ley. Sin embargo, no podremos observarlos, ¡aunque nos quedemos esperando un tiempo tan largo como la edad actual del universo! Se ha dicho que los cálculos de las probabilidades de tales eventos le dan un significado operativo a la palabra "nunca". El área de aplicación de la segunda ley de la termodinámica es tan amplia y la posibilidad de que la naturaleza la contradiga es tan pequeña que cuenta con la distinción de ser una de las leyes más útiles y generales de toda la ciencia.

PREGUNTAS

1. ¿Es el ser humano una máquina térmica? Explique.
2. ¿No podríamos igualmente definir la eficiencia de una máquina como $e = |W|/|Q_{\text{out}}|$ en lugar de $e = |W|/|Q_{\text{in}}|$? ¿Por qué no podemos?
3. Las eficiencias de las plantas de potencia nuclear son menores que las de las plantas de combustibles fósiles. ¿Por qué?
4. ¿Puede una cantidad dada de energía mecánica ser convertida completamente en energía térmica? De ser así, dé un ejemplo.
5. Un inventor sugirió que una casa podría calentarse de la manera siguiente. Un sistema que se asemeje a un refrigerador extrae calor de la Tierra y lo descarga en la casa. El inventor afirmó que el calor abastecido a la casa podía sobrepasar al trabajo efectuado por la máquina del sistema. ¿Usted qué opina?
6. Comente la aseveración: "Una máquina térmica convierte movimiento mecánico desordenado en movimiento mecánico organizado".
7. ¿Es posible el concepto de que una máquina térmica opere entre el agua de la superficie templada de un mar tropical y el agua más fría bajo la superficie? ¿Es práctica la idea? (Véase "Solar Sea Power", por Clarence Zener, *Physics Today*, enero de 1973, pág. 48).
8. Dé una explicación cualitativa de cómo producen energía interna las fuerzas de fricción entre superficies móviles. ¿Por qué no ocurre el procedimiento inverso (que la energía interna produzca un movimiento relativo de esas superficies)?
9. ¿Son reversibles alguno de los fenómenos siguientes: (a) la rotura de una botella de refresco vacía; (b) el mezclado de un coctel; (c) dar cuerda a un reloj; (d) fundir un cubo de hielo en un vaso de té helado; (e) quemar un leño; (f) ponchar una llanta de automóvil; (g) calentar eléctricamente un bloque de metal con aislamiento; (h) expandir isotérmicamente un gas no ideal contra un émbolo; (i) terminar la "Sinfonía Inconclusa"; (j) escribir este libro?
10. Dé algunos ejemplos de procesos irreversibles en la naturaleza.
11. ¿Existen procesos naturales que sean reversibles?
12. ¿Podemos calcular el trabajo efectuado durante un proceso irreversible en términos de un área en un diagrama pV ? ¿Se efectúa algún trabajo?
13. Si una máquina Carnot es independiente de la sustancia de operación, entonces las máquinas reales serían similarmente independientes, hasta un cierto punto. Entonces, ¿por qué para las máquinas reales nos preocupa tanto hallar combustibles apropiados como el carbón, la gasolina, o un material fisionable? ¿Por qué no usar piedras como combustible?
14. ¿En qué condiciones sería una máquina térmica ideal 100% eficiente?
15. ¿Qué factores reducen la eficiencia de una máquina térmica de su valor ideal?
16. Se desea incrementar la eficiencia de una máquina Carnot tanto como sea posible. Podemos hacerlo aumentando T_H a cierta cantidad, manteniendo a T_L constante, o disminuyendo T_L en la misma cantidad y manteniendo a T_H constante. ¿Cuál elegiría usted?
17. Explique por qué una habitación puede calentarse dejando abierta la puerta de un horno, pero no puede enfriarse dejando abierta la puerta de un refrigerador de cocina.
18. ¿Por qué obtenemos menos kilometraje de la gasolina de nuestro automóvil en invierno que en verano?
19. De vez en cuando los inventores pretenden haber perfeccionado un aparato que efectúe un trabajo útil pero que no consuma combustible (o muy poco). ¿Qué piensa usted que es lo más verosímil en tales casos: (a) los inventores tienen razón, (b) los inventores están equivocados en sus mediciones, o (c) los inventores son unos charlatanes?

- ¿Piensa usted que tal pretensión debería ser examinada a fondo por una mesa de científicos e ingenieros? En su opinión, ¿se justificaría el tiempo y el esfuerzo?
- Hemos visto que las máquinas reales desechan siempre cantidades sustanciales de calor a sus depósitos de baja temperatura. Parece vergonzoso desperdiciar esta energía calorífica. ¿Por qué no usar este calor para mover una segunda máquina, sirviendo el depósito de baja temperatura de la primera máquina como depósito de alta temperatura de la segunda?
 - Dé ejemplos en los que la entropía de un sistema disminuye y explique por qué no se viola la segunda ley de la termodinámica.
 - ¿Violan los seres vivos la segunda ley de la termodinámica? Por ejemplo, cuando un pollito sale de un huevo se vuelve cada vez más ordenado y organizado. Sin embargo, el aumento de la entropía requiere desorden y decadencia. ¿Está disminuyendo realmente la entropía del pollito mientras crece?
 - Dos recipientes de gases a diferentes temperaturas están aislados del entorno y separados entre sí por una división que permite un intercambio de calor. ¿Qué tendría que pasar si la entropía fuese a disminuir? ¿Aumentar? ¿Qué es más probable que pase?
 - ¿Existe un cambio de entropía en los movimientos mecánicos puros?
 - Demuestre que la entropía total crece cuando el trabajo se convierte en calor por la fricción entre superficies deslizantes. Describa el aumento de desorden.
 - Del Sol a la Tierra fluye energía calorífica. Demuestre que la entropía del sistema Tierra-Sol aumenta durante este proceso.
 - ¿Es cierto que la energía calorífica del universo está siendo poco a poco cada vez menos disponible? De ser así, ¿por qué?
 - Considere una caja que contiene un número de moléculas muy pequeño, digamos cinco. Puede suceder a veces, por azar, que todas estas moléculas se hallen en la mitad izquierda de la caja, estando completamente vacía la mitad derecha. Esto es precisamente el inverso de la expansión libre, un proceso que hemos declarado ser *irreversible*. ¿Cuál es su explicación?
 - Una banda de hule se siente más caliente que su entorno inmediatamente después de haber sido estirada con rapidez; resulta marcadamente más fría cuando se deja que se contraiga súbitamente. También, una banda de hule que soporte una carga se contrae al calentarse. Explique estas observaciones usando el hecho de que las moléculas de hule constan de cadenas largas de átomos entrelazados y estrechamente unidos con una orientación al azar.
 - ¿Qué cambio en la entropía ocurre, en caso de que suceda, cuando los 52 naipes de una baraja quedan barajados de un modo particular? ¿Es apropiado en este caso el concepto de entropía? De ser así, explique cómo podría uno obtener un enfriamiento útil llevando a cabo este proceso adiabáticamente.
 - Comente la siguiente opinión de Panofsky y Phillips: "Desde el punto de vista de la física formal existe únicamente un concepto que es asimétrico en el tiempo, a saber, la entropía. Pero esto hace que sea razonable suponer que la segunda ley de la termodinámica puede ser empleada para cerciorarse del sentido del tiempo de manera independiente de cualquier marco de referencia; es decir, tomaremos como dirección positiva del tiempo aquella que sea de un desorden estadísticamente creciente, o de entropía creciente." (Véase, a este respecto, "The Arrow of Time", por David Layzer, *Scientific American*, diciembre de 1975, pág. 56.)
 - Explique la frase: "Los rayos cósmicos disminuyen continuamente la entropía de la Tierra sobre la que inciden." ¿Por qué no contradice esto a la segunda ley de la termodinámica?
 - Cuando ponemos naipes juntos en una baraja o ladrillos juntos para construir una casa, por ejemplo, aumentamos el orden del mundo físico. ¿Viola esto la segunda ley de la termodinámica? Explique.
 - ¿Podemos emplear la termodinámica terrestre, que se sabe se aplica a cuerpos circunscritos y aislados, para todo el universo? De ser así, ¿está el universo limitado y de qué está aislado el universo?
 - La temperatura y la presión son ejemplos de propiedades *intensivas* de un sistema, siendo sus valores para cualquier muestra del sistema independientes del tamaño de la muestra. Sin embargo, la entropía, al igual que la energía interna, es una propiedad *extensiva*, siendo su valor para cualquier muestra de un sistema proporcional al tamaño de la muestra. Comente.
 - La primera, segunda, y tercera leyes de la termodinámica pueden parafrasearse, respectivamente, como sigue: (1) Uno no puede ganar. (2) Ni siquiera puede uno empatar. (3) Uno no puede salirse del juego. Explique en qué sentido son permisibles estas frases comparativas.

PROBLEMAS

Sección 26-2 Máquinas térmicas y la segunda ley

- Una máquina térmica absorbe 52.4 kJ de calor y descarga 36.2 kJ de calor en cada ciclo. Calcule (a) la eficiencia y (b) el trabajo efectuado por la máquina por ciclo.
- Un motor de automóvil desarrolla 8.18 kJ de trabajo por ciclo. (a) Antes de una afinación, la eficiencia es del 25.0%. Calcule, por ciclo, el calor absorbido de la combustión del combustible y el calor descargado a la atmósfera. (b) Después de una afinación, la eficiencia es del 31.0%. ¿Cuáles son los nuevos valores de las cantidades calculadas en (a)?
- Calcule la eficiencia de una planta de potencia por combustible fósil que consume 382 toneladas métricas de car-

bón cada hora para producir trabajo útil a razón de 755 MW. El calor de combustión del carbón es de 28.0 MJ/kg.

4. Dos moles de un gas ideal monoatómico se hacen pasar por el ciclo mostrado en la figura 14. El proceso bc es una expansión adiabática reversible. También, $p_b = 10.4$ atm, $V_b = 1.22$ m³, y $V_c = 9.13$ m³. Calcule (a) el calor añadido al gas, (b) el calor que sale del gas, (c) el trabajo neto efectuado por el gas, y (d) la eficiencia del ciclo.

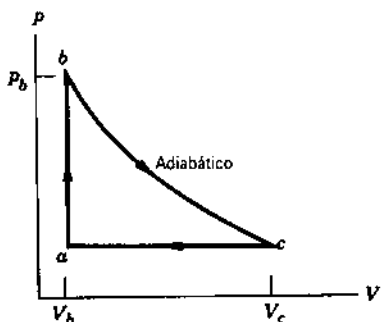


Figura 14 Problema 4.

5. Un mol de un gas monoatómico ideal inicialmente a un volumen de 10 L y una temperatura de 300 K se calienta a volumen constante a la temperatura de 600 K, se deja expandir isotérmicamente a su presión inicial, y finalmente se comprime isobáricamente (es decir, a presión constante) a su volumen, presión, y temperatura originales. (a) Calcule la entrada de calor al sistema durante un ciclo. (b) ¿Cuál es el trabajo neto efectuado por el gas durante un ciclo? (c) ¿Cuál es la eficiencia de este ciclo?
6. Un motor de combustión interna de gasolina puede ser aproximado por el ciclo mostrado en la figura 15. Suponga un gas diatómico ideal y use una relación de compresión de 4:1 ($V_a = 4V_d$). Suponga que $p_b = 3p_a$. (a) Determine la presión y la temperatura en cada uno de los vértices del diagrama pV en términos de p_a y de T_a . (b) Calcule la eficiencia del ciclo.
7. La máquina A, comparada con la máquina B, produce, por ciclo, cinco veces el trabajo pero recibe el triple y descarga el doble de calor. Determine la eficiencia de cada máquina.

Sección 26-3 Refrigeradores y la segunda ley

8. Un refrigerador efectúa 153 J de trabajo para transferir 568 J de calor desde su compartimento frío. (a) Calcule el coeficiente de rendimiento del refrigerador. (b) ¿Cuánto calor es descargado a la cocina?
9. Para hacer hielo, un congelador extrae 185 kJ de calor a -12.0°C . El congelador tiene un coeficiente de rendimiento de 5.70. La temperatura ambiente es 26.0°C . (a) ¿Cuánto calor fue abastecido a la habitación? (b) ¿Cuánto trabajo se requirió para hacer funcionar el congelador?

Sección 26-4 El ciclo de Carnot

10. Cuánto trabajo debe efectuarse para extraer 10.0 J de calor (a) de un depósito a 7°C y transferirlo a otro a 27°C por

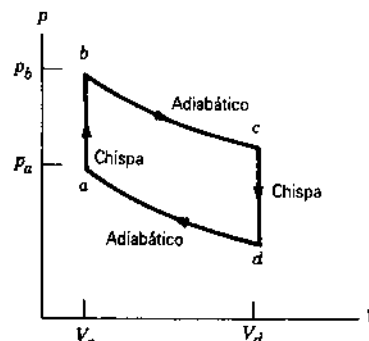


Figura 15 Problema 6.

medio de un refrigerador usando un ciclo de Carnot; (b) de uno a -73°C a otro a 27°C ; (c) de uno a -173°C a otro a 27°C ; y (d) de uno a -223°C a otro a 27°C ?

11. En un ciclo de Carnot, la expansión isotérmica de un gas ideal tiene lugar a 412 K y la compresión isotérmica a 297 K. Durante la expansión se transfieren al gas 2090 J de energía calorífica. Determine (a) el trabajo llevado a cabo por el gas durante la expansión isotérmica, (b) el calor rechazado por el gas durante la compresión isotérmica, y (c) el trabajo efectuado sobre el gas durante la compresión isotérmica.
12. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia de 22%. Opera entre depósitos de calor cuya temperatura difiere en 75°C . Halle las temperaturas de los depósitos.
13. Para el ciclo de Carnot ilustrado en la figura 7, demuestre que el trabajo efectuado por el gas durante el proceso bc (etapa 2) tiene el mismo valor absoluto que el trabajo efectuado sobre el gas durante el proceso da (etapa 4).
14. Un aparato que licua helio está en un laboratorio a 296 K. El helio en el aparato está a 4.0 K. Si se transfieren 150 mJ de calor del helio, halle la cantidad mínima de calor abastecido al laboratorio.
15. Un acondicionador de aire toma aire de una habitación a 70°F y lo transfiere al exterior, el cual está a 95°F . ¿Cuántos joules de calor se transfieren de la habitación por cada joule de energía eléctrica necesaria para hacer funcionar al refrigerador?
16. Un inventor pretende haber creado una bomba de calor que extrae calor de un lago a 3.0°C y abastece calor a razón de 20 kW a un edificio a 35°C , empleando únicamente 1.9 kW de potencia eléctrica. ¿Cómo juzga usted esta pretensión?
17. (a) Una máquina Carnot opera entre un depósito caliente a 322 K y un depósito frío a 258 K. Si absorbe 568 J de calor por ciclo del depósito caliente, ¿cuánto trabajo por ciclo abastece? (b) Si la misma máquina, trabajando en sentido inverso, funciona como un refrigerador entre los mismos dos depósitos, ¿cuánto trabajo por ciclo debe ser suministrado para transferir 1230 J de calor del depósito frío?
18. Se usa una bomba de calor para calentar un edificio. La temperatura del exterior es de -5.0°C y la temperatura dentro del edificio debe mantenerse a 22°C . El coeficiente

de rendimiento es 3.8, y la bomba suministra 7.6 MJ de calor al edificio cada hora. ¿A qué razón debe efectuarse trabajo para hacer funcionar la bomba?

19. Si un ciclo de Carnot se recorre en sentido inverso, tenemos un refrigerador ideal. Se absorbe una cantidad de calor $|Q_L|$ a la temperatura T_L más baja y se suministra una cantidad de calor $|Q_H|$ a la temperatura T_H más alta. La diferencia es el trabajo W que debe ser abastecido para hacer funcionar al refrigerador. (a) Demuestre que

$$|W| = |Q_L| \frac{T_H - T_L}{T_L}$$

(b) El coeficiente de rendimiento K de un refrigerador se define como la razón del calor extraído de la fuente fría al trabajo necesario para hacer funcionar al refrigerador. Demuestre que, idealmente,

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L}$$

(c) En un refrigerador mecánico el serpentín de baja temperatura está a una temperatura de -13°C y el gas comprimido en el condensador tiene una temperatura de 25°C . Halle el coeficiente teórico de rendimiento.

20. El motor de un refrigerador tiene una potencia de salida de 210 W. El compartimiento de congelar está a -3.0°C y el aire exterior está a 26°C . Suponiendo que la eficiencia sea el 85% de la ideal, calcule la cantidad de calor que puede ser extraído del compartimiento de congelar en 15 min.
21. Demuestre que la eficiencia de una máquina térmica reversible ideal se relaciona con el coeficiente de rendimiento del refrigerador reversible obtenido al hacer marchar el motor en reversa según la relación $e = 1/(K + 1)$.
22. (a) En una máquina térmica de Carnot de dos tiempos, se absorbe una cantidad de calor $|Q_1|$ a una temperatura T_1 , se efectúa un trabajo $|W_1|$, y se descarga una cantidad de calor $|Q_2|$ a una temperatura más baja T_2 durante el primer tiempo. El segundo tiempo absorbe el calor cargado por el primero, efectúa el trabajo $|W_2|$, y descarga una cantidad de calor $|Q_3|$ a la temperatura T_3 más baja. Demuestre que la eficiencia de la combinación es $(T_1 - T_3)/T_1$. (b) Una combinación mercurio-turbina de vapor aspira vapor de mercurio saturado de una caldera a 469°C y lo descarga para calentar una caldera de vapor a 238°C . La turbina de vapor recibe el vapor a esta temperatura y lo descarga a un condensador a 37.8°C . Calcule la eficiencia máxima de la combinación.
23. Una máquina de Carnot trabaja entre las temperaturas T_1 y T_2 . Impulsa a un refrigerador de Carnot que trabaja entre dos temperaturas diferentes T_3 y T_4 (véase la Fig. 16). Halle la razón $|Q_3|/|Q_1|$ en términos de las cuatro temperaturas.
24. Un inventor pretende haber inventado cuatro máquinas, cada una de las cuales opera entre depósitos de calor a 400 y 300 K. Los datos de cada máquina, por ciclo de operación, son como sigue: Máquina A: $Q_{in} = 200 \text{ J}$, $Q_{out} = -175 \text{ J}$, $W = 40 \text{ J}$; máquina B: $Q_{in} = 500 \text{ J}$, $Q_{out} = -200 \text{ J}$, $W = 400 \text{ J}$; máquina C: $Q_{in} = 600 \text{ J}$, $Q_{out} = -200 \text{ J}$, $W = 400 \text{ J}$; máquina D: $Q_{in} = 100 \text{ J}$, $Q_{out} = -90 \text{ J}$, $W = 10 \text{ J}$. ¿Qué

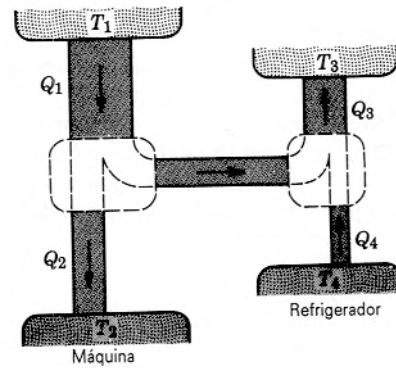


Figura 16 Problema 23.

ley, de la termodinámica la primera o la segunda viola cada máquina?

25. En una locomotora de vapor, entra a los cilindros vapor a una presión de caldera de 16.0 atm, se expande adiabáticamente a 5.60 veces su volumen original, y luego escapa a la atmósfera. Calcule (a) la presión del vapor después de la expansión y (b) la mayor eficiencia posible de la máquina.
26. (a) Trace con precisión un ciclo de Carnot en un diagrama pV para un mol de un gas ideal. El punto a (véase la Fig. 7) corresponde a $p = 1.00 \text{ atm}$, $T = 300 \text{ K}$, y el punto b corresponde a 0.500 atm , $T = 300 \text{ K}$; considere que el depósito de baja temperatura está a 100 K . Sea $\gamma = 1.67$. (b) Calcule gráficamente el trabajo efectuado en este ciclo. (c) Calcule el trabajo analíticamente.
27. Un mol de un gas monoatómico ideal se emplea como la sustancia en una máquina que opera según el ciclo mostrado en la figura 17. Calcule (a) el trabajo efectuado por la máquina por ciclo, (b) el calor añadido por ciclo durante la carrera de expansión abc , y (c) la eficiencia de la máquina. (d) ¿Cuál es la eficiencia Carnot de una máquina que opera entre las temperaturas más alta y más baja presentes en el ciclo? ¿Cómo se compara ésta con la eficiencia calculada en (c)? Suponga que $p_1 = 2p_0$, $V_1 = 2V_0$, $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, y $V_0 = 0.0225 \text{ m}^3$.

Sección 26-6 Entropía: procesos reversibles

28. En la figura 12c, supongamos que el cambio en la entropía del sistema al pasar del estado a al estado b a lo largo de

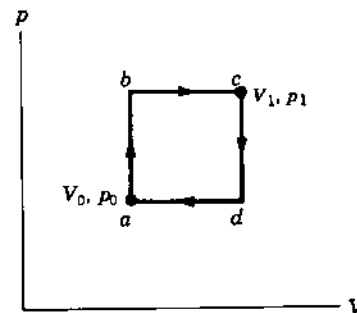


Figura 17 Problema 27.

la trayectoria 1 es $+0.60 \text{ J/K}$. ¿Cuál es el cambio de la entropía al pasar (a) del estado a al estado b a lo largo de la trayectoria 2 y (b) del estado b al estado a a lo largo de la trayectoria 2?

29. Un gas ideal experimenta una expansión isotérmica reversible a 132°C . La entropía del gas aumenta en 46.2 J/K . ¿Cuánto calor fue absorbido?
30. Se hace que cuatro moles de un gas ideal se expandan de un volumen V_1 a un volumen $V_2 = 3.45V_1$. (a) Si la expansión es isotérmica a la temperatura $T = 410 \text{ K}$, halle el trabajo efectuado sobre el gas al expandirse. (b) Halle el cambio en la entropía, de haber alguno. (c) Si la expansión fuese reversiblemente adiabática en lugar de isotérmica, ¿cuál es el cambio en la entropía?
31. (a) Demuestre que un ciclo de Carnot, graficado sobre un diagrama de temperatura versus contra entropía (TS), es un rectángulo. Para el ciclo de Carnot mostrado en la figura 18, calcule (b) el calor que entra y (c) el trabajo efectuado sobre el sistema.

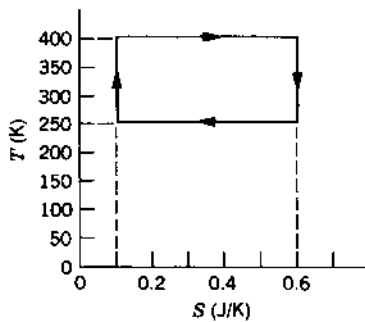


Figura 18 Problema 31.

32. Halle (a) el calor absorbido y (b) el cambio en entropía de un bloque de cobre de 1.22 kg cuya temperatura aumenta reversiblemente de 25.0 hasta 105°C .
33. A temperaturas muy bajas, el calor específico molar de muchos sólidos es (aproximadamente) proporcional a T^3 ; es decir, $C_v = AT^3$, donde A depende de la sustancia en particular. Para el aluminio, $A = 3.15 \times 10^{-3} \text{ J/mol} \cdot \text{K}^4$. Halle el cambio de entropía de 4.8 mol de aluminio cuando su temperatura se eleva de 5.0 a 10 K .
34. Puede transferirse calor del agua a 0°C , a la presión atmosférica, sin provocar que el agua se congele, si se hace con poca agitación del agua. Suponga que el agua se enfría a -5.0°C antes de que el hielo comience a formarse. Halle el cambio en entropía que ocurre durante la congelación súbita de 1.0 g de agua que tiene lugar entonces.
35. Un objeto de capacidad calorífica constante C se calienta de una temperatura inicial T_i a una temperatura final T_f al ponerse en contacto con un depósito a T_r . Represente el proceso en una gráfica de C/T contra T y demuestre gráficamente que el cambio total ΔS en la entropía (objeto + depósito) es positivo y (b) demuestre cómo el uso de depósitos a temperaturas intermedias permite que el proceso se lleve a cabo de una manera que haga a ΔS tan pequeña como se desee.

36. Se hace que un mol de un gas monoatómico ideal recorra el ciclo mostrado en la figura 19. (a) ¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el gas al expandirlo de a a c a lo largo de la trayectoria abc ? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna y en la entropía al pasar de b a c ? (c) ¿Cuál es el cambio en la energía interna y en la entropía al pasar por un ciclo completo? Exprese todas las respuestas en términos de la presión p_0 y del volumen V_0 en el punto a del diagrama.

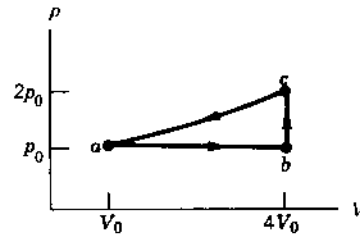


Figura 19 Problema 36.

Sección 26-7 Entropía: procesos irreversibles

37. Un gas ideal experimenta una expansión isotérmica a 77°C , aumentando su volumen de 1.3 a 3.4 L . El cambio de entropía del gas es de 24 J/K . ¿Cuántos moles de gas están presentes?
38. Suponga que se trasfiere la misma cantidad de energía calorífica, digamos 260 J , por conducción de un depósito térmico a una temperatura de 400 K a otro depósito, cuya temperatura es (a) 100 K ; (b) 200 K ; (c) 300 K , y (d) 360 K . Calcule los cambios en la entropía y explique la tendencia.
39. Una barra de latón está en contacto térmico con un depósito de calor a 130°C en un extremo y un depósito de calor a 24.0°C en el otro extremo. (a) Calcule el cambio total en la entropía que surge del proceso de conducción de 1200 J de calor a través de la barra. (b) ¿Cambia la entropía de la barra durante el proceso?
40. Se hace que un mol de un gas diatómico ideal recorra el ciclo mostrado en el diagrama pV de la figura 20 donde $V_2 = 3V_1$. Determine, en términos de p_1 , V_1 , T_1 , y R : (a) p_2 , p_3 , y T_3 y (b) W , Q , ΔE_{int} , y ΔS para los tres procesos.

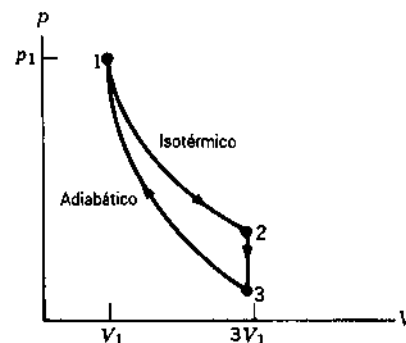


Figura 20 Problema 40.

41. Un mol de un gas monoatómico ideal es llevado de un estado inicial de presión p_0 y volumen V_0 a un estado final de presión $2p_0$ y volumen $2V_0$ por dos procesos diferentes. (I) Se expande isotérmicamente hasta que su volumen se duplica, y luego se aumenta su presión a volumen constante hasta el estado final. (II) Se le comprime isotérmicamente hasta que su presión se duplica, y luego se aumenta su volumen a presión constante hasta el estado final. Muestre la trayectoria de cada proceso en un diagrama pV . Calcule para cada proceso, en términos de p_0 y de V_0 : (a) el calor absorbido por el gas en cada parte del proceso; (b) el trabajo efectuado sobre el gas en cada parte del proceso; (c) el cambio en la energía interna del gas, $E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i}$; y (d) el cambio en la entropía del gas, $S_f - S_i$.

Sección 26-8 Entropía y la segunda ley

42. Un bloque de cobre de 50.0 g que tiene una temperatura de 400 K se sitúa en una caja aislante con un bloque de plomo de 100 g que tiene una temperatura de 200 K. (a) ¿Cuál es la temperatura de equilibrio de este sistema de dos bloques? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del sistema de los dos bloques al cambiar de la condición inicial a la condición de equilibrio? (c) ¿Cuál es el cambio en la entropía del sistema de los dos bloques? (Véase la tabla 1 en el capítulo 25.)
43. Una mezcla de 1.78 kg de agua y 262 g de hielo a 0°C se lleva, en un proceso reversible, a un estado final de equilibrio donde la relación agua/hielo, por masa, es de 1:1 a 0°C . (a) Calcule el cambio de entropía del sistema durante el proceso. (b) El sistema es luego regresado al primer estado de equilibrio, pero de un modo irreversible (haciendo uso de un quemador Bunsen, por ejemplo). Calcule el cambio de entropía del sistema durante este proceso. (c) Demuestre que su respuesta es consistente con la segunda ley de la termodinámica.
44. En un experimento de calor específico se mezclan 196 g de aluminio a 107°C con 52.3 g de agua a 18.6°C . (a) Calcule la temperatura de equilibrio. Halle el cambio de entropía de (b) el aluminio y (c) el agua. (d) Calcule el cambio de entropía del sistema. (Sugerencia: Véanse las Ec. 29 y 30).
45. Un cubo de hielo de 12.6 g a -10.0°C se coloca en un lago cuya temperatura es de $+15.0^\circ\text{C}$. Calcule el cambio en la entropía del sistema cuando el cubo de hielo llegue al equilibrio térmico con el lago. (Sugerencia: ¿Afectará el cubo de hielo la temperatura del lago?)