

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

binario, octal y hexadecimal

Sistemas de numeración

Sistema de numeración decimal

Sistema de numeración binario

Conversión entre números decimales y binarios

El tamaño de las cifras binarias

Conversión de binario a decimal

Sistema de numeración octal

Conversión de un número decimal a octal

Conversión octal a decimal

Sistema de numeración hexadecimal

Conversión de números binarios a octales y viceversa

Conversión de números binarios a hexadecimales y viceversa

Sistemas de numeración

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que permiten representar datos numéricos. Los sistemas de numeración actuales son sistemas posicionales, que se caracterizan porque ***un símbolo tiene distinto valor según la posición que ocupa en la cifra.***

1. Sistema de numeración decimal:

El sistema de numeración que utilizamos habitualmente es el **decimal**, que se compone de diez símbolos o dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) a los que otorga un valor **dependiendo de la posición** que ocupen en la cifra: unidades, decenas, centenas, millares, etc.

El valor de cada dígito está asociado al de una potencia de base 10, número que coincide con la cantidad de símbolos o dígitos del sistema decimal, y un exponente igual a la posición que ocupa el dígito menos uno, contando desde la derecha.

En el sistema decimal el número **528**, por ejemplo, significa:

5 centenas + 2 decenas + 8 unidades, es decir:

$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$ o, lo que es lo mismo:

$$500 + 20 + 8 = 528$$

En el caso de números con decimales, la situación es análoga aunque, en este caso, algunos exponentes de las potencias serán negativos, concretamente el de los dígitos colocados a la derecha del separador decimal. Por ejemplo, el número **8245,97** se calcularía como:

8 millares + 2 centenas + 4 decenas + 5 unidades + 9 décimos +
7 céntimos

$8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$, es decir:

$$8000 + 200 + 40 + 5 + 0,9 + 0,07 = 8245,97$$

Sistema de numeración binario.

El sistema de numeración binario utiliza sólo dos dígitos, el **cero** (0) y el **uno** (1).

En una cifra binaria, cada dígito tiene distinto valor dependiendo de la posición que ocupe. El valor de cada posición es el de una potencia de **base 2**, elevada a un exponente igual a la posición del dígito menos uno. Se puede observar que, tal y como ocurría con el sistema decimal, la base de la potencia coincide con la cantidad de dígitos utilizados (2) para representar los números.

De acuerdo con estas reglas, el número binario **1011** tiene un valor que se calcula así:

$$1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0, \text{ es decir:}$$

$$8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

y para expresar que ambas cifras describen la misma cantidad lo escribimos así:

$$1011_2 = 11_{10}$$

2. Conversión entre números decimales y binarios

Convertir un número decimal al sistema binario es muy sencillo: basta con realizar **divisiones sucesivas por 2** y escribir los restos obtenidos en cada división **en orden inverso** al que han sido obtenidos.

Por ejemplo, para convertir al sistema binario el número 77_{10} haremos una serie de divisiones que arrojarán los restos siguientes:

$$77 : 2 = 38 \text{ Resto: } 1$$

$$38 : 2 = 19 \text{ Resto: } 0$$

$$19 : 2 = 9 \text{ Resto: } 1$$

$$9 : 2 = 4 \text{ Resto: } 1$$

$$4 : 2 = 2 \text{ Resto: } 0$$

$$2 : 2 = 1 \text{ Resto: } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ Resto: } 1$$

y, tomando los restos en orden inverso obtenemos la cifra binaria:

$$77_{10} = 1001101_2$$

Ejercicio 1:

Expresa, en código binario, los números decimales siguientes: **191, 25, 67, 99, 135, 276**

i. El tamaño de las cifras binarias

La cantidad de dígitos necesarios para representar un número en el sistema binario es mayor que en el sistema decimal. En el ejemplo del párrafo anterior, para representar el número **77**, que en el sistema decimal está compuesto tan sólo por dos dígitos, han hecho falta siete dígitos en binario.

Para representar números grandes harán falta muchos más dígitos. Por ejemplo, para representar números mayores de 255 se necesitarán más de ocho dígitos, porque $2^8 = 256$ y podemos afirmar, por tanto, que 255 es el número más grande que puede representarse con ocho dígitos.

Como regla general, con n dígitos binarios pueden representarse un máximo de 2^n , números. El número más

grande que puede escribirse con n dígitos es una unidad menos, es decir, $2^n - 1$. Con cuatro bits, por ejemplo, pueden representarse un total de **16** números, porque $2^4 = 16$ y el mayor de dichos números es el **15**, porque $2^4 - 1 = 15$.

Ejercicio 2:

Averigua cuántos números pueden representarse con 8, 10, 16 y 32 bits y cuál es el número más grande que puede escribirse en cada caso.

Ejercicio 3:

Dados dos números binarios: **01001000** y **01000100** ¿Cuál de ellos es el mayor? ¿Podrías compararlos sin necesidad de convertirlos al sistema decimal?

3. Conversión de binario a decimal

El proceso para convertir un número del sistema binario al decimal es aún más sencillo; basta con desarrollar el número, teniendo en cuenta el valor de cada dígito en su posición, que es el de una potencia de 2, cuyo exponente es 0 en el bit situado más a la derecha, y se incrementa en una unidad según vamos avanzando posiciones hacia la izquierda.

Por ejemplo, para convertir el número binario **1010011₂** a decimal, lo desarrollamos teniendo en cuenta el valor de cada bit:

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 83$$

$$1010011_2 = 83_{10}$$

Ejercicio 4:

Expresa, en el sistema decimal, los siguientes números binarios: **110111**, **111000**, **010101**, **101010**, **1111110**

Sistema de numeración octal

El inconveniente de la codificación binaria es que la representación de algunos números resulta muy larga. Por este motivo se utilizan otros sistemas de numeración que resulten

más cómodos de escribir: el sistema octal y el sistema hexadecimal. Afortunadamente, resulta muy fácil convertir un número binario a octal o a hexadecimal.

En el sistema de numeración octal, los números se representan mediante **ocho** dígitos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Cada dígito tiene, naturalmente, un valor distinto dependiendo del lugar que ocupen. El valor de cada una de las posiciones viene determinado por las potencias de base 8.

Por ejemplo, el número octal **273₈** tiene un valor que se calcula así:

$$2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 = 2 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 3 \cdot 8 = 1496_{10}$$

$$273_8 = 1496_{10}$$

4. Conversión de un número decimal a octal

La conversión de un número decimal a octal se hace con la misma técnica que ya hemos utilizado en la conversión a binario, mediante divisiones sucesivas **por 8** y colocando los restos obtenidos **en orden inverso**. Por ejemplo, para escribir en octal el número decimal **122₁₀** tendremos que hacer las siguientes divisiones:

$$122 : 8 = 15 \quad \text{Resto: } 2$$

$$15 : 8 = 1 \quad \text{Resto: } 7$$

$$1 : 8 = 0 \quad \text{Resto: } 1$$

Tomando los restos obtenidos en orden inverso tendremos la cifra octal:

$$122_{10} = 172_8$$

Ejercicio 5:

Convierte los siguientes números decimales en octales: **63₁₀**, **513₁₀**, **119₁₀**

5. Conversión octal a decimal

La conversión de un número octal a decimal es igualmente sencilla, conociendo el peso de cada posición en una cifra octal. Por ejemplo, para convertir el número 237_8 a decimal basta con desarrollar el valor de cada dígito:

$$2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 128 + 24 + 7 = 159_{10}$$

$$237_8 = 159_{10}$$

Ejercicio 6:

Convierte al sistema decimal los siguientes números octales: 45_8 , 125_8 , 625_8

Sistema de numeración hexadecimal

En el sistema **hexadecimal** los números se representan con dieciséis símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F. Se utilizan los caracteres A, B, C, D, E y F representando las cantidades decimales 10, 11, 12, 13, 14 y 15 respectivamente, porque no hay dígitos mayores que 9 en el sistema decimal. El valor de cada uno de estos símbolos depende, como es lógico, de su posición, que se calcula mediante potencias de base 16.

Calculemos, a modo de ejemplo, el valor del número hexadecimal $1A3F_{16}$:

$$1A3F_{16} = 1 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0$$

$$1 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 3 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 6719$$

$$1A3F_{16} = 6719_{10}$$

Ejercicio 7:

Expresa en el sistema decimal las siguientes cifras hexadecimales: $2BC5_{16}$, 100_{16} , $1FF_{16}$

Ensayemos, utilizando la técnica habitual de divisiones sucesivas, la conversión de un número decimal a hexadecimal.

Por ejemplo, para convertir a hexadecimal del número 1735_{10} será necesario hacer las siguientes divisiones:

$$1735 : 16 = 108 \quad \text{Resto: } 7$$

$$108 : 16 = 6 \quad \text{Resto: } \mathbf{C} \text{ es decir, } 12_{10}$$

$$6 : 16 = 0 \quad \text{Resto: } 6$$

De ahí que, tomando los restos en orden inverso, resolvemos el número en hexadecimal:

$$1735_{10} = 6C7_{16}$$

Ejercicio 8:

Convierte al sistema hexadecimal los siguientes números decimales: 3519_{10} , 1024_{10} , 4095_{10}

6. Conversión de números binarios a octales y viceversa

Observa la tabla siguiente, con los siete primeros números expresados en los sistemas decimal, binario y octal:

| DECIMAL | BINARIO | OCTAL |
|---------|---------|-------|
| 0 | 000 | 0 |
| 1 | 001 | 1 |
| 2 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |

Cada dígito de un número octal se representa con tres dígitos en el sistema binario. Por tanto, el modo de convertir un número entre estos sistemas de numeración equivale a "expandir" cada dígito octal a tres dígitos binarios, o en "contraer" grupos de tres caracteres binarios a su correspondiente dígito octal.

Por ejemplo, para convertir el número binario 101001011_2 a

octal tomaremos grupos de tres bits y los sustituiremos por su equivalente octal:

$$101_2 = 5_8$$

$$001_2 = 1_8$$

$$011_2 = 3_8$$

y, de ese modo: $101001011_2 = 513_8$

Ejercicio 9:

Convierte los siguientes números binarios en octales: 1101101_2 , 101110_2 , 11011011_2 , 101101011_2

La conversión de números octales a binarios se hace, siguiendo el mismo método, reemplazando cada dígito octal por los tres bits equivalentes. Por ejemplo, para convertir el número octal 7508 a binario, tomaremos el equivalente binario de cada uno de sus dígitos:

$$7_8 = 111_2$$

$$5_8 = 101_2$$

$$0_8 = 000_2$$

y, por tanto: $750_8 = 111101000_2$

Ejercicio 10:

Convierte los siguientes números octales en binarios: 25_8 , 372_8 , 2753_8

7. Conversión de números binarios a hexadecimales y viceversa

Del mismo modo que hallamos la correspondencia entre números octales y binarios, podemos establecer una equivalencia directa entre cada dígito hexadecimal y cuatro dígitos binarios, como se ve en la siguiente tabla:

| DECIMAL | BINARIO | HEXADECIMAL |
|---------|---------|-------------|
| 0 | 0000 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 |

| DECIMAL | BINARIO | HEXADECIMAL |
|---------|---------|-------------|
| 2 | 0010 | 2 |
| 3 | 0011 | 3 |
| 4 | 0100 | 4 |
| 5 | 0101 | 5 |
| 6 | 0110 | 6 |
| 7 | 0111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | A |
| 11 | 1011 | B |
| 12 | 1100 | C |
| 13 | 1101 | D |
| 14 | 1110 | E |
| 15 | 1111 | F |

La conversión entre números hexadecimales y binarios se realiza "expandiendo" o "contrayendo" cada dígito hexadecimal a cuatro dígitos binarios. Por ejemplo, para expresar en hexadecimal el número binario 101001110011_2 bastará con tomar grupos de cuatro bits, empezando por la derecha, y reemplazarlos por su equivalente hexadecimal:

$$1010_2 = A_{16}$$

$$0111_2 = 7_{16}$$

$$0011_2 = 3_{16}$$

$$\text{y, por tanto: } 101001110011_2 = A73_{16}$$

En caso de que los dígitos binarios no formen grupos completos de cuatro dígitos, se deben añadir ceros a la izquierda hasta completar el último grupo. Por ejemplo:

$$101110_2 = 00101110_2 = 2E_{16}$$

Ejercicio 11:

Convierte a hexadecimales los siguientes números binarios:

$$1010100101011101010_2, 111000011110000_2, 1010000111010111_2$$

La conversión de números hexadecimales a binarios se hace del mismo modo, reemplazando cada dígito hexadecimal por los cuatro bits equivalentes de la tabla. Para convertir a binario, por ejemplo, el número hexadecimal **1F6**₁₆ hallaremos en la tabla las siguientes equivalencias:

$$\mathbf{1}_{16} = \mathbf{0001}_2$$

$$\mathbf{F}_{16} = \mathbf{1111}_2$$

$$\mathbf{6}_{16} = \mathbf{0110}_2$$

$$\text{y, por tanto: } \mathbf{1F6}_{16} = \mathbf{00011110110}_2$$