

CURSO TOPOGRAFIA 2

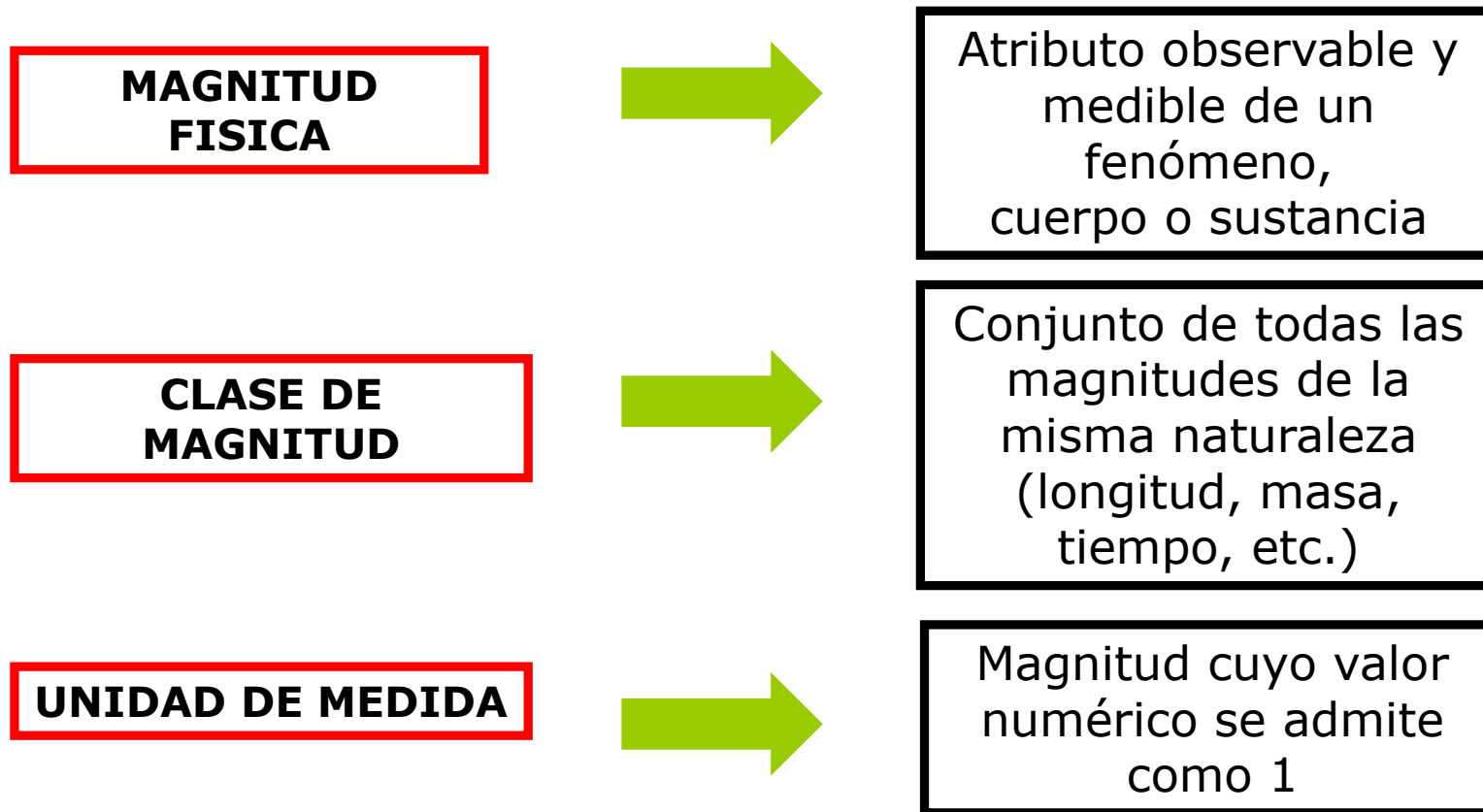
2º Semestre 2022

DOCENTES:

Ing. Agrim. MAGALI MARTINEZ – Ing. Agrim. MARTIN WAINSTEIN

5_REPASO DE TERORIA DE ERRORES

TOPOGRAFIA 2



Existen varios *sistemas de unidades de medidas*. Nosotros usamos el **S.I.** (Sistema Internacional).

MEDIR:

- “Conjunto de operaciones que tiene por objeto determinar el valor de una magnitud física”
- Implica comparar cierta magnitud con su unidad (patrón), con el fin de averiguar cuantas veces la primera contiene a la segunda.
- La medida, en la práctica, se encuentra siempre afectada de un error.

MEDIDA:

- **ANALOGICA:** Se presenta en forma continua, traduciendo de algún modo la magnitud da medir en otra mas directamente perceptible por los sentidos

Ej.: Lectura en regla graduada.

- **DIGITAL:** Se presenta en forma discontinua, mediante una serie de cifras.

Ej.: Visor de la Estación Total.

TOPOGRAFIA 2



TOPOGRAFIA 2

PROCESO



CONOCER EL VALOR



Puede ser
SIMPLE o **COMPLEJO**



MEDIDA

- Valor final del proceso
- Matemáticamente es una **VARIABLE**
- El **ERROR** es la magnitud de esa variación

CARACTERISTICAS DE LA MEDIDA

- Ninguna medida es exacta.
- Toda medida esta afectada de errores.
- Nunca se conoce el verdadero valor de una dimensión.
- El error exacto que se comete en cualquier medida es siempre desconocido.

TOPOGRAFIA 2

- ✓ La **TEORIA DE LAS OBSERVACIONES** trata acerca de las **MEDIDAS** (observaciones).
- ✓ Las **operaciones de agrimensura** buscan alcanzar un **MODELO MATEMATICO** que represente la realidad.
- ✓ Para ello se usa la **TEORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADISTICA**, donde las medidas son tratadas como **VARIABLES ALEATORIAS**.

- Grados de libertad
- Número de observaciones superabundantes

$$r = n - n_0$$

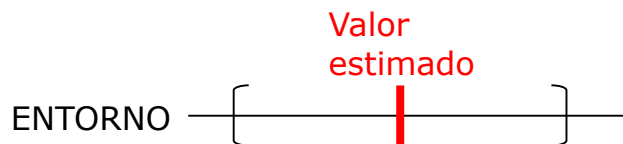
Número total de observaciones

Mínimo número de medidas que definen el modelo matemático.

CONJUNTO DE OBSERVACIONES

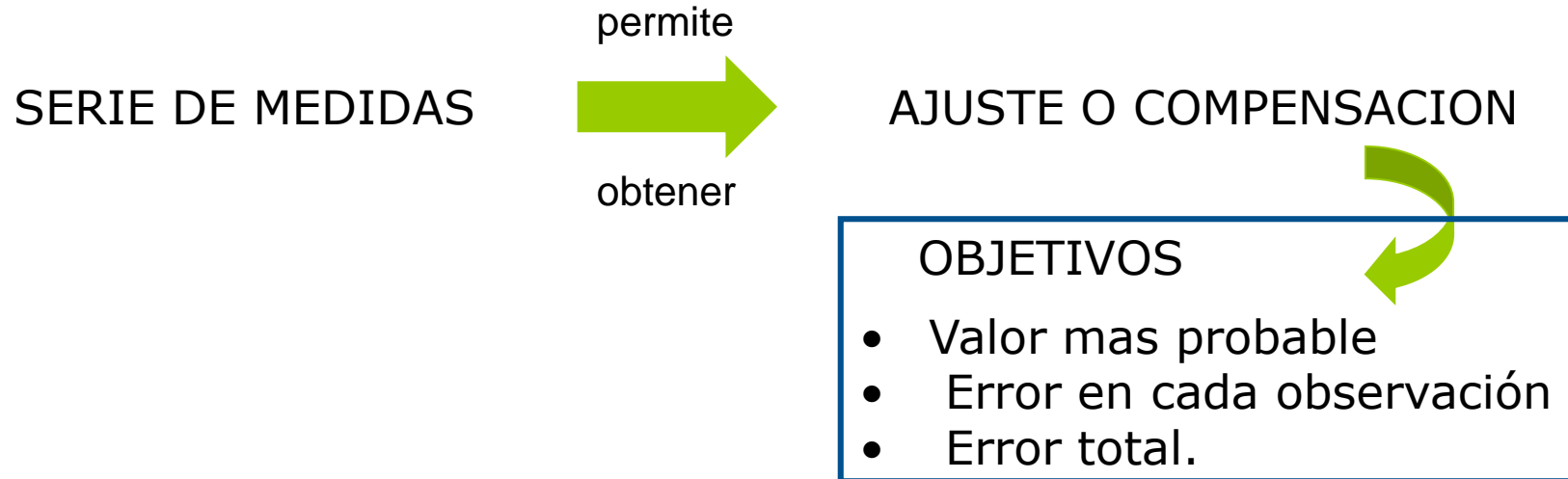
CARACTERISTICAS:

- PRECISION: Grado de conformidad que presenta la serie de medidas entre si.
- EXACTITUD: Grado de conformidad que presenta la serie de medidas en relación al verdadero valor.
- INCERTIDUMBRE: Entorno alrededor de un valor estimado en donde existe determinada probabilidad de que se encuentre el verdadero valor de la magnitud.



$$\text{precisión} \propto \frac{1}{\text{incertidumbre}}$$

CONJUNTO DE OBSERVACIONES



SERIES DE OBSERVACIONES:

- *DIRECTAS*: Surgen de la observación del instrumento.
 - *INDIRECTAS*: Surgen de relaciones analíticas.
-
- *CONDICIONALES*: Mantienen un vinculo que las relaciona, lo que permite determinar el error cometido al combinarlas.
 - *INDEPENDIENTES*: Realizadas en forma autónoma.

CONJUNTO DE OBSERVACIONES

CALIDAD DE LAS
OBSERVACIONES



Depende de diferentes factores, tanto objetivos como subjetivos:



- Precisión del instrumental.
- Condiciones ambientales.
- Visual del observador.
- Experiencia del operador.
- otros.

CANTIDADES APROXIMADAS

147,64 → 5 cifras significativas

0,0044 → 2 cifras significativas

17,710 → 5 cifras significativas

CRITERIOS DE REDONDEO:

- Si la cifra que se omite es <5 , se elimina
- Si la cifra que se omite es ≥ 5 , se incrementa en 1 unidad la ultima cifra retenida
- Otro criterio dice que si la cifra que se omite es igual a 5, depende de la cifra inmediatamente anterior:
 - si es par, se deja igual
 - si es impar, se incrementa en 1 unidad la cifra retenida

CANTIDADES APROXIMADAS

OPERACIONES:

- ADICION: El resultado debe redondearse al numero *mas chico* de decimales.

$$\begin{array}{r}
 165,21 \\
 149,7 \\
 + 65,495 \\
 \hline
 2,2167 \\
 \hline
 382,6217
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 382,6$$

- PRODUCTO: El resultado debe tener el mismo numero de cifras que el que tiene *menos números de cifras significativas* (excluyendo las constantes).

$$\begin{array}{c}
 \text{3 cifras} \qquad \qquad \qquad \text{3 cifras} \\
 \text{2} * (\text{2,15} * \text{11,1234}) = \text{23,9}
 \end{array}$$

CANTIDADES APROXIMADAS

- POTENCIACION Y RADICACION: El resultado debe tener igual numero de cifras significativas que la base.

$$(2,981)^2 = 8.886$$




- CONSTANTES O CANTIDADES EXACTAS: no cuentan.

$$\textcircled{2} * (2,15 * 11,1234) = 23,9$$

↓
constante

CLASIFICACION DE ERRORES

El resultado de una medición es una cantidad *aproximada* y su error esta acotado por la incertidumbre de la medida.

- | | | |
|-------------------|--|-------------|
| 1) EQUIVOCACIONES |  | se ELIMINAN |
| 2) SISTEMATICOS |  | se CORRIGEN |
| 3) ALEATORIOS |  | se PROCESAN |

1) ERRORES GROSEROS O EQUIVOCACIONES

- Responde a un proceso erróneo de medición de una magnitud.
- Se **ELIMINAN**.



Como?

Mediante **controles de campo**:

- ✓ algebraico
- ✓ lecturas múltiples
- ✓ verificación de escritura
- ✓ punterías varias

2) ERRORES SISTEMATICOS

- Obedecen a una ley predeterminada que lo hace influir *siempre en igual sentido y magnitud*.
- Obedecen a diversas causas, por ejemplo:
 - mal ajuste del instrumento.
 - falta de un tramo en una cinta métrica.
 - dilatación de la cinta.
- Se **CORRIGEN**

3) ERRORES ALEATORIOS

- Son las diferencias que persisten luego de depurar las equivocaciones y corregir los errores sistemáticos.
- No pueden ser determinados a priori y no guardan relación entre si.
- Su comportamiento es al azar.
- la MEDIDA se comporta como una VARIABLE ALEATORIA.
- Son errores intrínsecos al proceso de medición.
- Se **PROCESAN**



Tratamiento analítico de los datos mediante la aplicación de la teoría de **PROBABILIDAD Y ESTADISTICA**

3) ERRORES ALEATORIOS

Constituyen la base para:

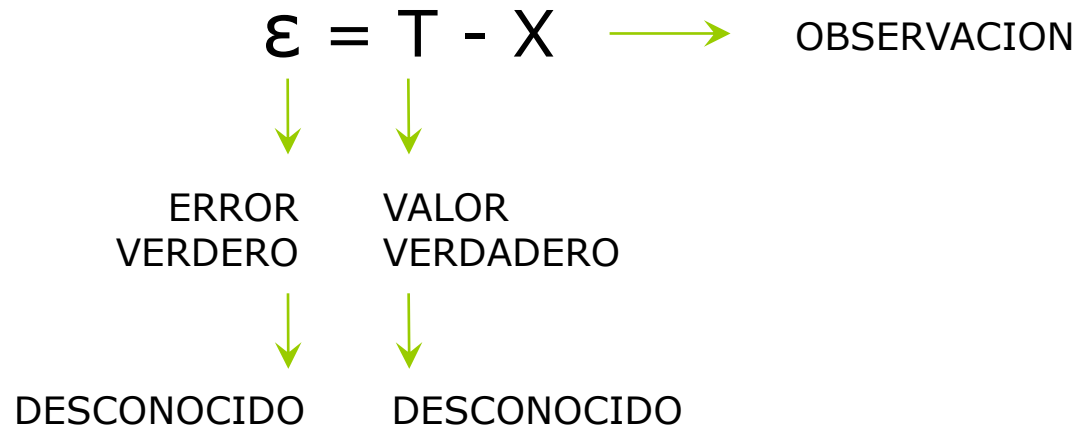
- *COMPENSACION* de modelos matemáticos que asumimos como representativos de la realidad.
- *AJUSTES* de las observaciones de campo.
- Posibilitar su tratamiento mediante el cálculo probabilístico.

Si las mediciones se efectúan en las mismas condiciones (mismo operador, mismo instrumento), cumplen con las *tres propiedades de las variables probabilísticas*:

- Para un numero suficientemente grande de observaciones ($n \rightarrow \infty$), la probabilidad de un desvío en ambos sentidos es la misma.
- Desvíos pequeños ocurren con mayor frecuencia que desvíos grandes.
- Existe un limite para los desvíos, por encima del cual la ocurrencia de un suceso no es posible.

3) ERRORES ALEATORIOS

TEORICAMENTE:



EN LA PRACTICA:



COMPORTAMIENTO DE ERRORES SISTEMATICOS O CONOCIDOS - **PROPAGACION DE ERRORES**

CASO LINEAL:

$$y = a * x + b$$



$$dy = a \frac{\partial y}{\partial x} * dx$$

CASO NO LINEAL:

$$y = f (x_1, x_2, \dots, x_n)$$



$$dy = \left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{x_{10}} * dx_1 + \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{x_{20}} * dx_2 + \dots + \left. \frac{\partial y}{\partial x_n} \right|_{x_{n0}} * dx_n$$

COMPORTAMIENTO DE ERRORES SISTEMATICOS O CONOCIDOS - **PROPAGACION DE ERRORES**

CASO GENERAL: $(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{m0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_m \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = Y_0 + J * \Delta X$$

$\Delta x_i = x - x_i$ \longrightarrow Δx es una matriz columna

$\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_0} = J_i$ \longrightarrow J (JACOBIANO) es una matriz fila

AJUISTE SIMPLE - METODO DE MINIMOS CUADRADOS (M.M.C.)

Realiza un ajuste de las observaciones realizadas de forma tal que la suma cuadrática de los residuales debe ser mínima.



IMPLICA:

- se modifica MINIMAMENTE las observaciones realizadas.
- el método realiza el ajuste de forma INDEPENDIENTE del operador.



ASUMIMOS:

- observaciones { no relacionadas
de igual precisión

AJUISTE SIMPLE - METODO DE MINIMOS CUADRADOS (M.M.C.)

$$V_i = \ell - \ell_i$$

$V_i \rightarrow$ residual

$\ell \rightarrow$ valor ajustado

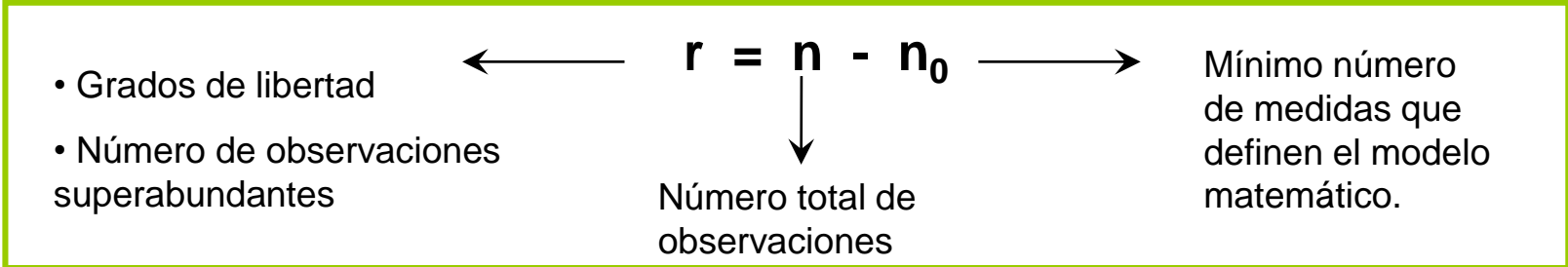
$\ell_i \rightarrow$ valor observado

$$\Phi = \sum v_i^2 \text{ sea mínimo}$$

$\Phi \rightarrow$ función de mínimos cuadrados

Voy a resolver un sistema de ecuaciones en v_i y a despejar dichos residuales, usando:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \text{ para todos } v_i$$



ERRORES ALEATORIOS – PROPAGACION DE VARIANZAS

El valor específico del error no lo tenemos, o sea que no se pueden aplicar las técnicas de propagación.



- Se estudia el efecto de propagación en forma conjunta.
- Buscamos una distribución conjunta de los **X** e **Y**.



X { vector aleatorio
 representa el **conjunto de medidas**

Y { vector aleatorio
 representa el **conjunto de cantidades calculadas**

$$Y = f(X)$$

Magnitudes calculadas

Magnitudes medidas

LEY ESPECIAL DE PROPAGACION DE VARIANZAS

(x_1, x_2, \dots, x_n) son variables independientes → Matriz covarianza diagonal

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

CASO LINEAL:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$\sigma_y^2 = a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + \dots + a_n^2\sigma_{x_n}^2$$

CASO NO LINEAL:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

LEY ESPECIAL DE PROPAGACION DE VARIANZAS

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

CASO LINEAL:

$$\Sigma_{YY} = A \Sigma_{XX} A^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

CASO NO LINEAL:

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \Sigma_{XX} J_{YX}^T$$

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

LEY ESPECIAL DE PROPAGACION DE VARIANZAS

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde las matrices COVARIANZAS son las siguientes:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1^2} & \sigma_{x_1x_2} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1^2} & \sigma_{y_1y_2} \\ \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_2^2} \end{bmatrix}$$

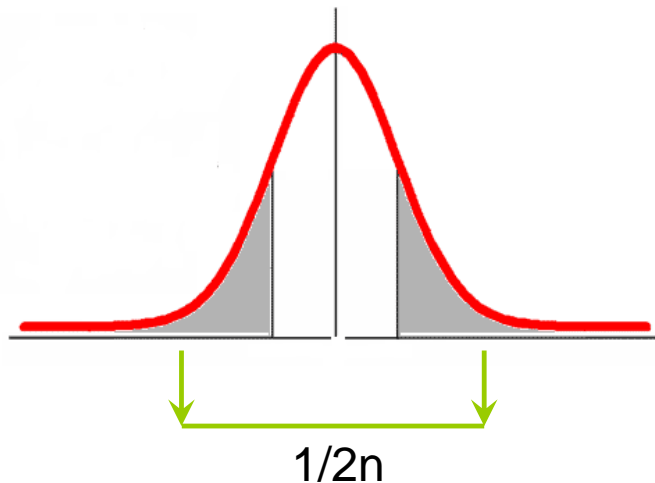
SERIES DE OBSERVACIONES – DEPURACION Y TRATAMIENTO

Para una serie de pocas observaciones ($n \leq 30$) utilizamos el criterio de CHAUVENET.

Consiste en eliminar directamente las observaciones que caigan fuera del intervalo determinado de la siguiente manera:

$$[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] /$$

$$P(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) = 1 - (1/2n)$$



Cuadro de valores para CHAUVENET

n	k	n	k
4	1,54	18	2,2
5	1,68	20	2,24
6	1,73	22	2,28
7	1,79	24	2,31
8	1,86	26	2,35
9	1,92	30	2,39
10	1,96	40	2,5
12	2,03	50	2,58
14	2,1	100	2,8
16	2,16	200	3,02

SERIES DE OBSERVACIONES – DEPURACION Y TRATAMIENTO

Los pasos para el tratamiento de una serie de observaciones es:

- 1) Medir n veces la magnitud, expresando los valores con sus cifras significativas, determinadas por el instrumento de medición.
- 2) Calcular \bar{x} y la desviación estándar de cada observación s .
- 3) Depurar la serie, fijando el intervalo de tolerancia: $\bar{x} \pm ks$.
- 4) Rechazar todos los datos que estuvieren fuera del intervalo.
- 5) Recalcular \bar{x} y s corregidos.
- 6) Calcular el error estandar del promedio $\zeta = s/\sqrt{n}$.
- 7) El resultado deberá escribirse como: $(\bar{x} \pm \zeta)$ considerando que:
 - a) el valor mas probable de x es \bar{x} .
 - b) la probabilidad de que el verdadero valor este en el intervalo $(\bar{x} \pm \zeta)$

es del 68%, o sea que la probabilidad de que al analizar una nueva serie de medidas de x su promedio caiga en $(\bar{x} \pm \zeta)$ es del 68%.

SERIES DE OBSERVACIONES – DEPURACION Y TRATAMIENTO

Si escribimos ($x \pm s$) podemos afirmar que:

- a) el valor mas probable de x es x .
- b) la probabilidad de que una nueva observación caiga en el intervalo ($x \pm s$) es del 68%.