Múltiple Opción 2

Hallar la cantidad de palabras de largo 5 que usan las letras $\{A, B, C\}$ sin tres A seguidas: A) 221; B) 222; C) 223; D) 224.

$\{A', A, B, C\}$

$\_\ \overbrace{A\ A\ A}^{A'}\ \_$ $\quad 3^5$

243

81

9·9·

$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3$

Total − 3A's − 4A's − 5A's

$$\overbrace{3^5}^{243} - \overbrace{\underbrace{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \underbrace{2 \cdot 2} - 1}^{-21} = 222$$

A A A _ A

AAA

$\overbrace{AAA}^{A'}$ _ _

$2 \cdot 2 \cdot 3$ (AAA _ _ (B/C, A/B/C)

_ _ AAA

4 (_ AAA _

A A A A _

_ A A A A

B,C

A B _ _ _

$$2^5 + 2^4 \cdot \binom{5}{1} + \binom{5}{2} \cdot 2^3 + \underline{\qquad} + 2$$

A → AA $2 \cdot 3 \cdot 3$

A → AB

PIC

PB $\quad \underbrace{P(n_0)}_{\downarrow}$ ✓

PI $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

$$\Rightarrow P(n)\ \forall n \geq n_0$$

HI $\quad$ TI

$$P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

PF

PB

$$P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \ldots P(n_0+k)$$

PI

HI $\quad P(n)\ P(n+1), P(n+2), \ldots P(n+k)$

TI $\quad P(n+k+1)$

$$P(n_0), \overbrace{P(n_0+1), P(n_0+2) \Rightarrow P(n_0+3)}^{\text{PI}} \Rightarrow P(n_0+4) \Rightarrow \ldots$$

$$a_n = \underbrace{\overbrace{a_{n-1}}^{H_I} + 3\overbrace{a_{n-2}}^{H_I}}$$

$a_{n+1} = \ldots$

Dem

Ejercicio Múltiple Opción 1: La cantidad de elementos del conjunto $\{f : \{1,2,\dots,6\} \to \underbrace{\mathcal{P}\{1,2,\dots,6\}}: f \text{ inyectiva}, 1 \notin f(1), 2 \notin f(2)\}$ es:

$\{2,3,4\}$

A) $63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$, B) $16 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$
C) $16 \cdot 64 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$.

$\underline{0\ -\ -\ -\ -\ -\ -}\quad 100000$

$$\mathcal{P}\{1,2,\dots,6\} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \dots \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,2,\dots,6\}\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

$$|\mathcal{P}\{1,2,\dots,6\}| = 2^6$$

$2 \in f(1)$

$$\underset{f(1)}{\underline{2^4}}\ \underset{f(2)}{\underline{2^5}}\ \underset{f(3)}{\underline{2^6-2}}\ \underset{f(4)}{\underline{2^6-3}}\ \underset{f(5)}{\underline{2^6-4}}\ \underset{f(6)}{\underline{2^6-5}}$$

$+$

$2 \notin f(1)$

$$\underset{f(1)}{\underline{2^4}}\ \underset{f(2)}{\underline{2^5-1}}\ \underbrace{2^6-2\quad 2^6-3\quad 2^6-4\quad 2^6-5}$$

$\{3\}$

$$\overset{16}{2^4} \cdot \overset{63}{(\overset{32}{2^5} + \overset{32}{2^5} - 1)} \left[\overset{62}{(2^6-2)}\ \overset{61}{(2^6-3)}\ \overset{60}{(2^6-4)}\ \overset{59}{(2^6-5)}\right]$$

$$((2^5+2^5)-1)$$

Problema de Desarrollo

(a) Hallar explícitamente en n la sucesión que verifica $a_0 = 0$ y $a_n = a_{n-1} + n^2$.
(b) Dar una fórmula para $\sum_{i=0}^{n} i^2$ usando la parte anterior.
(c) Probar la identidad anterior mediante el principio de Inducción Completa.

$a_n - a_{n-1} = r^n G(n) = n^2$ $\quad r=1$, $m=2$

$\to a_n^{(p)} = r^n \cdot (An^3 + Bn^2 + Cn)$

Múltiple Opción 1

Contar la cantidad de subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ tales que la distancia entre toda pareja de elementos sea de 3 o más. A) $\binom{94}{3}$; B) $\binom{94}{4}$; C) $\binom{94}{5}$; D) $\binom{94}{6}$.
Aclaración: dados $n < m$, la distancia entre n y m es $m - n$.

a_1 $\quad d(a_1, a_2) \geq 3$ $\quad d(a_2, a_3) \geq 3 \ldots$

$d(a_2, a_3) \geq 3$

1

$\{1, 2, 3, 4\}$ ✗ $\quad \{1, 70, 3, 99\}$

$\{1, 50, 70, 100\}$ ✓ $\quad \{1, 3, 70, 99\}$ (2)

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (5, 8, 28, 58)

$a_1 - 0 \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad 100 - a_4$

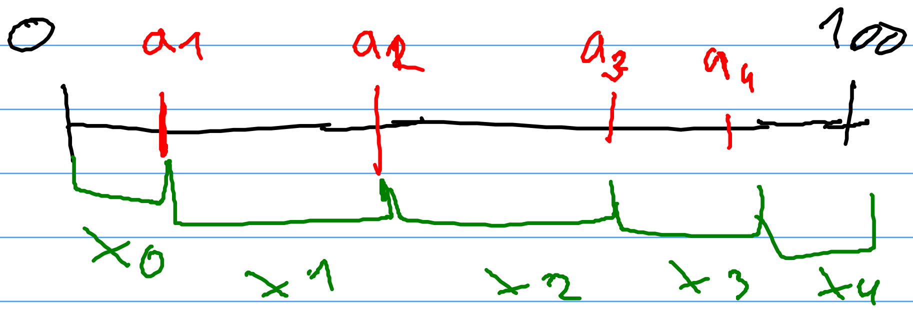
3 20 30 42

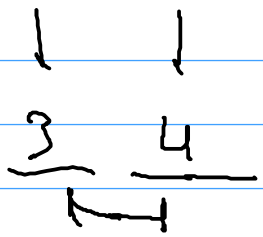
Solución - MO1

Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ cumple con el enunciado y se ordenan sus elementos en forma creciente entonces $x_i = a_{i+1} - a_i \geq 3$, $i = 1, 2, 3$. Definiendo $x_0 = a_1 \geq 1$ y $x_4 = 100 - a_4$ tenemos que $\sum_{i=0}^{4} x_i = 100$. Usando las variables $y_i = x_i - 3$, $i = 1, 2, 3$, $y_0 = x_0 - 1$, $y_4 = x_4$, debemos contar la cantidad de soluciones naturales de $\sum_{i=0}^{4} y_i = 90$, que es $CR_{90}^{5} = \binom{5+90-1}{90} = \binom{94}{90} = \binom{94}{4}$.
Luego, la opción correcta es la B.

$\begin{cases} x_0 \geq 1 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_3 \geq 3 \end{cases}$

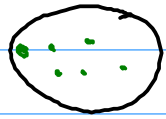
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$


0
a1
a2
a3
a4
100
x0
x1
x2
x3
x4


3
4

Ejercicio 7

Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿ De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites, sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros ni gatos en el mismo escondite?



3

$$\frac{CR(3,3)}{3!} = \frac{\binom{5}{3}}{3!} = \frac{\frac{5!}{3!\,2!}}{3!} = \frac{5!}{3!\,2!\,3!}$$

R \ P	=	≠
=		$S(P,R) = \frac{Sob(P,R)}{R!}$
≠	$CR(R,P)$	$Sob(P,R)$