Ejercicio 1

(a) Determine cuáles de los grafos de la Figura 4 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

(b) Para los grafos planos de la parte anterior determinar el número de vértices, aristas y regiones del mismo. Chequear que sus respuestas satisfacen la fórmula de Euler.

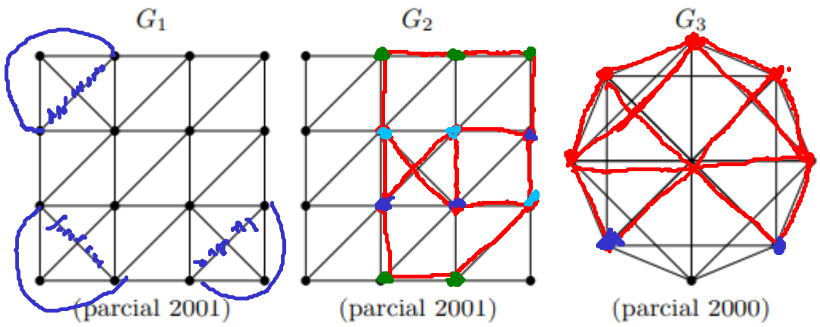
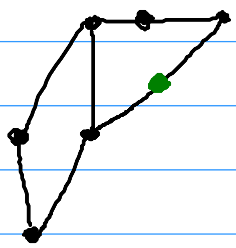
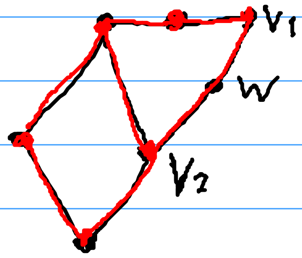


Figura 4

G



$G' = G - \{v_1, v_2\} + \{v_1, w\} + \{w, v_2\}$



Ejercicio 3

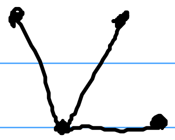
Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

$$K_{3,3} = (V', E') \to |E'| = 3 \cdot 3 = \boxed{9}$$

$$K_5 = (V'', E'') \to |E''| = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Ejercicio 4

Probar que si el grado máximo de los vértices de un grafo es 2, entonces el grafo es plano. ¿Es cierto el recíproco?



Ejercicio 5

Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

$$r = r' + 1$$

$$v - e + r = 2 \iff v - e + r' = 1$$

$$k \begin{cases} v_1 - e_1 + r_1' = 1 \\ \vdots \\ v_k - e_k + r_k' = 1 \end{cases} \Rightarrow v - e + r' = k$$

$$v - e + r = k + 1$$

Ejercicio 2

(a) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene C_4?

(b) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene W_4?

(c) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene un árbol de n vértices?

$2 + 4 \cdot 3 + 4 + 4 \cdot 2$