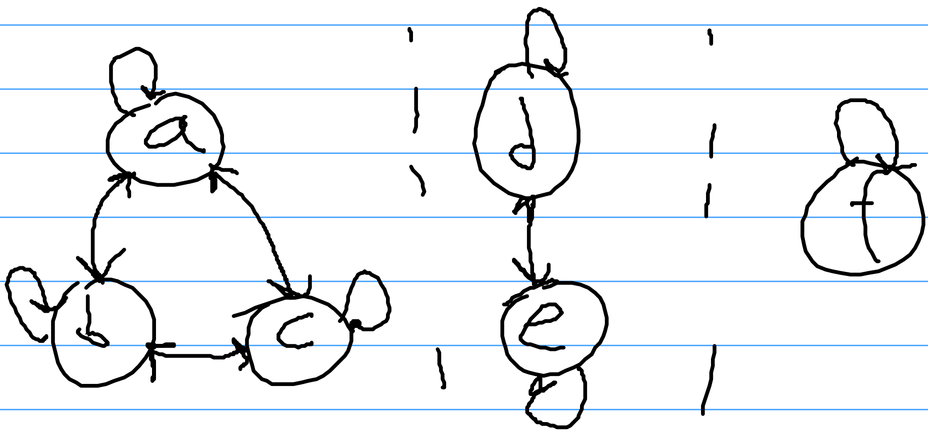
R es Relacion de equivalencia si es:

- Reflexiva
- Simetrica
- Transitiva



$\rightarrow [x] = \{y : yRx\}$

$[a] = \{a, b, c\} = [b] = [c]$

$[d] = \{d, e\}$

$[f] = \{f\}$

$A/R = \{[a], [d], [f]\}$

Ejercicio 5

En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente $\underline{A/R}$:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

b) • Reflexiva: $\forall x \in A \quad xRx$

<u>Dem</u> $\quad n = 5 \cdot q + r \qquad 0 \leq r < 5$

Sea $x \in \mathbb{Z}$

$x^2 = 5 \cdot q' + r'$

$x R x$ ✓

• Simétrica: si $xRy \Rightarrow yRx$

<u>Dem</u>

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$: xRy

$x^2 = 5 \cdot q' + r' \quad , \quad y^2 = 5 \cdot q'' + r''$

Como $xRy \Rightarrow r' = r'' \Rightarrow r'' = r' \Rightarrow yRx$ ✓

• Transitiva: si xRy, $yRz \Rightarrow xRz$

<u>Dem</u>

Sea $x, y, z \in \mathbb{Z} : xRy$, yRz.

$$x^2 = 5\cdot q' + r', \quad y^2 = 5\cdot q'' + r'', \quad z^2 = 5\cdot q''' + r'''$$

$$\left.\begin{array}{l} xRy \Rightarrow r' = r'' \\ yRz \Rightarrow r'' = r''' \end{array}\right\} \Rightarrow r' = r''' \Rightarrow xRz \;/$$

Como R es ref. sim y trans. $\Rightarrow$ R es de equivalencia

$\mathbb{Z}/R$

$$a = 5\cdot q + r \Rightarrow a^2 = (5\cdot q + r)^2 = 5\cdot q' + r^2$$

$$r \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow r^2 \in \{0, 1, 4, 9, \underbrace{9, 16}\}$$

$\dot{5} + 4$

$9 = 5 \cdot 1 + 4$

$16 = 5 \cdot 3 + 1$

$\dot{5} + 1$

$\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2]\}$

$\{x : x^2 = 5 \cdot q\}$

$\{x : x^2 = 5 \cdot q + 1\}$ $\{x : x^2 = 5 \cdot q + 4\}$

Ejercicio 8

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n,i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = \underbrace{C_0^n R_n}_{\#[\,]=1} + \underbrace{C_1^n R_{n-1}}_{=2} + \cdots + C_n^n R_0$. $= n+1$

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$

$|[x_{n+1}]| = 1$

a) $[x_{n+1}] = \{x_{n+1}\}$

x_n R_n

x_{n-1}

x_{n-2}

x_1

$|[x_{n+1}]| = ?$

$[x_{n+1}] = \{x_{n+1}, \quad \}$

$C_1^n = n$

$n-1$

R_{n-1}

x_{n-1}

$\vdots$

x_1

$[x_{n+1}] = \{x_{n+1}, a, b\}$

$\vdots$

$[x_{n+1}] = \{x_{n+1}, \dots, x_0\}$

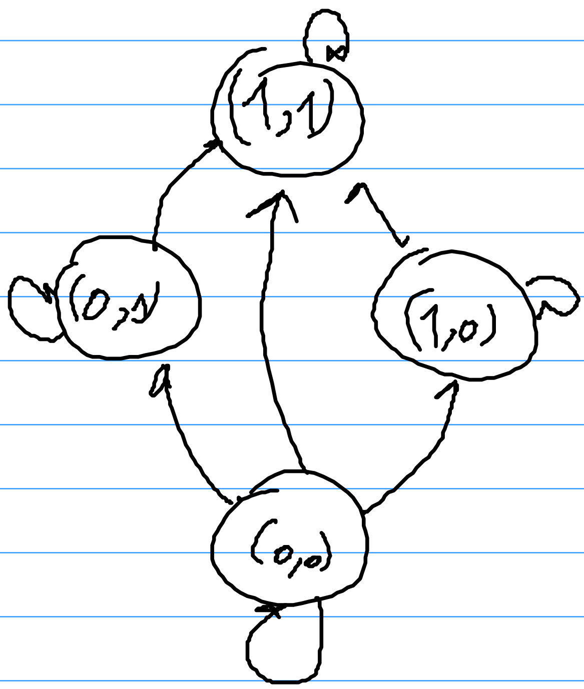
$C_n^n \cdot R_0$

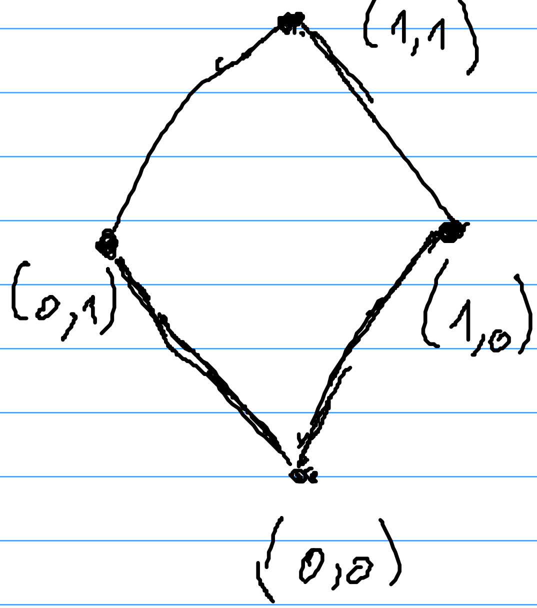
R es Relaciones de orden (Parcial) si es:

- Ref.
- Antisim.
- Transitiva

$A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

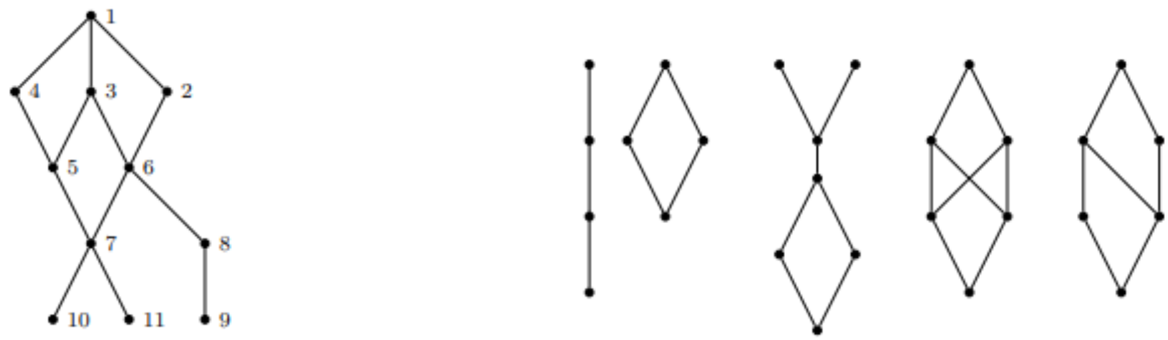
$(x_1,x_2) \le (y_1,y_2)$ si $x_1 \le y_1 \wedge x_2 \le y_2$





Orden total: Si además $\forall x,y \in A$ xRy o yRx

Ejercicio 1 Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas $T_1, T_2, \ldots, T_{11}$ en el siguiente orden parcial cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura 1 (a). Escriba una lista de instrucciones de



(a) (b)

Figura 1

modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

10 - 11 - 7 - 5 - 9 - 4 - 8 - 6 - 3 - 2 - 1