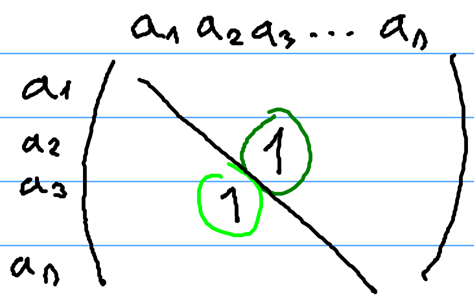
Ejercicio 3
Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

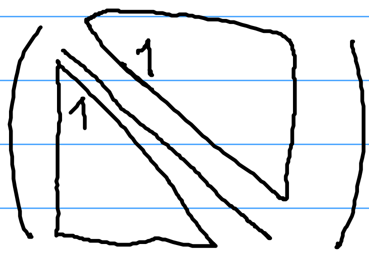
(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas.*

3. a\c



- $a_2 R a_3$, $(a_2, a_3) \in R$
- $a_3 R a_2$, $(a_3, a_2) \in R$

Simétrica:



$M = M^t$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Reflexiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Irreflexiva:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

antisimétrica:

$(x,y)\in R \quad (y,x)\notin R$

$x\neq y,\ xRy \Rightarrow y \not R x$

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & 0\ 1 \\ 0\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$M^t = \begin{pmatrix} \ddots & 0\ 0 \\ 0\ 1 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$M \cap M^t \leq Id$$

$\uparrow$

$a\neq b \qquad aRb$

$b \not R a$

Ej:

$$M = \begin{array}{c|c} & a \quad b \quad c \\ \hline \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(a,a)\in R$
$(a,b)\in R$
$(c,b)\in R$
$(c,c)\in R$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M \cap M^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(\forall\, x,y \in A \,/\, (x,y) \in R)\quad (y,x) \notin R$

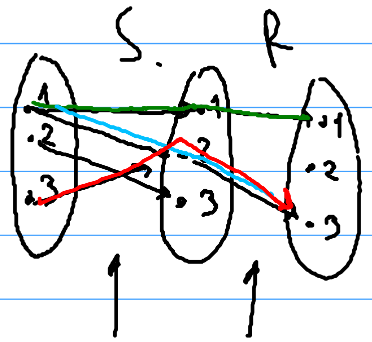
asimétrica: $\quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$

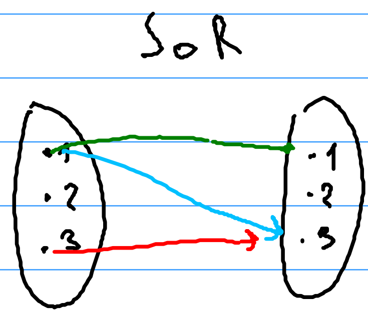
$\underline{M \cap M^t} = O_n \quad = \begin{pmatrix} 0 & - & - \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 0^{0} & & 1 \\ & 0 \quad 0 & \\ & & \ddots \quad 0 \end{pmatrix}$$

Transitiva: $\quad (x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$S \circ R = \{ (x,z) : \exists y, (x,y) \in S \wedge (y,z) \in R \}$





Prop

M es la matriz de S

M' es " " de R

$\Rightarrow$ M·M' es la matriz de SoR

$$R^2 = R \cdot R = R \circ R$$

$$R \circ S = RS \Rightarrow M \cdot M'$$

<u>Prop</u>

Si $R^2 \subseteq R \Rightarrow R$ es transitiva

R es transitiva:

$$M^2 \leq M$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \leq B$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

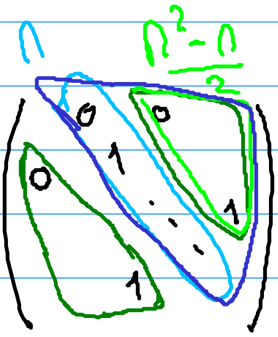
Ejercicio 4

¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?

a)

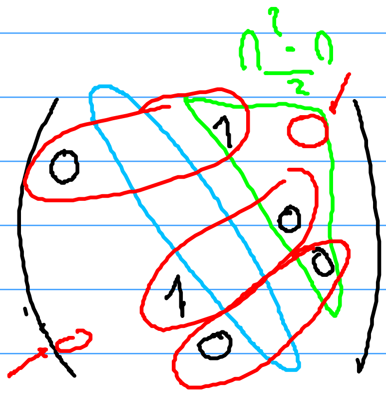
$$2^{(n^2-n)}$$

b)



$$2^{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)}$$

c)



$$3^{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)} \cdot 2^{n}$$

$$\begin{cases} 0-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{cases}$$