Primer parcial – Miércoles 14 de octubre de 2020

Ejercicio 1.(5 pts.) Sean $I_1 = \{1, \ldots, 5\}$ e $I_2 = \{6, \ldots, 9\}$. Se define un embarajado de I_1 e I_2 como una función biyectiva: $f : I_1 \cup I_2 \to I_1 \cup I_2$ tal que $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_1$ con $i < j$, y $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_2$ con $i < j$. ¿Cuántos embarajados posibles hay de I_1 e I_2?.

$2, 4, 6, 8, 9$

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) & f(9) \end{array}$$

$$\binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = \binom{9}{4}$$

Ejercicio 2.(5 pts.) Se repartirán ~~60~~ 51 paquetes de vacunas en 3 ciudades distintas llamadas Ambar, Esmeralda y Rubi. En Ambar existen tres hospitales y todos recibirán la misma cantidad de paquetes. En Esmeralda también hay tres hospitales y entre ellos se repartirán equitativamente los paquetes. En Rubí existen 2 hospitales, pero el mayor de ellos recibirá el doble de paquetes que el otro. ¿De cuántas maneras podemos repartir los 60 paquetes entre las 3 ciudades de manera que ~~todos los hospitales reciban al menos un paquete~~?

$A \quad \overbrace{HHH}^{3H}$

$60 \to 60 - 9$

51

$E \quad \underbrace{H'H'H'}_{3H'}$

$R \quad \underbrace{H''h}_{3h}$

$3(H + H' + h)$

$3H + 3H' + 3h = 51 \Rightarrow H + H' + h = 17$

$\Rightarrow \quad H + H' + h = 17 \qquad H, H', h \geq 0$

$$CR(3,17) = \boxed{\binom{19}{17}} = \boxed{\frac{19!}{17!\,2!}}$$

Ejercicio 3.(5 pts.) ¿Cuántos numeros enteros hay entre 1 y $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ inclusive que no son divisibles por ninguno de los enteros 7,11,13?

$$\overbrace{\underbrace{7 \cdot 11 \cdot 13}^{1001} - \overbrace{11 \cdot 13 - 7 \cdot 13 - 7 \cdot 11}^{-234 \qquad -77}}^{-281} + \overbrace{7 + 11 + 13}^{30} - 1$$

-47

$= \boxed{720}$

Ejercicio 6 (ejercicio de desarrollo). Justifique todas las respuestas.

a) (5 pts.) Enuncie el principio de buen orden (P.B.O.).

b) (5 pts.) Pruebe el principio de inducción completa (P.I.C.) a partir del P.B.O.

c) (5 pts.) Use el P.I.C. para probar que $\frac{n^5 - n}{5}$ es entero para todo entero $n \geq 0$.

a) Todo subconjunto de los naturales no vacío tiene mínimo

b) $PB \text{ y } PI \overset{\text{P.B.O.}}{\Rightarrow} P(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

H) P.B.O.

$P(0)$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

T) $P(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

menor natural $/ !P(m)$

Dem $F = \{ n \in \mathbb{N} / !P(n) \}$

Supongamos que $F \neq \emptyset \overset{PBO}{\Rightarrow} F$ tiene mínimo m

PB $m-1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow P(m-1) \overset{PI}{\Rightarrow} P(\overbrace{m-1+1}^{m})$

Entonces por absurdo concluimos que $F = \emptyset$,

lo que implica que $P(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^5 - n}{5} \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 0$$

$$P(n): n^5 - n = \dot{5} \quad \forall n \geq 0$$

PB $n = 0$

$0^5 - 0 = 0 = \dot{5}$ ✓

PI

HI $n^5 - n = \dot{5}$

TI $\underbrace{(n+1)^5 - (n+1)} = \dot{5}$

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}
$$

Dem

$$(n+1)^5-(n+1) = n^5+5\cdot n^4+10n^3+10n^2+5n+\cancel{1}-n-\cancel{1}$$

$$= n^5-n + 5\cdot\left(n^4+2n^3+2n^2+n\right)$$

$$\underset{HI}{=} \dot{5} + \underbrace{5\cdot\ldots}_{\dot{5}} = \dot{5} \qquad \boxtimes$$

3. Ejercicio:

¿De cuántas formas podemos repartir 20 pelotitas idénticas en cuatro cajas numeradas de forma que: cada una de las primeras dos cajas contengan una cantidad par de pelotitas, cada una de las dos últimas contengan una cantidad impar de pelotitas, y que la última caja contenga no más de 3 pelotitas?

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 1 + 2y_4 + 1 = 20$

...

u/u PPP//

$CR(2,3) = \binom{4}{3}$

Se considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la siguiente forma:

$$a_n = 3.a_{n-1} + 5.a_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2,\ a_1 = 3,\ \text{y } a_0 = \frac{6}{5}.$$

a) Calcular los primeros términos de la sucesión (sug.: calcule varios).

Solución:

Tenemos que: $a_0 = \frac{6}{5}$ $a_1 = 3,\ a_2 = 15,\ a_3 = 60,\ a_4 = 255$;, mientras que $a_5 = 1065,\ a_6 = 4470,\ a_7 = 18735$.

(Observe que a partir de a_5 los elementos verifican la desigualdad del próximo punto).

b) Demostrar que $a_n > 4^n$, para todo $n \geq k$.

- Hallar k.

  Solución:

  Por lo visto en el ítem anterior, $k = 5$ vale. También vale cualquier $k \geq 5$.

- Demostrar por I.C. a partir del k hallado en el ítem anterior (sug.: usar I.C. fuerte).

  Solución:

  Base IF) Observar que hay que chequear, para la demostración que está más adelante, en al menos dos valores consecutivos. Ya vimos arriba que a_5, a_6 y a_7 verifican la desigualdad.

  Hip. IF) $a_i > 4^i$, para todo $5 \leq i \leq n-1$; P(n-1), P(n-2)

  Tesis IF) $a_n > 4^n$. P(n)

  Para todo $n \geq 7$ (con lo cual $n-1 > n-2 \geq 5$) tenemos que

  $$\boxed{a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2}} \geq 3 \times 4^{n-1} + 5 \times 4^{n-2} = 4^{n-2}(3 \times 4 + 5) = 17 \times 4^{n-2} > 4^n.$$

Nota útil: $4^4 = 256,\ 4^5 = 1024,\ 4^6 = 4096$.