Con el PIC queremos probar que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 ,\quad P(n) \begin{cases} 7^n - 2^n = \dot{5} \\ 2^n \geq n^2 \\ \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

Para usar PIC debemos demostrar:

- Paso Base:

$P(n_0)$ $\qquad 7^{10} - 2^{10} = \dots = 5$

- Paso Inductivo:

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

HI $\quad P(n) \qquad 7^n - 2^n = \dot{5}$

TI $\quad P(n+1) \qquad \underbrace{7^{n+1} - 2^{n+1}}_{} = \dot{5}$

$k \in \mathbb{Z}$

$= 5 \cdot k$

$\dot{5}$

Ejercicio 1

Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Paso base

$7^0 - 2^0 = 0 = \dot{5}$ ✓

Paso Inductivo

HI $7^n - 2^n = \dot{5}$

TI $7^{n+1} - 2^{n+1} = \dot{5}$

Dem

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = \overbrace{7 \cdot 7^n}^{(5+2)7^n} - 2 \cdot 2^n = (5+2)7^n - 2 \cdot 2^n$$

$$= \underbrace{5 \cdot 7^n}_{\dot{5}} + 2 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n = \dot{5} + 2(7^n - 2^n)$$

$$\overset{HI}{=} \dot{5} + 2 \cdot \dot{5} = \dot{5}$$ $\boxed{/}$

Ejercicio 4

Probar que para todo natural a existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$.

$\dot{9}$

$2^5 = 2 \cdot 16 \geq$

Ejercicio 3

Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

n	2^n	n^2
0	1	0
1	2	1
2	4	4
3	8	9
$n_0 \to$ 4	16	16
5	32	25

PB $\quad n_0 = 4$

$2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$ ✓

PI

HI $\quad 2^n \geq n^2$

TI $\quad 2^{n+1} \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Dem

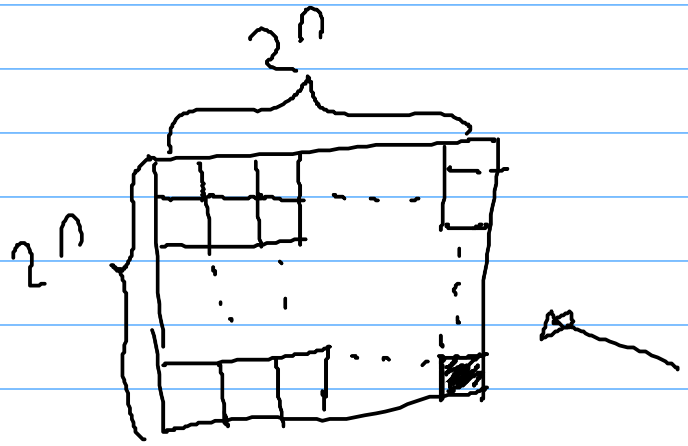
$$2^{n+1} \geq 2 \cdot 2^{n} \overset{HI}{\geq} 2 \cdot n^{2} \geq n^{2} + n^{2} \overset{Prop\,1}{\geq} n^{2} + 2n + 1 \quad \boxtimes$$

Prop 1: $n^{2} \geq 2n+1 \quad \forall n \geq 4$

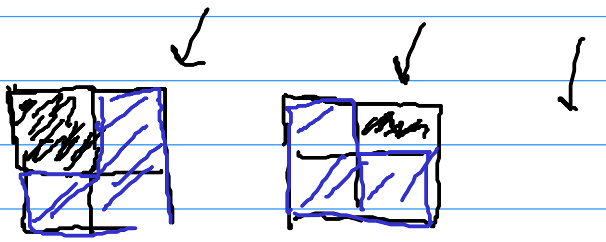
Dem

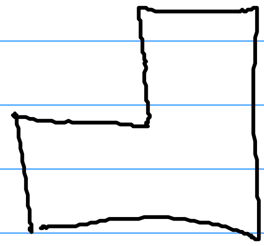
$$n \cdot n = 4n = 2n + \underbrace{2n}_{\geq 8} \geq 2n+1$$

Ejercicio 5
Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

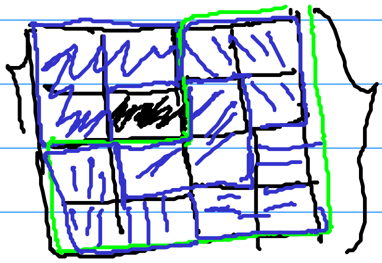


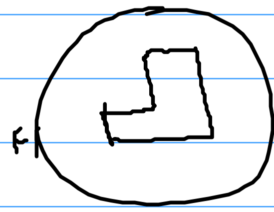
PB $n=1$





$n=2$





$n=3$