1 MEDIDAS DE CORRIENTE CONTINUA E INCERTIDUMBRE DE MEDIDA

En este primer capítulo de curso veremos las medidas eléctricas más elementales. Estas son la corriente eléctrica, el voltaje o diferencia de potencial y la resistencia eléctrica. Se tratará el caso de la corriente continua, mientras que en el próximo capítulo se introducirá la corriente alterna y su medición.

Los puntos a ser tratados son:

- Breve repaso del significado físico de las magnitudes.
- Tipos de instrumentos utilizados para las medias.
- Características de los instrumentos, simbología.
- Determinación de la incertidumbre de medida en casos prácticos.

Al final del capítulo se encuentran ejercicios prácticos para ser realizados por los estudiantes.

En este capítulo se trata la corriente contínua o DC, los instrumentos que miden DC están pensados para medir valores constantes. Si el valor no es constante los instrumentos miden su variación lenta con una constante de tiempo del orden de un segundo.

1.1 Repaso de magnitudes físicas.

Las magnitudes eléctricas básicas que consideraremos en este curso para el caso de corriente contínua (**DC**) son: la corriente, la tensión y la resistencia eléctrica. En el próximo capítulo introduciremos la inductancia y la capacidad para su uso con corriente alterna.

Una corriente eléctrica es un flujo de partículas cargadas que atraviesa una sección de conductor. Si tenemos partículas de carga q, que se mueven en el conductor con velocidad promedio $<v>$, la cantidad de partículas que atraviesan una sección A del conductor en un intervalo Δt es:

$$\Delta Q = n\, q < v > A\, \Delta t \qquad \text{Ec.1.1}$$

Donde n es el número de portadores de carga por unidad de volúmen.

La corriente eléctrica se define de la siguiente forma:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n\, q < v > A \qquad \text{Ec.1.2}$$

Este flujo de cargas se mide en amperios con un instrumento llamado **amperímetro**.

Una magnitud relevante que se utiliza para el cálculo de fusibles es la densidad de corriente o corriente por unidad de área J

$$J = \frac{I}{A} = n\, q < v > \qquad \text{Ec.1.3}$$

¿Qué debe ocurrir para que se establezca una corriente?

Debe haber una fuerza que impulse las cargas en una determinada dirección. Esta fuerza proviene de una distribución de cargas (ej: en los bornes de una batería) que generan un campo eléctrico. Este campo eléctrico es conservativo y deriva de un potencial. Justamente esa es la magnitud utilizada en la práctica para su medida: la diferencia de potencial entre dos puntos. Aunque se trata de una diferencia, solemos omitir el símbolo Δ y hablamos del voltaje V entre esos puntos.

Esta diferencia de potencial se mide en voltios con un instrumento llamado **voltímetro**.

En nuestro curso consideraremos dos tipos de materiales, los conductores y los aislantes. Los conductores ideales no presentan oposición al paso de la corriente eléctrica, mientras que en un material real aparece una resistencia *R*.

En muchos materiales, la ecuación constitutiva qué relaciona la corriente con la diferencia de potencial, es lineal. Esta es la llamada Ley de Ohm

$$V = R.I \qquad \text{Ec.1.4}$$

Esta resistencia es una propiedad del material que puede depender de la temperatura u otras variables externas. Se mide en ohm con un instrumento llamado **óhmetro**.

Estas tres, la corriente, el voltaje y la resistencia eléctrica serán las magnitudes más relevantes en **DC**.

1.2 Tipos de instrumentos.

En la práctica se utilizan dos tipos de instrumentos para la determinación de corrientes y voltajes. Estos son los instrumentos analógicos y los instrumentos digitales. En el caso de la medida de resistencia se utilizan casi exclusivamente instrumentos digitales.

1.2.1 Instrumentos ideales e instrumentos reales.

Un **amperímetro ideal** es un instrumento que se intercala en serie con la corriente que quiere medir y no altera para nada el circuito a medir. Esto es, su resistencia interna es cero. Un **voltímetro ideal** se conecta en paralelo con el voltaje a medir, su resistencia interna es infinita. La figura 1.1 muestra el modelo del amperímetro y voltímetro ideales junto con sus modelos reales.

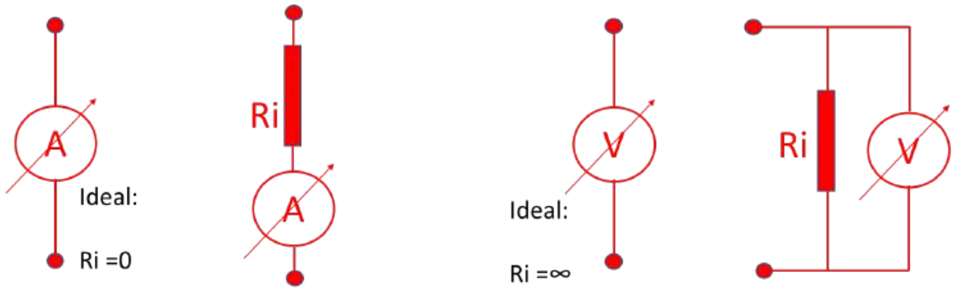

Figura 1.1. Modelo de amperímetro y voltímetro

Los amperímetros siempre se intercalan en serie con la corriente a medir mientras que los voltímetros siempre son en paralelo con el voltaje a medir.

Ejemplo 1.1. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de medida de corriente y tensión cuando se conectan instrumentos reales. La resistencia interna del amperímetro es de 1 Ω, mientras que la del voltímetro es de 1 MΩ.

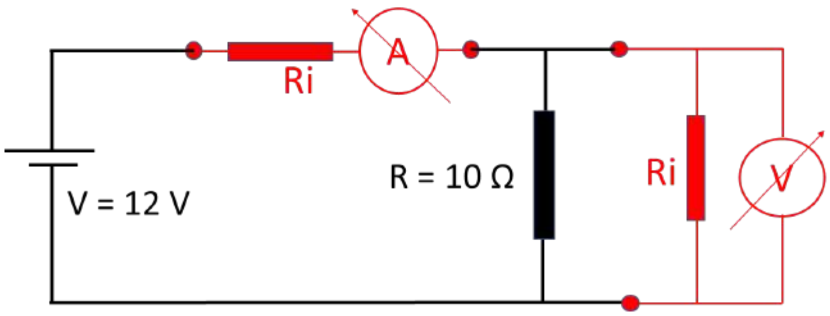

Figura 1.2. Conexión de voltímetro y amperímetro reales.

En este ejemplo la corriente que mide el amperímetro es 1.10 A mientras que el voltaje que mide el voltímetro es 10.91 V. Esto muestra el efecto de considerar la no idealidad de los instrumentos.

- Nota: la resistencia interna del amperímetro tiene un valor exagerado para apreciar el efecto.

1.2.2 Instrumentos analógicos.

Los instrumentos analógicos o de aguja se encuentran todavía en muchas aplicaciones prácticas, fundamentalmente a nivel industrial. Eran los instrumentos dominantes hasta comienzos de nuestro siglo, pero con la disponibilidad de sistemas digitales precisos y baratos, su uso se relega a aplicaciones donde la robustez y la intuición a la hora de realizar una lectura son importantes. [Notas curso Medidas Eléctricas, Cap 2]

Figura 1.3. Panel de instrumentos analógicos

Los instrumentos de aguja más comunes para medidas DC son los de imán permanente y bobina móvil. En este caso, la aguja es movida por el par generado por una corriente. En la construcción del instrumento se diseñan resistencias para hacer que la corriente que mueve la aguja sea proporcional a la corriente o la tensión que se quiere medir.

Figura 1.4. Mecanismo de imán permanente y bobina móvil

Como concepto importante los instrumentos analógicos funcionan por corriente. En general esta corriente es provista por el circuito a medir.

En el caso de los instrumentos analógicos es muy difícil contar con el manual del fabricante. Salvo en instrumentos de precisión, lo habitual es no tener manuales disponibles. Para salvar esa dificultad y dar la información relevante del funcionamiento, los fabricantes utilizan un estándar de símbolos y números para indicar el tipo de instrumento, la incertidumbre y la categoría de aislación. La figura 1.5 nos muestra un ejemplo de un voltímetro de DC analógico.

Figura 1.5. Voltímetro analógico Siemens.

En el extremo inferior izquierdo puede verse la simbología empleada para describir el instrumento. En este caso se especifican cinco características: [Simbología de los Instrumentos Analógicos para Mediciones Eléctricas]

a) Magnitud Eléctrica

Magnitud	Aparato	Unidad de medida	Símbolo
Voltaje o tensión	Voltímetro	voltio (V)	V
Intensidad	Amperímetro	ampere (A)	A
Potencia activa	Vatímetro	vatio (W)	W
Potencia reactiva	Varímetro	Voltamperio reactivo (VAr)	VAr
Resistencia	Ohmímetro	Ohmio (Ω)	Ω
Energía eléctrica	Contador de energía activa	Vatio hora (Wh)	kWh

b) Clase de corriente

Corriente	Símbolo
Continua (CC)	—
Alterna (CA)	∼
Continua y alterna	≂

c) Tipo de instrumento

Mecanismo	Símbolo	Mecanismo	Símbolo
Bobina móvil		Vibratorio	
Hierro móvil		Térmico	
Imán móvil		Bimetálico	
Electrodinámico sin hierro		Electroestático	
Electrodinámico con circuito de hierro		Inducción	
Dispositivo electrónico en un circuito de medida		Dispositivo electrónico en circuito auxiliar	
Termopar aislado	V	Termopar no aislado	V

d) Tipo de aislamiento

Tensión de prueba	Símbolo
500 V	
1000 V	1
2000 V	2

El tipo de aislamiento es entre los terminales del instrumento y el chasis. Se hace en alterna a la frecuencia de la red.

e) Posición de funcionamiento

Posición	Símbolo
Vertical	
Horizontal	
Inclinada	n°

f) Incertidumbre expandida

Clase	Límite de error	Aplicación	Símbolo
0,1 0,2	± 0,1 % ± 0,2 %	Instrumentos de gran precisión para investigación	0,1 0,2
0,5	± 0,5 %	Instrumentos de precisión para laboratorio	0,5
1	± 1 %	Instrumentos de medidas portátiles de CC	1
1,5	± 1,5 %	Instrumentos de tableros y portátiles de CA	1,5
2,5 5	± 2,5 % ± 5 %	Instrumentos de tableros	2,5 5

Este valor se da sobre el fondo de escala.

Datos extraídos de:
https://www.demaquinasyherramientas.com/herramientas-de-medicion/simbologia-de-los-instrumentos-analogicos-para-mediciones-electricas

1.2.3 Instrumentos digitales.

Actualmente la mayoría de los instrumentos de medida de tensión y corriente son digitales. En este caso los instrumentos se basan en un módulo de conversión analogico-digital **ADC**.
Un ADC tiene como entrada un voltaje analógico y da como resultado un número digital codificado, generalmente en binario. Todos los conversores ADC tienen una tensión de referencia *Vref*, y el número resultante será una fracción de esta tensión. Las características más relevantes de un conversor ADC son su **velocidad de conversión**, el **número de bits** (o número de cuentas) y su **tensión de referencia**. [Notas del Curso de Medidas Eléctricas, Cap 3]

Ejemplo 1.2. Existen muchos sistemas de instrumentación basados en placas Arduino o similares.
Los Arduino típicamente tienen una tensión de referencia interna de 5 V. En aplicaciones especiales pueden utilizar una referencia externa fijada por el usuario, pero lo normal es *Vref = 5 V*. Un modelo típico, el Arduino UNO, tiene una digitalizadora de 10 bits. Esto corresponde a 1024 valores posibles de la salida, de esta forma la apreciación de un conversor de este tipo es:

$$\Delta V = \frac{5}{1023} \simeq 5\,mV$$

Los instrumentos digitales presentan entonces la información en forma de un número con una apreciación discreta dada por la escala. Generalmente este resultado se muestra en un display, este puede ser de 7 segmentos o una pantalla LCD (Liquid Cristal Display). Ver figura 1.6

Figura 1.6. Izquierda multímetro de banco con salida 7 segmentos, derecha multímetro de mano con salida LCD.

La incertidumbre expandida asociada a la medida de instrumentos digitales usualmente se expresa como:

% Valor de la lectura (medida) + Cuentas (apreciación)

Electrical Specifications

Function	Range [1]	Resolution	Accuracy ±([% of Reading] + [Counts])		
			175	177	179
AC Volts [2] [3]	600.0 mV 6.000 V 60.00 V 600.0 V 1000 V	0.1 mV 0.001 V 0.01 V 0.1 V 1 V	1.0 % + 3 (45 Hz to 500 Hz) 2.0 % + 3 (500 Hz to 1 kHz)	1.0 % + 3 (45 Hz to 500 Hz) 2.0 % + 3 (500 Hz to 1 kHz)	1.0 % + 3 (45 Hz to 500 Hz) 2.0 % + 3 (500 Hz to 1 kHz)
DC mV	600.0 mV	0.1 mV	0.15 % + 2	0.09 % + 2	0.09 % + 2
DC Volts	6.000 V 60.00 V 600.0 V	0.001 V 0.01 V 0.1 V	0.15 % + 2	0.09 % + 2	0.09 % + 2
	1000 V	1 V	0.15 % + 2	0.15 % + 2	0.15 % + 2

Figura 1.6. Información de incertidumbre (manual Fluke 179)

1.3 Determinación de incertidumbre de medida

Toda medida y proceso de medición tiene asociado un margen de incertidumbre, esto es la medida tiene un valor más probable y un rango de posibles valores donde el resultado puede variar. Típicamente se expresa de la forma

$$Resultado \ = \ M \pm \Delta M \ \ Unidades \qquad \text{Ec. 1.5}$$

M es el valor más probable de la medida que puede variar en el rango indicado. El intervalo ΔM es lo que llamamos incertidumbre expandida (se detalla más adelante) esto incluye nuestra incertidumbre en la determinación de la medida y un factor de cobertura para garantizar que la medida realizada está dentro de ese rango.

Es muy frecuente que el resultado de una medida varíe con una estadística *gaussiana* en torno al valor más probable. Sin embargo, a falta de más datos asumimos que todos los valores del intervalo son igualmente probables, esto es la distribución es *rectangular* (también llamada *uniforme*). [Curso de Medidas Eléctricas, Cap 1]

La incertidumbre se asocia a la desviación estándar de la estadística y se divide en dos categorías:

- Incertidumbre **tipo A**: La incertidumbre tipo A proviene de fluctuaciones en la magnitud a medir. Puede ser evaluada por métodos estadísticos mediante la repetición de una serie de medidas. Se considera cuando la apreciación es menor que la fluctuación aleatoria del valor a medir. Se toman *n* valores experimentales para estimar el valor más probable y su desviación estándar.

- Incertidumbre **tipo B**: Todas las que no son A: Aquí entran las que dependen del instrumento, el operador y el procedimiento de medida.

En la incertidumbre **tipo B** también hay un valor más probable y una estadística, solo que se obtienen de forma indirecta a partir del conocimiento de la fuente de incertidumbre y la experiencia del observador.

Para la aplicación práctica en este curso utilizaremos tres fuentes de incertidumbre **tipo B**:

- la apreciación finita del instrumento
- La incertidumbre de calibración del instrumento dada por el fabricante en las hojas de datos
- Constantes o parámetros utilizados para el cálculo del resultado

1.3.1 Determinación del valor más probable

El primer punto a tratar es la determinación del valor más probable. Aquí interviene el concepto de **proceso de medida**. Cuando yo informe el resultado de mi medición puedo decir que:

- Este es el resultado de tomar **UNA** muestra de la magnitud a medir.
- Este es el resultado de tomar un **conjunto de N muestras** de la magnitud a medir, lo llamaremos "$\langle x \rangle$".
- Este es el **valor medio de todas las posibles medidas** de la magnitud. Esto es un parámetro de la estadística que se conoce como valor medio de población, lo llamaremos "μ".

Claramente son tres resultados diferentes. El valor medio μ de todas las posibles medidas es algo que no conocemos, experimentalmente es el límite al cual convergen los valores medios cuando tomamos números muy grandes de muestras. Me gustaría saberlo pero no es posible, lo mejor que puedo hacer es estimarlo a partir de un muestreo de *N* muestras.
Los conjuntos de *N* muestras pueden representar al valor medio, pero este promedio $\langle x \rangle$ no es exactamente μ, es un valor que fluctúa en torno a μ en un entorno que se reduce a cuando se toman más muestras.
Una medida individual es el caso extremo donde el conjunto tiene un solo elemento y su fluctuación es la propia de la magnitud a medir, es mayor que la de cualquier promedio.

Numéricamente, calculo el promedio $\langle x \rangle$ como el valor más representativo del

Valor medio: $$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ Ec.1.6

1.4.2 Evaluación estadística de la incertidumbre tipo A

El problema está en cómo determino la desviación estándar. La **desviación estándar** (raíz de la varianza σ^2) es el promedio de las diferencias entre los datos y el valor medio. Eso es fácil de decir pero no tan fácil de hacer, ya que μ es un valor desconocido. Lo que sí podemos conocer es la desviación respecto al valor medio $\langle x \rangle$ que calculamos a partir de nuestras muestras.
Esto funciona bien salvo por un pequeño detalle: como $\langle x \rangle$ es la media del conjunto de muestras, es claro que los valores muestreados tendrán una fluctuación menor respecto a $\langle x \rangle$ que a μ. Esto es lo que en estadística se llama un *sesgo*: estamos usando un parámetro que favorece nuestro cálculo. Para disminuir este sesgo, el cálculo de la desviación estándar del conjunto original de muestras, que llamaremos s_{ori}, se realiza dividiendo por *N-1* en lugar de la cantidad *N* de muestras (cantidad de sumandos).

Desviación estándar: $$s_{ori} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{N-1}}$$ Ec. 1.7

Donde se han tomado *N* mediciones. La desviación estándar s_{ori} se toma como un indicador de la dispersión de los valores respecto al promedio μ. En el límite cuando tomamos un número muy grande de muestras ($N \to \infty$), el valor tiende a la desviación de la magnitud que representamos con σ ($s_{ori} \to \sigma$).

Resumiendo, queremos determinar el valor esperado μ y la desviación estándar σ de una magnitud analógica. Esto lo estimamos a partir de valor medio del conjunto de muestras $\langle x \rangle$ y de la desviación estándar de las muestras s_{ori}.

Volvemos a la cuestión del proceso de media. **¿Puedo sacar ventaja del hecho de adquirir un conjunto de *N* valores para el cálculo de la desviación estándar?**

Para ello realizamos el siguiente razonamiento. Si en lugar de tomar muestras individuales, tomamos varios conjuntos de *N* elementos: ¿cuál será la desviación de sus valores medios? La respuesta es que los valores medios de los nuevos conjuntos están mucho más agrupados en torno al valor μ que las muestras individuales. La desviación de este conjunto de valores medios es mucho menor que la desviación de las muestras del conjunto original. Llamamos s_{med} a la desviación estándar de los conjuntos de N muestras en torno a μ. Esta desviación se relaciona con el conjunto de medidas original como:

$$s_{med} = \frac{s_{ori}}{\sqrt{n}} \qquad \text{Ec.1.8}$$

Tomamos el valor de s_{med} como la incertidumbre **tipo A** asociada al valor estimado de la magnitud **si se trata de un conjunto**.

Parecería que tomando un número grande de medidas puede reducirse la incertidumbre por el factor que se quiera, pero esto choca con la posibilidad de mantener el experimento constante durante un tiempo largo. Recordar que aquí se trata de la incertidumbre asociada al promedio de la serie de medidas.

1.4.3 Evaluación estadística de la incertidumbre tipo B

No se dispone de un conjunto de datos numéricos, por lo que debe asumirse que la magnitud varía según una determinada distribución de probabilidad. En este curso consideraremos el caso de la distribución de densidad *uniforme*.

A partir de la información suministrada por el fabricante tenemos el rango de incertidumbre expandida. Asumiendo la distribución uniforme obtenemos la incertidumbre, tanto de fabricación del instrumento como de apreciación.

Distribución de densidad uniforme

La densidad uniforme supone que todos los valores en un intervalo [a, b], en particular cada intervalo de diferencias, *dx,* poseen la misma probabilidad.

Función de densidad de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \qquad \text{Ec.1.9}$$

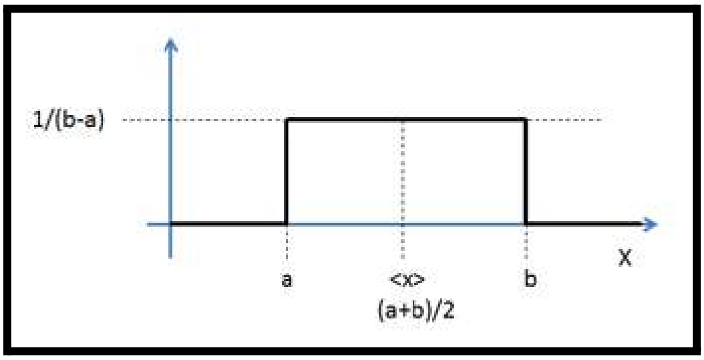

Figura 1.7 Densidad uniforme de probabilidad

1.5 Cálculo práctico de una medida eléctrica

Cuando realizamos una medida en la práctica, generalmente tenemos tres fuentes de incertidumbre. Estadística tipo A (si tomamos un conjunto de medidas), apreciación y calibración del instrumento. En algunos casos puede aparecer algún parámetro o constante en la determinación de la medida que debe incluirse con su incertidumbre.

Si hay una sola medida, o todas son iguales, la incertidumbre estadística vale cero, caso contrario si calcula como:

$$s_A = \frac{s_{ori}}{\sqrt{n}} \qquad \text{Ec.1.10}$$

Para la **apreciación**, todos los valores en el intervalo son igualmente posibles, la distribución en rectangular. El fabricante da el intervalo de apreciación, en nuestro ejemplo es $apr = (b - a)$, por lo que la incertidumbre de apreciación se calcula como

$$s_{ap} = \frac{apr}{\sqrt{12}} \qquad \text{Ec.1.11}$$

Dónde apr es la apreciación del instrumento.

Incertidumbre debida a la fabricación del instrumento, en este caso el fabricante informa el resultado como $\pm\ \Delta$. Veremos en los ejercicios cómo obtener el valor del fabricante. Aquí el dato es $(b - a)/2$, por lo que la incertidumbre es

$$\sigma_{med} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}. \qquad \text{Ec.1.12}$$

Donde Δ se obtiene de la información de fabricante.

El resultado final se calcula como:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{med}^2 + \sigma_{apr}^2 + \sigma_A^2} \qquad \text{Ec. 1.13}$$

Cálculo de la incertidumbre e incertidumbre expandida

Cuando se da un resultado, se toma un factor de cobertura para dar seguridad de que la medida está dentro del intervalo seleccionado. Podemos llamarlo **intervalo de confianza**, esto involucra el intervalo en torno a la media y la **probabilidad** de que una nueva medida esté en dicho intervalo. Este **factor de cobertura** k depende de la estadística utilizada.

Si la incertidumbre de medida es gaussiana, el intervalo de confianza cubre un determinado porcentaje, expresando la **incertidumbre expandida** como $k\sigma$. La siguiente tabla muestra valores posibles de k y la probabilidad asociada.

Intervalo de confianza [%]	Factor de cobertura (k)
68.27	1
90	1.645
95	1.960
95.45	2
99	2.576
99.73	3

Tabla 1.1 Factores de cobertura para cálculo de incertidumbre expandida en distribución gaussiana.

Si la distribución es uniforme, cambia el factor utilizado. A falta de más datos, puede suponerse esta distribución, por lo que es la que se utiliza en casi todos los casos prácticos. Si el valor leído por el instrumento es M y el fabricante dice que el margen de validez es m, esto significa que el resultado pertenece al conjunto $[M - m,\ M + m]$. Si se supone la estadística uniforme, la incertidumbre es

$$\sigma = \frac{m}{\sqrt{3}} \qquad \text{Ec.1.14}$$

Es importante tener en cuenta que, en las hojas de datos, los fabricantes informan:

- m para la incertidumbre de medida
- $2m$ para la apreciación

Para el cálculo de la incertidumbre expandida, se tiene en cuenta la siguiente tabla. Observar que $k = \sqrt{3}$ implica tomar el intervalo completo, por lo que el intervalo de confianza da 100%.

Intervalo de confianza [%]	Factor de cobertura (k)
57.74	1
95	1.645
99	1.71
100	1.73 (=$\sqrt{3}$)

Tabla 1.2 Factores de cobertura para cálculo de incertidumbre extendida en distribución uniforme.

1.6 Propagación de incertidumbre en un cálculo

En muchos casos, las magnitudes se expresan a partir de una fórmula de cálculo, donde se miden algunas variables y se obtienen otras de tablas o datos de fabricantes. Esto es, la magnitud y es función de otras magnitudes x_i.

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i,} \ldots\right) \qquad \text{Ec.1.15}$$

Si cada una de las variables tiene una varianza σ_i^2, en el caso de variables estadísticamente independientes se tiene

$$\sigma_y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2}. \qquad \text{Ec.1.16}$$

El margen de incertidumbre asociado a la magnitud y es la varianza obtenida de la ecuación anterior. En el caso de que las magnitudes tengan correlación estadística, deben considerarse las covarianzas.