Teorema (Lyapunov 1)

Sea $\bar{x}$ un pto de equilibrio de la ec $\dot{x} = f(x)$ donde $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en (H) de Picard. $\bar{x} \in \Omega$. Sea $\bar{x} \in U \subset \Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si $\exists\, V: U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

1) V tiene mínimo absoluto en $\bar{x}$

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$

Entonces $\bar{x}$ es estable. //

Recordar que

- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$
- $\bar{x}$ es estable si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ / si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \; \forall t \geq t_0$

<u>Dem:</u>

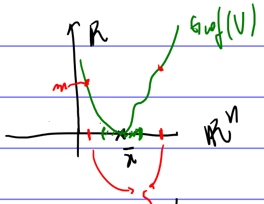
Supongamos $V(\bar{x}) = 0$

Dado $\varepsilon > 0$ / $B_{\bar{x},\varepsilon} \subset U$.

Llamamos $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - \bar{x}\| = \varepsilon\}$

Como S es compacto y V es cont

$\exists\, m = \min\{V(x) : x \in S\} > 0$ por las condiciones de V.



Como V es cont y $V(\bar{x}) = 0$, para $m/2$
$\exists\, \delta > 0 \,/\,$ si $\|x - \bar{x}\| < \delta$
$\Rightarrow V(x) < m/2$

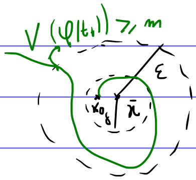
Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solución de la ec dif con c.I $\varphi(t_0) = x_0$ con $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$.

Tomo $v(t) = V(\varphi(t)) \quad \forall\, t \geq t_0$

$$\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \overset{(2)}{\leq} 0 \quad \forall\, t \geq t_0$$

Esto implica que v es no creciente

$$v(t) \leq v(t_0) = V(x_0) < m/2 \quad \forall\, t \geq t_0$$



Si suponemos que $\exists\, t_1 \,/\, \|\varphi(t_1) - \bar{x}\| = \varepsilon$

$\Rightarrow V(\varphi(t_1)) \geq m$. pero

$$v(t_1) = V(\varphi(t_1)) < m/2 \quad ↯$$

Además $\|\varphi(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$
Esto implica por escape de compactos que φ está def $\forall\, t \geq t_0$.

Falta ver el caso $V(\bar{x}) = \alpha \neq 0$.
En este caso tomamos $\tilde{V} := V - \alpha$.
Ver $\tilde{V}$ está en el caso anterior $\square$

Teorema (Lyapunov 2)

Sea $\bar{x}$ punto de equilibrio de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ con $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en (H) de Picard

U entorno de $\bar{x}$ contenido en Ω

Si $\exists\, V: U \to \mathbb{R}$ de clase C^1

1) $V(\bar{x})$ es mínimo estricto.

2) $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable.

Dem: Por Lyapunov 1, $\bar{x}$ es estable.
es decir Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ /

$\|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$.

Queremos ver que $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \bar{x}$.

1) Veamos primeramente que

$v(t) = V(\varphi(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} V(\bar{x})$

Ya sabemos que $\varphi(t) \in B_{\bar{x},\varepsilon}$ y
$\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) < 0$, es decir
v es estrictamente decreciente

Supongamos $V(\bar{x}) = 0$,
Entonces $V(\bar{x}) = 0 \le v(t) < v(t_0)$

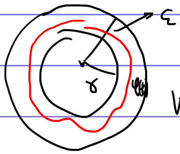
Como v es decreciente y acotada inferiormente, $\exists \lim_{t \to +\infty} v(t) = \alpha \geq 0$

Y entonces $\alpha \le v(t) < v(t_0)$

Quiero ver que $\underline{\alpha = 0}$:

Supongamos $\boxed{\alpha > 0}$.

Como V es continua y $V(\bar{x}) = 0$
$\exists \gamma > 0 /$ si $\|x - \bar{x}\| < \gamma \Rightarrow V(x) < \alpha$. Como $V(\varphi(t)) = v(t) \geq \alpha$
$\Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| \geq \gamma$.



Considero
$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma \le \|x - \bar{x}\| \le \varepsilon\}$

Considero $-r = \max_{x \in K} \{\dot{V}(x)\} < 0$

$\Rightarrow \dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \le -r$

$$v(t) = V(x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot v(s)\,ds$$

$$\le V(x_0) + \int_{t_0}^{t} -r\,ds$$

$$= V(x_0) - r(t-t_0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

$$\Rightarrow v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad \lightning.$$

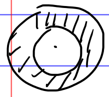
Entonces $\alpha = 0$, $V(\varphi(t)) \to V(\bar x) = 0$

Nos resta ver que $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \bar x$.

es decir, dado $\varepsilon' > 0$, $\exists\, T > 0$ /
si $t > T \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar x\| < \varepsilon'$.

Tomo $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, y considero

$$K' = \{ x \in \mathbb{R}^n \quad \varepsilon' \le \|x - \bar x\| \le \varepsilon \}$$



K'. Sea ahora $m = \min_{x \in K'} \{V(x)\} > 0$

Por otro lado, como $v(t) \to V(\bar x) = 0$
$\exists\, T > 0$ / si $t > T \to v(t) < m/2$.
esto es lo mismo que
$V(\varphi(t)) < m/2$ si $t > T$
Como V tiene mínimo estricto en $\bar x$
Si se cumpliera que $\exists\, t_1$ /
$\varepsilon \ge \|\varphi(t_1) - \bar x\| \ge \varepsilon' \to V(\varphi(t_1)) \ge m$
no es posible

Esto implica que $\|\varphi(t) - \bar x\| < \varepsilon'$ $\forall t > T$
concluimos que $\varphi(t) \to \bar x$.

$\square$

Sobre Inestabilidad:

Teorema (de Cetaev)

Sea $\bar{x}$ un pto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ en (H) de Picard y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$

Si $\exists\ V:U\to\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

1) $\exists\ \{x_n\}\subset U\setminus\{\bar{x}\}\ /\ x_n\to\bar{x}$ y $V(x_n)\leq V(\bar{x})$

2) $\dot{V}(x)<0\quad\forall x\in U\setminus\{\bar{x}\}$

Entonces $\bar{x}$ es inestable

Dem: Supongamos $V(\bar{x})=0$ y que $\bar{x}$ es estable. Dado $\varepsilon>0\ /$

$B_{\bar{x},\varepsilon}\subset U\quad\exists\ \delta>0\ /$

$\|x_0-\bar{x}\|<\delta\Rightarrow\|\varphi(t)-\bar{x}\|<\varepsilon.$

Como $x_n\to\bar{x}$, $\exists\ n_0\ /\ \|x_n-\bar{x}\|<\delta$
$n\geq n_0$

Fijamos $m>n_0$, entonces la solución con C.I. $\varphi(t_0)=x_m$ cumple

$\|\varphi(t)-\bar{x}\|<\varepsilon\qquad\forall\ t\geq t_0$

Considero $v(t) = V(\varphi(t))$. Como por hipótesis $\dot{V} < 0$ y $V(x_m) \leq 0$

v es estrictamente decreciente $\Rightarrow$
$\exists\, M > 0$ y $T > t_0$ /

$$V(\varphi(t)) < -M \quad \forall t > T.$$

Ahora V continua implica que
$\exists\, \delta' > 0$, $0 < \delta' < \varepsilon$ /
si $\| x - \bar{x} \| < \delta' \Rightarrow |V(x)| < M$

$$\Rightarrow \delta' < \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$$

Sea $A = \{ x \in \mathbb{R}^n : \delta' \leq \|x - \bar{x}\| < \varepsilon \}$
Como V y $\dot{V}$ son cont. tomo
$m = \min_{x \in A} \{V(x)\} \Rightarrow v(t) \geq m \quad \forall t > t_0$

y $\quad -r = \max_{x \in A} \{\dot{V}(x)\} < 0$

Entonces

$$v(t) = V(\varphi(T)) + \int_T^t \dot{v}(s)\,ds \leq$$

$$\leq V(\varphi(T)) - r\,(t-T) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty \quad \lightning$$

Entonces $\bar{x}$ es inestable.