INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROPIEDADES ÓPTICAS DE MATERIALES
Curso 2025

Práctico I – Luz.

Fecha de Entrega: 28 de Marzo de 2025. [1]

Ejercicio N° 1 – Interferencia electromagnética:

Calcule a qué distancia se encontrarán los mínimos de interferencia (nodos) para ondas estacionarias, en el vacío, correspondientes a:

a) Un horno de microondas trabajando a 2.45 GHz.

b) Una estación de FM ubicada en 91.1 MHz.

c) Una estación de AM ubicada en 810 kHz.

d) La red eléctrica: 50 Hz.

e) Un haz de rayos X con energía de ~ 8.06 keV (Línea CuK_{α}).

f) Un láser semiconductor emitiendo fotones en 1.45 eV.

Ejercicio N° 2 (*) – Comparación entre Unidades Espectrales:

a) Un espectrómetro tiene una incertidumbre en sus medidas de longitud de onda de $\Delta\lambda \approx 1$ nm constante; es decir, independiente de su región de medida. Estime a qué incertidumbre en energía del fotón (medida en eV) corresponde en las siguientes regiones espectrales:

   i. Línea roja de un láser de He-Ne (~ 633 nm).

   ii. Pico de Sensibilidad del Ojo, en el umbral de oscuridad (~ 510 nm).

   iii. Límite Violeta de Espectro Visible (~ 390 nm).

   iv. Límite de Alta Energía del UV-B (~ 280 nm).

b) Se denomina energía térmica $\Theta_T = k_B\ T$ a la medida de una determinada temperatura absoluta T en unidades de energía a través de la constante de Boltzmann $k_B \cong 1.38 \times 10^{-23}$ J/K. Esta cantidad determina el alcance espectral de las distribuciones térmicas de energía (ej: radiación de cuerpo negro). Considere un fotón que posee la energía correspondiente a esta cantidad (energía térmica) a temperatura ambiente (300 K).

[1] - La entrega mínima debe contener los ejercicios marcados con asterisco, que en este repartido son: Ejercicios N° 2, 5 y 6.

i. ¿Cuánto vale la energía de ese fotón medida en eV?
ii. ¿Cuál sería su longitud de onda?
iii. ¿A qué región espectral corresponde este fotón?
iv. ¿Cuál es su número de onda (en cm^{-1})?

c) Suponga una variación de temperatura ambiente de 10 ^{o}C (por ejemplo, la temperatura ambiente es 290 K en lugar de 300 K). ¿Cuáles son los corrimientos en las cantidades calculadas en las partes b.i, b.ii y b.iv anteriores?

d) Un determinado proceso físico genera desplazamientos en espectros de energía constante $\Delta E = \Theta_T$ (a temperatura ambiente estándar 300 K).

i. ¿Cuánto serán estos desplazamientos medidos en longitud de onda para cada una de las regiones espectrales de la parte a?
ii. Halle las regiones, en longitud de onda, energía y número de onda, en que estos corrimientos podrían medirse con el espectrómetro de la parte a.

NOTA: Significa que el corrimiento espectral es mayor que la incertidumbre del instrumento de medida.

Ejercicio N^{o} 3 – Respuesta Espectral de Medidor de Potencia.

Un medidor de potencia radiante ORIEL 70260, destinado a medir luz monocromática de longitud de onda λ, funciona con un fotodiodo de silicio de área ancha como detector, el cual tiene dos rangos de funcionamiento. Estos rangos se ajustan con un filtro “neutro” (respuesta espectral plana) que atenúa la luz incidente sobre el detector para trabajar con haces de luz muy intensa. El instrumento se encuentra adecuadamente calibrado de forma que da la lectura correcta si se ajusta, en la interfaz del instrumento la longitud de onda λ (previamente conocida) del haz de luz incidente y la presencia (o no) del filtro.

a) Un usuario experto en el uso del instrumento mide que la potencia de un determinado haz de luz de un láser de He-Ne (λ = 633 nm) es de 4.0 mW. Usuarios inexpertos miden erróneamente 2.1 mW y 5.2 mW cuando el instrumento estaba ajustado para λ_1 = 780 nm y λ_2 = 590 nm, respectivamente. Indique en cuál de estas longitudes de onda el detector es más y menos sensible. Compare la respuesta del detector en λ_1 y λ_2 con la que tiene en la longitud de onda del láser de He-Ne.

b) Otro usuario, apurado por irse de vacaciones en semana de turismo, mide para un haz en las mismas condiciones de la parte anterior, 50 mW porque erróneamente trabajó con el filtro neutro cuando el detector estaba ajustado para trabajar sin él. ¿Es esto razonable? Si es así, cuál es la transmitancia del filtro y cuál su densidad óptica.

Ejercicio N° 4 – Radiación de Cuerpo Negro.

A partir de la fórmula de Planck para la distribución espectral (en longitud de onda) de densidad volumétrica de energía en el interior de un cuerpo negro en equilibrio a la temperatura absoluta *T*:

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$$

halle:

a) Para una temperatura intermedia, las aproximaciones válidas en los límites:

   i. longitudes de onda muy cortas (UV extremo): $\lambda \ll hc/k_B T$.

   ii. longitudes de onda muy largas (IR lejano): $\lambda \gg hc/k_B T$.

   OPCIONAL: ¿Cuál es el valor esperado para la energía almacenada en un modo del campo electromagnético en cada uno de estos límites? Interprete.

b) La ley de desplazamiento de Wien $\lambda_{max} T = C$ para la posición en longitud de onda del máximo λ_{max} de dicha distribución; demostrando que en forma aproximada *C* es la quinta parte de $\frac{hc}{k}$.

c) La ley de Stefan $I(T) = \sigma T^4$, para la irradiancia (intensidad de luz) total $I(T)$ emitida por un cuerpo negro a temperatura *T*, hallando el valor de la constante de Stefan Boltzmann σ.

   NOTA: Como punto de partida utilice que la distribución espectral de irradiancia $i_T(\lambda)$ vale: $i_T(\lambda) = \frac{c}{4}\rho_T(\lambda)$.

Ejercicio N° 5 (*) – Densidad de Estados:

a) Calcule la densidad energética de estados disponibles *d*(*E*) para fotones (es decir, partículas que obedecen la relación de dispersión $E = h\nu = \frac{h}{c}k$, siendo *E* la energía de la partícula y *k* el módulo de su vector de onda) en los siguientes casos:

   i. Un sistema bidimensional; o sea, una cavidad cuadrada de lado *L* (la coordenada correspondiente a la tercera dimensión no es relevante en la energía del sistema).

   ii. Un sistema unidimensional (línea de largo *L*); es decir, solo una componente del vector de onda es relevante.

b) Calcule y grafique la densidad energética de estados disponibles *d*(*E*) en tres, dos y una coordenada en el caso de que la relación de dispersión sea del tipo de partícula libre en que la energía de la partícula es proporcional al cuadrado del módulo del vector de onda (relación parabólica $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$). En cada caso estudie además los siguientes puntos:

i. En el espacio (o sea, cavidad cúbica de lado L) estudie la continuidad de dicha densidad y sus derivadas en el valor de la energía de referencia $E = 0$.

NOTA: Observe que como k es real no existen estados con energía negativa, por lo que la densidad de estados es nula para $E < 0$.

ii. En un sistema bidimensional: ¿depende la densidad de estados de la energía?

iii. En un sistema unidimensional: estudie que ocurre en torno al nivel de referencia de la energía. ¿Crece o disminuye la densidad de estados con la energía?

Ejercicio Nº 6 (*) – Función Dieléctrica Compleja.

Cuando la función dieléctrica $\hat{\in}(\omega) = \in'(\omega) + i\in''(\omega)$ es compleja, el índice de refracción complejo $\hat{n}(\omega) = \sqrt{\hat{\in}(\omega)} = n(\omega) + iK(\omega)$ correspondiente tiene partes real (índice de refracción real $n(\omega)$) e imaginaria (coeficiente de extinción $K(\omega)$).

a) Escriba $n(\omega)$ y $K(\omega)$ en función de $\in'(\omega)$ y $\in''(\omega)$.

b) Asumiendo $\in''(\omega) << \in'(\omega)$ simplifique las expresiones anteriores a primer orden en $\in''(\omega) / \in'(\omega)$.

c) La constante dieléctrica del CdTe a 500 nm es 8.92 + i 2.29. Calcule para este material y a esta longitud de onda, usando tanto la aproximación de b) como las expresiones exactas de a):

i. Índice de refracción real y velocidad de fase.

ii. Coeficiente de Extinción y coeficiente de absorción.

iii. Reflectancia para una onda incidiendo normalmente en una interfase aire/CdTe.

Ejercicio Nº 7 – Material Óhmico.

a) Encuentre la relación de dispersión $k(\omega)$, siendo k el módulo del vector de onda y ω la frecuencia angular, para una onda que se propaga por un material óhmico de conductividad σ, permeabilidad μ y permitividad ε; todas supuestas constantes independientes de la frecuencia.

b) (OPCIONAL) Realice una gráfica de la profundidad de penetración (capa laminar o "skin depth") $\delta = {}^{1}\!/_{2k_2}$ donde (k_2 es la parte imaginaria de k) en función de ${}^{\sigma}\!/_{\varepsilon\omega}$.

c) ¿Cuál es la constante dieléctrica equivalente de este sistema? ¿Verifica las relaciones de Kramers-Kronig?

d) Sean k_1 y k_2 las partes reales e imaginarias de k, respectivamente. Halle cuánto valen en función de los parámetros del material y ω en los límites:

   i. Malos conductores. (SUGERENCIA: $k_2 << k_1$).

   ii. Muy buenos conductores. (SUGERENCIA: $\sigma >> \varepsilon\,\omega$).

e) En esta última aproximación, utilizando el coeficiente de reflectividad r para incidencia normal:

$$\hat{r} = \frac{\hat{n} - 1}{\hat{n} + 1}$$

demuestre que la reflectancia R en el infrarrojo es:

$$R \equiv |r|^2 \cong 1 - \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}}$$

Halle ω_1 especificando la región de validez.

f) Estime la reflectancia de un espejo de plata en 100 μm asumiendo una conductividad de $6.6 \times 10^{7}\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$.

Ejercicio N° 8 – Modelo de Debye para Relajación de la Polarización.

a) Considere un sistema formado por dipolos que pueden girar libremente, excepto por la acción de un rozamiento (típicamente moléculas polares como el agua). Un campo electrostático E_0 produce una polarización macroscópica (según la dirección del campo) $P_0 = \varepsilon_0\chi_0 E_0$, siendo χ_0 la susceptibilidad estática del material. Si al apagar el campo en un instante $t = 0$ la polarización decrece exponencialmente con constante de tiempo τ (debido al rozamiento), encuentre una expresión para la función dieléctrica $\in(\omega)$.

   SUGERENCIA: Suponga que ante la acción del campo que se anula instantáneamente $E(t) = E_0(1 - \theta(t))$, siendo $\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ la polarización del medio es $P(t) = P_0\, exp\left(-{}^{t}\!/_{\tau}\right)$. Utilice este resultado para calcular la función respuesta del medio (constante dieléctrica $\in(t)$) calculando luego su transformada de Fourier.

b) Grafique parte real e imaginaria de $\in(\omega)$. Halle la frecuencia en que se encuentra el máximo de $Im[\in(\omega)]$ y el valor de $Re[\in(\omega)]$ en esa frecuencia (expresándolo en función de su valor estático).

c) Verifique su resultado de la parte anterior chequeando que se cumplen las relaciones de Kramers-Kronig.

d) Estudie el límite de $\in(t)$, $Re[\in(\omega)]$ e $Im[\in(\omega)]$ en el límite que $\tau \to 0$.

e) Repita la parte anterior en el límite $\tau \to \infty$, siendo $\in(0) \neq 1$. Compare con el Ejercicio N° 7 parte c.

f) En un experimento de microondas con agua se encuentra un máximo de resonancia en 0.66 cm^{-1}. Halle:

   i. La constante de tiempo de relajación τ.
   ii. La frecuencia de resonancia en Hz.
   iii. ¿Qué opina del horno de microondas de la parte a) del Ejercicio N° 1?

Ejercicio N° 9 (Numérico) – Reflexión en Interfaz Plana.

Utilizando las ecuaciones de Fresnel para el coeficiente de reflexión de ambas polarizaciones $\hat{r}_p$ y $\hat{r}_s$ (paralela y perpendicular al plano de incidencia, respectivamente), grafique la reflectancia de cada una de esas polarizaciones R_p y R_s, y la reflectancia de luz no polarizada $R = \dfrac{R_p + R_s}{2}$, en función del ángulo de incidencia variando de 0 a 90°, para los casos especificados a continuación En cada uno de ellos halle y comente sobre los valores extremos de R_p:

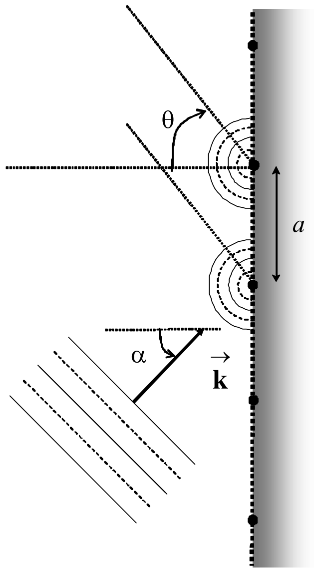
a) Interfaz aire - agua (n = 1.33) para luz incidiendo desde el aire. Verifique la posición del ángulo de Brewster.

b) Idem parte anterior pero para luz incidiendo desde el agua (medio ópticamente más denso). Verifique la posición del ángulo de Brewster y el ángulo a partir del cual se da la refracción total.

c) Interfaz aire - aluminio incidiendo desde el aire para luz de longitud de onda de 496 Å (n_{Al} = 0.771 +i 5.91).

Ejercicio N° 10 – Red de Difracción:

I) Una onda plana monocromática de longitud λ incide sobre una red de difracción con ángulo de incidencia α (ángulo entre el vector de onda y la normal a la red). Este ángulo verifica que $0 \leq \alpha < \pi/2$. La red de difracción está formada por un arreglo (supuesto infinito) de centros dispersores, que distan entre sí a. Se supondrá que el arreglo está ubicado sobre un substrato opaco para que solamente haya dispersiones hacia el semiespacio desde donde incide la onda.

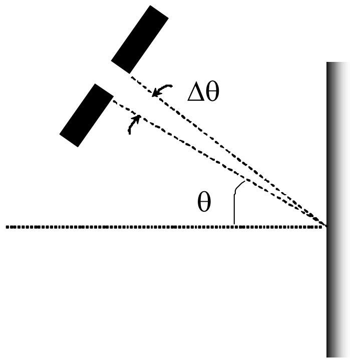


a) Encuentre la condición de difracción; es decir, el ángulo θ (−π/2 < θ < π/2) para el que hay interferencia constructiva para las ondas dispersadas por dichos centros.

NOTA: Asuma la dirección de propagación de la onda dispersada se encuentra en el mismo plano de incidencia que la onda incidente. Y considere que el ángulo θ es positivo si se encuentra ubicado respecto a la normal como se muestra en la figura.

RESPUESTA: $a(\mathit{sen}\alpha - \mathit{sen}\theta) = m\lambda$, donde por definición m (número entero) es el orden de difracción.

b) Verifique que la ley de reflexión (θ = α) es un caso particular de la condición anterior.



c) Ahora se considera que la onda incidente es policromática, es decir, una onda blanca formada por una combinación de todas las longitudes de onda λ, y la incidencia es normal (α = 0). Se agrega en el camino del haz difractado una rendija para un ángulo θ ≠ 0, de ancho tal que subtiende un ángulo Δθ.

i. Si se desprecia el ancho Δθ (Δθ = 0), ¿cuál es la longitud de onda mayor para la que habrá un máximo de interferencia sobre esa rendija?

ii. ¿Cómo se relacionan otras longitudes de onda de menor valor que la hallada en la parte anterior, que también tienen máximos de interferencia en la posición de esa rendija?

iii. En el caso de la parte i anterior, si ahora no se desprecia el ancho Δθ, pero es pequeño (Δθ << θ), calcule la región espectral de longitudes de onda Δλ que tienen máximos de interferencia sobre la rendija.

II) Cuando un haz de luz policromático (muchas longitudes de onda) viaja por un medio dispersivo (*n*(λ), donde *n* es el índice de refracción del medio y λ la longitud de onda), las ondas de diferentes λ se desfasan. Este desfasaje se puede restablecer con el compresor óptico de la Figura, formado por dos redes de difracción enfrentadas y paralelas. El objetivo de este ejercicio es calcular la distancia *L* entre las redes para compensar el desfasaje introducido por el medio dispersivo.

a) Dos ondas monocromáticas planas de longitudes de onda λ_1, λ_2 (con $\lambda_1 > \lambda_2$) recorren un medio (por ejemplo, vidrio) con dispersión normal; es decir $n_1 = n(\lambda_1) < n(\lambda_2) = n_2$. ¿Cuál es el atraso temporal entre los frentes de onda que estaban en fase al incidir sobre el medio, luego de que recorren una distancia d en ese medio? ¿Cuál de los dos recorre el medio en menos tiempo?

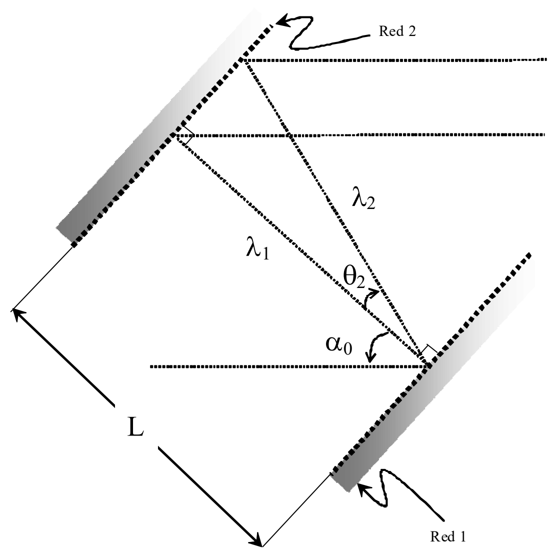


Figura 1

b) Una onda plana monocromática, de longitud de onda λ_1, incide sobre una red de difracción con ángulo de incidencia tal que $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. La distancia entre los centros dispersores a se supondrá mayor que λ_1 ($a > \lambda_1$). La red difracta la onda incidente según una dirección que forma un ángulo θ_1 con la normal a la red. Se definen α y θ_1 positivos cuando están orientados según la figura de la parte I.a).

   i. Se desea que el haz difractado sea normal a la red ($\theta_1 = 0$). Encuentre α_0, el valor de α para que esto ocurra. Verifique que para $m = 1$ siempre existe este α_0.

   ii. Una nueva onda, de longitud de onda $\lambda_2 < \lambda_1$, incide con el ángulo de incidencia α_0 hallado en la parte anterior. Encuentre el ángulo de la onda difractada θ_2 (para el mismo orden m). Verifique que si $\lambda_1 - \lambda_2 << a$ y $m = 1$, θ_2 será pequeño.

c) En el compresor de la Figura las dos ondas de longitudes de onda $\lambda_1 > \lambda_2$ (con $\lambda_1 - \lambda_2 << a$) inciden sobre la primer red con el ángulo de incidencia α_0 hallado en la parte c). Para el orden con $m = 1$:

   i. Verifique que (para el mismo orden) los dos haces salen de la segunda red paralelos entre sí, y a la dirección de incidencia sobre la primer red.

   ii. Encuentre cuál es la diferencia de caminos entre los haces de diferente longitud de onda (luego de salir de la segunda red).

   iii. ¿Cuál de los dos haces recorre menos distancia?

d) Calcule L para que, si se ubica el compresor luego del medio de la parte a), compense el atraso temporal introducido por el medio.

Ejercicio N^o 11 – Ondas Electromagnéticas en Medios Inhomogéneos.

Considere una onda electromagnética de pulsación ω viajando por un material dieléctrico compuesto de forma que la permitividad no es homogénea sino que depende de la posición. De esta forma la geometría del material dará lugar a una constante dieléctrica (permitividad relativa) $\in\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$.

a) Demuestre, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que la dependencia espacial de la intensidad de campo magnético $\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ tiene que ser transversal y viene dada por la ecuación:

$$\nabla\wedge\left[\frac{1}{\in\left(\vec{\mathbf{r}}\right)}\nabla\wedge\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\right]=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío.¿Cómo hallaría la dependencia espacial del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ en función de $\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$? [2]

b) La ecuación hallada en la parte anterior es matemáticamente equivalente a un problema de determinación de autovectores y autovalores (o diagonalización de una matriz para hallar modos de propagación) si se define un operador $\mathbf{\Theta}$ que actúa sobre un vector arbitrario $\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ de forma que $\mathbf{\Theta}\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\equiv\nabla\wedge\left[\frac{1}{\in\left(\vec{\mathbf{r}}\right)}\nabla\wedge\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\right]$. Aquellos vectores $\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)=\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ que verifican la ecuación de la parte a) son los autovectores de $\mathbf{\Theta}$ con autovalor $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$. Para que el espacio sobre el que actúa el operador $\mathbf{\Theta}$ esté correctamente especificado definimos el siguiente producto interno entre dos vectores cualesquiera del espacio $\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ y $\vec{\mathbf{G}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$:

$$\left(\vec{\mathbf{F}},\vec{\mathbf{G}}\right)\equiv\int d\vec{\mathbf{r}}\,\vec{\mathbf{F}}^*\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\cdot\vec{\mathbf{G}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right).$$

En estas condiciones:

i. Demuestre que $\mathbf{\Theta}$ es lineal.

ii. ¿En qué condiciones $\mathbf{\Theta}$ es hermítico?

[2] Se asume que $\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)e^{i\omega t}$ y $\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)e^{i\omega t}$

NOTA: Un operador Ξ se dice hermítico si $\left(\vec{\mathbf{F}},\Xi\vec{\mathbf{G}}\right)=\left(\Xi\vec{\mathbf{F}},\vec{\mathbf{G}}\right)$.

Considere que la región de integración está limitada por una superficie e imponga condiciones a los vectores $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{G}}$ en esa superficie para que los términos de integración en la misma sean nulos de forma que pueda usarse que:

$$\int d\vec{\mathbf{r}}\,\vec{\mathbf{F}}^*\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\cdot\nabla\wedge\vec{\mathbf{K}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)=\int d\vec{\mathbf{r}}\left[\nabla\wedge\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\right]^*\cdot\vec{\mathbf{K}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right).$$

iii. Asumiendo que Θ es hermítico, que la constante dieléctrica $\in\left(\vec{\mathbf{r}}\right)>0$, y calculando $\left(\vec{\mathbf{H}},\Theta\vec{\mathbf{H}}\right)^*$ demuestre que ω^2 no solo es real sino que además es positivo (y por lo tanto ω es real).

iv. Demuestre que dos modos $\vec{\mathbf{H}}_1\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ y $\vec{\mathbf{H}}_2\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ correspondientes a frecuencias diferentes ω_1 y ω_2, son ortogonales.

c) Se escala el material por un factor *s*; o sea, se diseña un nuevo material tal que la constante dieléctrica es ahora $\in'\left(\vec{\mathbf{r}}\right)=\in\left(\frac{\vec{\mathbf{r}}}{s}\right)$ (el material tiene la misma forma pero es *s* veces más "grande"),

i. Demuestre que los nuevos modos tienen el mismo factor de escala $\vec{\mathbf{H}}'\left(\vec{\mathbf{r}}\right)=\vec{\mathbf{H}}\left(\frac{\vec{\mathbf{r}}}{s}\right)$ pero con frecuencia *s* veces más chica: $\omega'=\omega/s$.

ii. Si un material con una distancia característica en el orden de los 200 nm da lugar a estructuras espectrales en la región óptica del azul, ¿en qué región del espectro estarán las estructuras espectrales similares de un material con la misma geometría pero distancia característica en el orden de los 2 cm?

d) Es posible estudiar el mismo problema planteando una ecuación equivalente a la de la parte a) para el desplazamiento eléctrico $\vec{\mathbf{D}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$, que también es transversal.

i. Halle el operador Ξ del que $\vec{\mathbf{D}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ es autovector con autovalor $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$.

ii. Observe que este operador Ξ no es hermítico bajo las mismas condiciones de la parte bii.

iii. Observe que el operador $\boldsymbol{\Xi}' = \dfrac{\boldsymbol{\Xi}}{\in\left(\vec{\mathbf{r}}\right)}$ es hermítico pero sus autovalores no son constantes.

iv. Observe que se puede definir un operador hermítico $\boldsymbol{\Xi}'' = \dfrac{\boldsymbol{\Xi}}{\sqrt{\in\left(\vec{\mathbf{r}}\right)}}$ con autovectores $\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ y autovalores $\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2$, pero $\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ no es necesariamente transversal.