Fundamentos de Programación Entera
1. Introducción

Carlos Testuri – Fernando Islas

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2012-2023

Contenido

Definición de programación entera

Trata del modelado y resolución de problemas de optimización con variables discretas: enteras (indivisibilidad) y binarias (decisiones).

Características:

- Formulaciones representativas y flexibles del problema
- Explosión combinatoria de soluciones factibles
- Resolución más difícil que programación lineal; no se conoce método eficiente general de resolución.

Aplicación: Asignación de salones y horarios a cursos

Una institución que brinda cursos a estudiantes de diferentes carreras se enfrenta a la planificación semanal de asignar salones durante ciertos horarios a los cursos.

Teniendo en cuenta, entre otros, que

- los cursos tienen clases teóricas, prácticas y de laboratorio con diferente carga horaria y estimación de cantidad de asistentes,
- los cursos de un mismo semestre de cada carrera no se deben superponer en horario, y deben asignarse lo más contiguo posible en horario,
- los salones tienen cierta capacidad de asistentes.

Aplicación: Planificación de la producción

Una fábrica debe planificar la producción y entrega de productos mensualmente a partir de pedidos y estimación de demanda futura.

- El plan incluye varios procesos de producción según tipos de productos.
- Se consideran la adquisición de insumos, la disposición de maquinaria (compartida entre los procesos), y la capacidad y la gestión del inventario según la caducidad de los productos.
- La entrega se realiza a varias areas de distribución.

El objetivo es minimizar los costos mientras se mantiene cierto nivel de servicio a los clientes.

Aplicación: Planificación de la generación de electricidad

El suministro de electricidad debe ser muy próximo a la demanda, la cual varia en forma horaria. Para el suministro se dispone de varias fuentes de generación con diferentes atributos.

El problema trata de la planificación horaria de los generadores ("despacho de carga") que se utilizan teniendo en cuenta restricciones como

- costos, potencia, y disponibilidad de los generadores,
- tiempos mínimos de encendido y apagado de los generadores,
- generadores con costos fijos de arranque y no lineales de operación,
- reserva de capacidad de suministro ante picos de demanda.

Aplicación: Tratamiento del cancer de próstata

La braquiterapia de baja dosis de radiación es uno de los tratamientos para el cáncer de próstata localizado. Mediante fuentes radiactivas se suministra suficiente dosis para tratar el tumor mientras se preserva el tejido sano circundante. Las fuentes se colocan en tándem a través de agujas en el tejido del órgano.

Hay muchas posibilidades de ubicar decenas de fuentes, en un centenar y medio de posiciones, restringidas por

- distancia mínima entre pares de fuentes,
- prescripción de dosis en la próstata,
- prescripción de dosis en su entorno, el recto y la uretra.

Se busca minimizar la cantidad de fuentes y la cantidad de agujas que se utilizan.

Modelado

Los modelos permiten la comprensión y la resolución de problemas. Implican abstracciones que reflejan interacciones relevantes de las entidades del problema, donde la simplificación

- insuficiente implica costos extras o incapacidad de resolución, y
- la excesiva acarrea inviabilidad debido a falta de realismo.

El proceso de modelado conlleva ciertas etapas:

- comprensión del problema,
- formulación simbólica (modelo) del problema,
- codificación y resolución (algorítmico-computacional) del modelo,
- interpretación de resultados y validación del modelo

Componentes de un modelo algebraico en optimización

Para establecer un modelo algebraico, a partir de un problema, se deben determinar

- datos (parámetros),
- decisiones (variables),
- restricciones sobre las decisiones, y
- una función sobre las decisiones (objetivo) a optimizar.

En programación entera, la determinación de variables puede tener diferentes alternativas (proceso más elaborado que el caso de programación lineal).

Optimización (Programación matemática)

Problema de maximizar una *función objetivo* de *variables de decisión*, las cuales están sujetas a *restricciones* en los valores que pueden tomar,

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f(x) && (1)\\ \text{sujeto a} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., m, && (2)\\ & x \in X. && (3) \end{aligned}$$

Solución factible: instancia de la variable, $\bar{x}$, que satisface las restric. (2) y (3).
Conjunto/región factible: el conjunto de todas las soluciones factibles.
Solución óptima: solución factible, x^*, que maximiza la función objetivo, (1).
Valor óptimo: valor de la función objetivo en una solución óptima, $f(x^*)$

Problema de programación entera (lineal)

Dados los parámetros: matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y los vectores columnas $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$ y la variable de decisión: vector columna $x \in \mathbb{Z}^n$.

Caso variables enteras (IP: integer program),

$$\begin{array}{cl} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \text{ y entera.} \end{array}$$

Caso variables binarias (BIP: binary integer program),

$$\begin{array}{cl} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n. \end{array}$$

Problema de programación entera mixta (lineal)

Dados, además, los parámetros: matriz $E \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y vector columna $d \in \mathbb{R}^p$, y la variable de decisión: vector columna $y \in \mathbb{R}^p$.

Caso variables enteras y reales (MIP: mixed-integer program).

$$\begin{array}{cl} \max & c^\tau x + d^\tau y \\ \text{s.a} & Ax + Ey \leq b \\ & x \geq 0 \text{ y entera}, y \geq 0. \end{array}$$

Formulación básica

- Decisión con dos alternativas (binaria): variable $x \in \{0, 1\}$
- Decisión con conjunto discreto de alternativas: variable $x \in \{a_1, ..., a_m\}$
- Decisiones binarias dependientes
  La decisión x puede tomarse ($x = 1$) solo si la decisión y es tomada ($y = 1$):
  $$x \leq y.$$
- Relaciones entre decisiones binarias
  Dadas las variables $y_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, ..., m$:
  $$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{m} y_i \leq 1, & (1) \\ \sum_{i=1}^{m} y_i = 1. & (2) \end{array}$$
  ¿Cómo se interpretan (1) y (2)?

Formulación básica: conjunto de valores discretos

Se requiere que la variable x varíe en el conjunto $\{a_1, ..., a_m\}$.

Se introducen las variables binarias y_i, $i = 1, ..., m$ y las restricciones

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., m.$$

Formulación básica: ejemplo

Para un conjunto de cursos, identificados por $i = 1, ..., 5$, se tienen las variables binarias y_i que indican si se cursa ($y_i = 1$) o no ($y_i = 0$) el curso i. Se requiere modelar las siguientes condiciones sobre elección para cursarlos:

- Elegir al menos uno de los cursos: $\sum_{i=1}^{5} y_i \geq 1$
- ¿Elegir a lo sumo cuatro de ellos?
- ¿Si se elige el curso 2, se debe elegir el curso 5?
- ¿Si se elige el curso 1, no se debe elegir el curso 3?
- ¿Se deben elegir los cursos 4 y 5, o ninguno de estos?

Formulación básica: ejemplo restricciones disyuntivas

Dadas $x_i \in \{0, 1\}$, con $i = 1, ..., 5$, se requiere que se cumpla al menos una de las restricciones

$$x_1 + x_3 + x_5 \geq 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 + x_3 + x_4 \geq 2.$$

Se introduce la variable binaria y, y se establece la formulación (conjunción)

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_3 + x_5 \geq 2y, \\
&x_2 + x_3 + x_4 \geq 2(1 - y), \\
&y \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Formulación básica: restricciones disyuntivas

Dadas las decisiones $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x} \geq 0$, se tienen los casos

- *Base*: Al menos una de las restricciones $\mathbf{a}^\tau \mathbf{x} \geq b$, $\mathbf{c}^\tau \mathbf{x} \geq d$, debe cumplirse, donde $\mathbf{a}, \mathbf{c} \geq 0$.
  Se introduce la variable binaria y y las restricciones

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}^\tau \mathbf{x} \geq by, \\
&\mathbf{c}^\tau \mathbf{x} \geq d(1-y), \\
&y \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

- *General*: Al menos k de las restricciones $\mathbf{a}_i^\tau \mathbf{x} \geq b_i$, $i = 1, \ldots, m$, deben cumplirse, donde $\mathbf{a}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.
  Se introducen m variables binarias y_i y las restricciones

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_i^\tau \mathbf{x}_i \geq b_i y_i, \\
&\textstyle\sum_{i=1}^m y_i \geq k, \\
&y_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Problema de la mochila

Existe la posibilidad de guardar n objetos de valor c_i y tamaño a_i, con $i = 1, ..., n$, en una mochila de capacidad b. Se requiere determinar un subconjunto de los objetos cuya suma de valores sea máxima y cuya suma de tamaño no supere la capacidad de la mochila.

Variables
x_i tal que $x_i = 1$ si el objeto i es guardado, y $x_i = 0$ en caso contrario.

Restricciones
no se puede exceder la capacidad: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$.
variables binarias: $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n$.

Función objetivo
maximizar el valor de lo guardado: $\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

¿Cómo se podría resolver?

Problema de asignación

Dadas n personas y n tareas, se debe asignar una tarea a cada persona.
Si a la persona i se le asigna la tarea j se incurre en un costo c_{ij}, con $i, j = 1, ..., n$.
El objetivo es establecer una asignación de mínimo costo total.

Variables
$x_{ij} = 1$ si a la persona i se asigna la tarea j, y $x_{ij} = 0$ en otro caso (o.c.)

Restricciones
cada persona realiza una tarea: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., n,$
cada tarea es realizada por una persona: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, ..., n,$
variables binarias: $x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., n, j = 1, ..., n.$

Función objetivo
minimizar el costo de la asignación: $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$

¿Cómo serán las soluciones del problema relajado a programación lineal?

Problema del vendedor viajero (TSP) (1/2)

Un vendedor debe visitar las ciudades $N = \{1, ..., n\}$ una única vez y retornar a la de partida. El costo de viajar de la ciudad i a la j es c_{ij}, con $i, j \in N$ e $i \neq j$. Se busca encontrar el orden, de menor costo, en que se recorren.

Variables
$x_{ij} = 1$ si el vendedor va de la ciudad i a la j y $x_{ij} = 0$ o.c., con $i, j \in N$, e $i \neq j$

Restricciones
se parte de la ciudad i una única vez:

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij} = 1, \quad i \in N,$$

se arriba a la ciudad j una única vez:

$$\sum_{i \in N: i \neq j} x_{ij} = 1, \quad j \in N,$$

1. ¿Son estas restricciones suficientes para modelar el problema?
2. Si solo se establecen estas restricciones se pueden generan soluciones de ciclos disconexos (subtours). ¿Por qué?

TSP: *Traveling Salesman Problem*

Problema del vendedor viajero (TSP) (2/2)

Se necesitan restricciones adicionales que eliminen ciclos.
Para lo cual hay dos alternativas:
1) Formulación **subtour**,

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N,\ S \neq \emptyset, N,$$

que limita la conectividad entre elementos de S.
2) Formulación **cut-set**,

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subseteq N,\ S \neq \emptyset, N,$$

que impone la conectividad entre elementos de S y su complemento.

Función objetivo
minimizar el costo del viaje: $\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N : j \neq i} c_{ij} x_{ij}$.
¿Cómo podría resolverse?

Ejemplo de problema de cobertura

Planificación de servicios para atender a usuarios.

- A partir de un conjunto de servicios posibles se debe decidir cuales instalar para atender los usuarios.
- De cada servicio se conocen que usuarios se podrían atender y el costo correspondiente de su instalación.
- El objetivo es cubrir la atención de todos los usuarios a mínimo costo de instalación de los servicios.

Cobertura, empaque y partición de conjunto

Dados los conjuntos $M = \{1, ..., m\}$ y $N = \{1, ..., n\}$.
Sea M_j con $j \in N$ una colección de subconjuntos de M.

Dado S subconjunto de N,

- S se dice *cobertura* de M si $\cup_{j \in S} M_j = M$
- S se dice *empaque* de M si $M_j \cap M_k = \emptyset$, para todo $j, k \in S$, tal que $j \neq k$
- S se dice *partición* de M si es cobertura y empaque

Problemas de cobertura, empaque y partición de conjunto

Si M_j esta ponderado con valor c_j para todo $j \in N$.

Sea el valor del conjunto S : $\sum_{j \in S} c_j$.

En el problema de

- *cobertura* se busca S de *menor* valor.
- *empaque* se busca S de *mayor* valor.
- *partición* se busca S de *menor / mayor / cualquier* valor.

1. Si $c_j = 1$ para todo $j \in N$. ¿Qué problemas especiales se plantean?

2. ¿Qué problema ya presentado es un caso especial de uno de estos problemas?

Formulación de cobertura, empaque y partición de conjunto

Dadas la matriz de incidencia $A \in \mathbb{B}^{m \times n}$ de $\{M_j : j \in N\}$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in M_j \\ 0, & \text{o.c.}, \end{cases}$$

y la variable de decisión x_j, la cual vale 1 si $j \in S$ y 0 en o.c.

Entonces S es

- cobertura $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, i = 1, ..., m,$
- empaque $\Leftrightarrow$ ¿Cuál es su formulación?
- partición $\Leftrightarrow$ ¿Cuál es su formulación?

Formulación de problemas de cobertura, empaque y partición

- encontrar una cobertura S de mínimo valor,

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, ..., m, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, ..., n. \end{array}$$

- encontrar un empaque S de máximo valor,

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = 1, ..., m, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, ..., n. \end{array}$$

- encontrar una partición S puede ser min/max valor o no tener objetivo (problema de factibilidad)

$$\begin{array}{rl} \min/\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, ..., m, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, ..., n. \end{array}$$

Localización de instalación no-capacitada (UFL) (1/2)

Una empresa considera instalar ciertas plantas $j = 1, ..., n$ incurriendo en un costo fijo f_j, para suministrar la demanda d_i de un producto por parte de clientes $i = 1, ..., m$. Cada cliente i puede ser suministrado desde la planta j (en caso de instalarse) a un costo por unidad de producto c_{ij}.

Se busca determinar que plantas se instalan y desde cuales se suministra a cada cliente de forma de minimizar la suma de los costos fijos de instalación y los variables de suministro.

UFL: *Uncapacitated Facility Location problem*

Localización de instalación no-capacitada (UFL) (2/2)

Variables
- determinación de instalación de la planta j: $y_j = 1$ si se instala, $y_j = 0$ en o.c.
- suministro del producto al cliente i por la planta j: $x_{ij} \geq 0$

Restricciones
- atención a la demanda de los clientes: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i, \quad i = 1, ..., m.$
- activación de la instalación de plantas: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq My_j, \quad j = 1, ..., n.$

Función objetivo
- minimizar costos: $\min \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$

1. ¿Qué valores debería tener M para que efectivamente sea no-capacitada?
2. ¿Cómo pueden variar las soluciones en función de la relación de costos de instalación y costos unitarios de suministro?

Determinación de lotes no-capacitada (ULS) (1/2)

Consiste en decidir un plan de producción para atender la demanda de un producto durante $t = 1, \ldots, n$ períodos, teniendo en cuenta costos de producción fijos y variables, y costos variables de almacenamiento.

Parámetros
- d_t : demanda en el período t,
- f_t : costo fijo de producir en el período t,
- p_t : costo unitario de producción en el período t,
- h_t : costo unitario de almacenamiento en el período t.

Variables
- x_t : cantidad producida en el período t,
- s_t : inventario al final del período t e inventario inicial s_0
- $y_t = 1$ si se produce en el período t, $y_t = 0$ en o.c.

ULS: *Uncapacitated Lot-Sizing problem*

Determinación de lotes no-capacitada (ULS) (2/2)

Formulación:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t & \\
\text{s.a} & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, ..., n, & (1) \\
& x_t \leq M y_t, \qquad t = 1, ..., n, & (2) \\
& s_0 = 0, s_t \geq 0, x_t \geq 0, y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, ..., n. & (3)
\end{array}
$$

1. ¿Cómo se caracteriza la solución según valores relativos de h_t y f_t?
2. ¿Qué ocurre con la producción cuando $p_t + h_t \geq p_{t+1}$, $t = 1, ..., n$?
3. ¿Cuál sería el menor valor de M para que efectivamente sea no-capacitada?
4. Si hubiera más de un producto. ¿Qué alternativas se podrían plantear?