Comunicaciones Digitales
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de Julio de 2021

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 2 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentacińn de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Se pueden utilizar resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

(a) Plantee un sistema BPSK en un canal AWGN que resulta en una probabilidad de error de bit $P_e = 1 \times 10^{-4}$ en términos de un canal discreto y sin memoria.

(b) Brinde una expresión para la capacidad del canal resultante y calcule su valor.

(c) Considere un código corrector de errores lineal de bloques con una tasa resultante menor a la capacidad del canal. ¿Qué condición debe cumplir el orden del código (es decir, los valores de n y k) para cumplir lo anterior? Comente porqué, a pesar de estar dentro de las condiciones del teorema de Shannon, la probabilidad de error en el mensaje recibido seguramente no sea despreciable.

Problema 2

Suponga que se desea transmitir la salida de un cuantizador de cinco niveles, cuya secuencia notaremos como X_t. A cada nivel los notaremos como 'alto', 'medio-alto', 'medio', 'medio-bajo', y 'bajo'. Las probabilidades de cada nivel no son idénticas, y valen:

$$P(X_t = \text{'alto'}) = 0.15$$
$$P(X_t = \text{'medio-alto'}) = 0.2$$
$$P(X_t = \text{'medio'}) = 0.3$$
$$P(X_t = \text{'medio-bajo'}) = 0.2$$
$$P(X_t = \text{'bajo'}) = 0.15$$

(a) Brinde una codificación óptima para X_t.

(b) Si la tasa de muestras de entrada al cuantizador es R muestras por segundo, ¿a qué tasa promedio genera bits el codificador? ¿Esta tasa es constante? ¿Qué problemas puede generar esto en un sistema de transmisión? Brinde una posible solución.

(c) Suponga que el flujo de bits resultante se protege mediante un código convolucional de tasa 1/2, generado por $p_1[D] = 1 + D + D^2$ y $p_2[D] = 1 + D^2$. ¿Qué palabra de bits se envía si la entrada al cuantizador es 'alto', 'medio-alto','bajo'?

Problema 3

Considere un sistema satelital que envia imágenes a una tasa de 400 kbps. La modulación es 8-PSK, usa la banda de 1694.1 MHz y usa un pulso con factor de roll-off de 25%. La potencia de transmisión (incluyendo la ganancia de la antena) es de 5 W y el satélite se encuentra a 35.786 km de la superficie terrestre.

(a) Brinde un diagrama completo del par transmisor-receptor. Explicite el mapeo de bits a símbolos y las regiones de decisión del módulo correspondiente.

(b) ¿Qué ancho de banda ocupa la transmisión?

(c) Estime la máxima densidad espectral del ruido que puede haber en el canal para obtener una probabilidad de error de bit menor a 1×10^{-4}. Para esto puede usar la fórmula de atenuación en el vacío:

$$L(d) = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2,$$

con $\lambda = c/f$ la longitud de onda ($c \approx 3 \times 10^8\, m/s$), f la frecuencia en Hz y d la distancia en metros. Explicite las hipótesis necesarias en su estimación.

Solución

Problema 1

(a) Ver teórico.

(b)

$$C = max_p I(X, Y)$$
$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = [p(1-\alpha) + (1-p)\alpha]log_2(p(1-\alpha) + (1-p)\alpha) + [(1-p)(1-\alpha) + p\alpha]log_2[(1-p)(1-\alpha) + p\alpha]$$
$$H(Y) = -(p + \alpha - 2p\alpha)log_2(p + \alpha - 2p\alpha) - (1 - p - \alpha + 2p\alpha)log_2(1 - p - \alpha + 2p\alpha)$$
$$= \Omega(\alpha + p - 2p\alpha)$$

$$H(Y|X) = \sum p(x_i, y_j)log_2(\frac{1}{p(x_i|y_j)})$$
$$= -P(y=0; x=0)log_2 P(y=0|x=0) - P(y=1; x=0)log_2 P(y=1|x=0)$$
$$-P(y=0; x=1)log_2 P(y=0|x=1) - P(y=1; x=1)log_2 P(y=1|x=1)$$
$$= -p(1-\alpha)log_2(1-\alpha) - p\alpha log_2(\alpha) - (1-p)\alpha log_2(\alpha) - (1-p)(1-\alpha)log_2(1-\alpha)$$
$$= log(1-\alpha)(\alpha-1) - \alpha log_2(\alpha) = \Omega(\alpha) = H(Y|X)$$

$$I(X; Y) = \Omega(\alpha + p - 2p\alpha) - \Omega(\alpha)$$

Para hallar el p que maximiza $I(X; Y)$ derivamos la expresión anterior e igualamos a cero.

$$\frac{\delta I(X;Y)}{\delta p} = (-1 + 2\alpha)log_2(p + \alpha - 2p\alpha) - (1 + 2\alpha)C + (-2\alpha + 1)log_2(1 - p - \alpha + 2p\alpha) - (2\alpha - 1)C = 0$$

$$log_2(p + \alpha - 2p\alpha) = log_2(1 - p - \alpha + 2p\alpha)$$

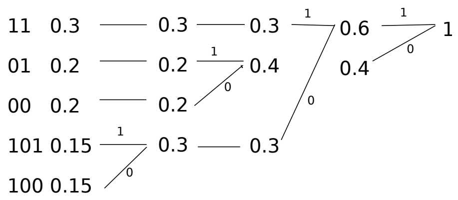
$$\rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Finalmente volviendo a la expresión de la capacidad de canal

$$C = \Omega(\frac{1}{2}) - \Omega(\alpha) = 1 - \Omega(\alpha)$$
$$= 1 - [-\alpha log_2(\alpha) - (1-\alpha)log(1-\alpha)]$$

Siendo $\alpha = 10^{-4}$ resulta $C = 0.9988$ bits por uso de canal

(c) k y n deben cumplir la relación $\frac{k}{n} < C$ para cumplir las condiciones del teórema de Shannon. Sin embargo lo anterior implica que existe algún código para el cuál a medida que crece n, la probabilidad de error tiende a cero, y este código no es posible lograrlo.



Problema 2

(a) Se puede lograr aplicando el algoritmo de codificación de Huffman,
De esta manera obtenemos las palabras de código

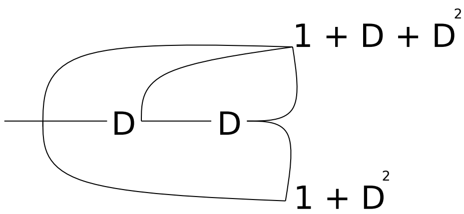
- 11 nivel medio
- 01 nivel medio-alto
- 00 nivel medio-bajo
- 101 nivel alto
- 100 nivel bajo

(b) El largo medio de código esta dado por

$$\hat{L} = 0.3 \cdot 2 + 2 \cdot (0.2 + 0.2) + 3 \cdot (0.15 + 0.15) = 2.3 bits$$

Lo cual significa que si a la entrada del códificador tengo una tasa R, a la salida en promedio tendré $2.3R$ bits. La tasa no es constante, varía con la palabra de código transmitida. Por lo cual se deberá considerar una solución de sincronismo en el receptor.

(c) La palabra de entrada al cunatizador será 101 00 100.



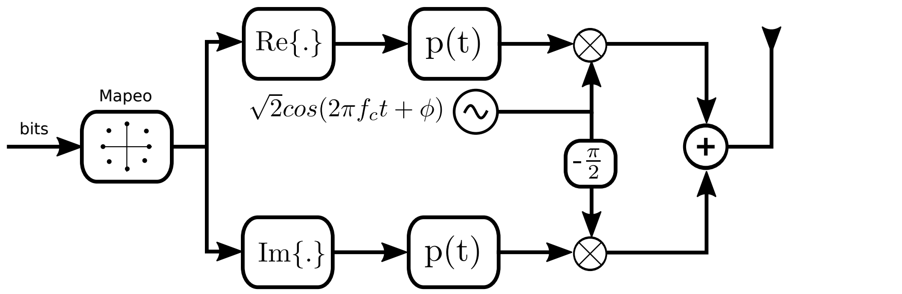
La palabra de bits enviada, siguiendo el diágrama anterior y considerando que se encuentra inicialmente con entradas nulas será 00 00 11 10 11 11 10 00.

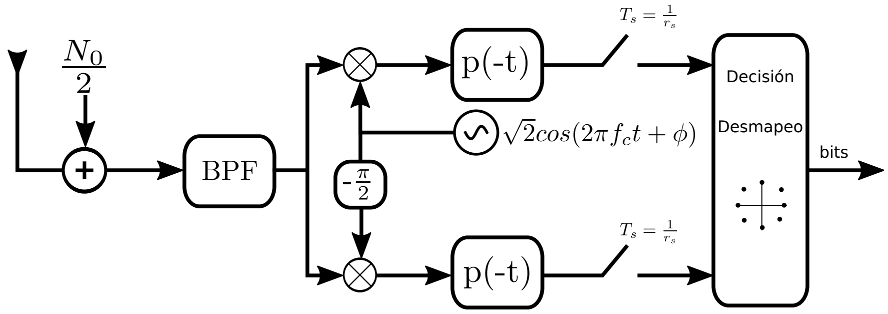
Problema 3

(a)

(b)

$$W = r_s(1+\rho) = \frac{rb}{3}(1+\rho) = \frac{400kbps}{3}(1+0.25) = 167kHz$$





(c)

$$P(\text{éxito}|s_0) = P(\frac{\pi}{8} < tan^{-1}(\frac{N_q}{A/\sqrt{L}}) < \frac{\pi}{8})$$

$$P\left(-\frac{A}{\sqrt{L}}tan(\frac{\pi}{8}) < N_q < \frac{A}{\sqrt{L}}tan(\frac{\pi}{8})\right)$$

$$P(éxito|s_0) = 1 - 2Q\left(\frac{\frac{A}{\sqrt{L}}tan(\frac{\pi}{8})}{\sigma}\right)$$

$$P(error|s_0) = 2Q\left(\frac{\frac{A}{\sqrt{L}}tan(\frac{\pi}{8})}{\sigma}\right) = P_e$$

$$P_T = r_s \cdot A^2 = \frac{r_b}{3} \cdot A^2 \rightarrow A = \sqrt{(\frac{P_T \cdot 3}{r_s})}$$

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot P_T tan^2(\frac{\pi}{8})}{L \cdot \sigma^2}}\right)$$

$$P_{eb} = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot P_T tan^2(\frac{\pi}{8})}{L \cdot \sigma^2}}\right) \leq 10^{-4}$$

$$\rightarrow \left[Q^{-1}\left(\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}\right)\right]^2 \cdot \frac{L}{3 \cdot P_T tan^2(\frac{\pi}{8})} = \sigma^2$$