Segundo Parcial MD1 2022
SOLUCION - VERSION 2

Viernes 8 de julio de 2022

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
A	C	B	D	C	B

Múltiple Opción 1

La relación de divisibilidad en $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ tiene un mínimo que es 1 (pues 1 divide a todos los elementos) y un máximo que es 12 (pues todos los elementos de A dividen a 12). Esto descarta las opciones C y D. Notar que los elementos 2 y 3 siguen en el diagrama de Hasse inmediatamente del 1 (pues son primos), y 6 es el único elemento que sigue inmediatamente del 3. Esto descarta la opción B. Luego, la opción correcta es la A.

Múltiple Opción 2

Si al moverse en el sentido $x - y$ lo denotamos por 1 y moverse en sentido opuesto por 0, entonces podemos modelar nuestro problema a contar la cantidad de palabras binarias de largo 11 con seis símbolos 1 y cinco símbolos 0. Esta cantidad es $\binom{11}{6}$, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 3

Sea G el grafo que consiste de 3 ciclos C_5 con un único vértice en común. Como es conexo y todos sus vértices tienen grado par, G es euleriano. Además, G no es hamiltoniano, puesto que para visitar aristas en distintos ciclos se debe visitar más de una vez el vértice común. Entonces, la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 4

Sea h la cantidad de hojas del árbol $T = (V, E)$. Por la fórmula para la suma de los grados de los vértices tenemos que $h + 4 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5 = 2|E|$. Además, como T es árbol sabemos que $|E| = |V| - 1 = (h + 4 + 1 + 2 + 1) - 1 = h + 7$. Reemplazando en la primera igualdad conseguimos que $h + 24 = 2h + 14$, por lo que $h = 10$, y la respuesta correcta es la D.

Múltiple Opción 5

Sea $G = (V, E)$ un plano simple conexo con 10 regiones planas todas de grado 3. Por la fórmula para la suma de los grados de las regiones tenemos que $2|E| = \sum_{i=1}^{10} gr(r_i) = 30$, por lo que $|E| = 15$. Como G es plano conexo, por el Teorema de Euler tenemos que $|V| - |E| + R = 2$. Usando que $R = 10$ y $|E| = 15$ se deduce que $|V| = 7$. Falta ver que existe tal grafo G. Consideremos una inmersión plana de K_4, cuyas regiones acotadas son tres triángulos. Agregando tres vértices a K_4 donde cada vértice se conecta con los de un triángulo diferente se consigue G. Luego la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 6

Sabemos que el elemento 1 se relaciona consigo mismo y posiblemente con otros. Separemos en todos los casos posibles según $|[1]| \in \{1, 2, 3, 4\}$:

- Si $|[1]| = 4$, todos se relacionan. Esto define 1 relación de equivalencia.
- Si $|[1]| = 3$ hay exactamente un elemento de $\{2, 3, 4\}$ que se relaciona solo consigo mismo. En este caso hay 3 posibles relaciones de equivalencia.
- Si $|[1]| = 2$, tenemos que 1 se relaciona exactamente con un elemento de $\{2, 3, 4\}$. Para cada opción posible, los dos restantes elementos o bien se relacionan o no. Tenemos entonces $3 \times 2 = 6$ posibles relaciones de equivalencia.
- Si $|[1]| = 1$, tenemos que 1 se relaciona solo consigo mismo, y debemos contar las relaciones de equivalencia sobre $\{2, 3, 4\}$. Si $|[2]| = 3$ tenemos un solo caso; si $|[2]| = 2$ hay dos relaciones (2 se relaciona con 3 o bien con 4); si $|[2]| = 1$ tenemos dos casos, según si 3 se relaciona o no con 4. Luego, hay un total de $1 + 2 + 2 = 5$ posibles relaciones cuando $|[1]| = 1$.

Por la regla de la suma, la cantidad de relaciones posibles sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es $1 + 3 + 6 + 5 = 15$, y la opción correcta es la B.

Problema de Desarrollo

(a) El ciclo de 5 vértices tiene número cromático 3 pero no tiene triángulos, por lo que $G = C_5$ es un ejemplo posible de grafo.

(b) Aplicando dos veces la regla de sustracción y contracción obtenemos que:

$$p_{C_5}(x) = p_{P_5}(x) - p_{C_4}(x);$$
$$p_{C_4}(x) = p_{P_4}(x) - p_{K_3}(x).$$

Recordando que el polinomio cromático de todo árbol de n vértices es $x(x-1)^{n-1}$ y el de un grafo completo de n vértices es $\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{C_5}(x) &= p_{P_5}(x) - p_{P_4}(x) + p_{K_3}(x) \\ &= x(x-1)^4 - x(x-1)^3 + x(x-1)(x-2) \\ &= x(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^2 + 2x - 1 + x - 2) \\ &= x(x-1)(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) \\ &= x(x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

(c) Tras evaluar $p_{C_5}(x)$ se ve que $p_{C_5}(0) = p_{C_5}(1) = p_{C_5}(2) = 0$ y que $p_G(3) = 30 > 0$, corroborando que el número cromático de C_5 es 3.