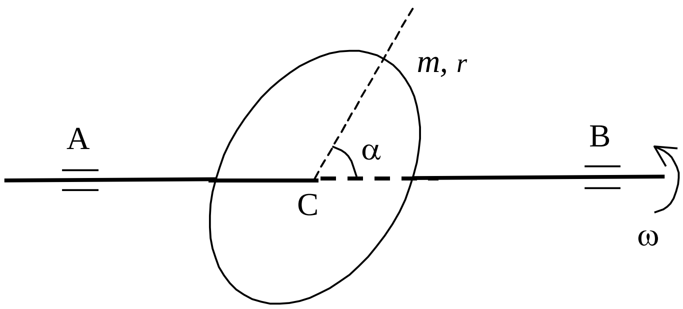
INSTITUTO DE FÍSICA
MECÁNICA NEWTONIANA

(Editado por última vez: marzo 2020)

<u>Práctico VIII</u> – Dinámica del Rígido. Movimiento en el espacio.

<u>Parte A: Dinámica de sistemas rígidos. Movimiento en el espacio.</u>

Ejercicio Nº 1

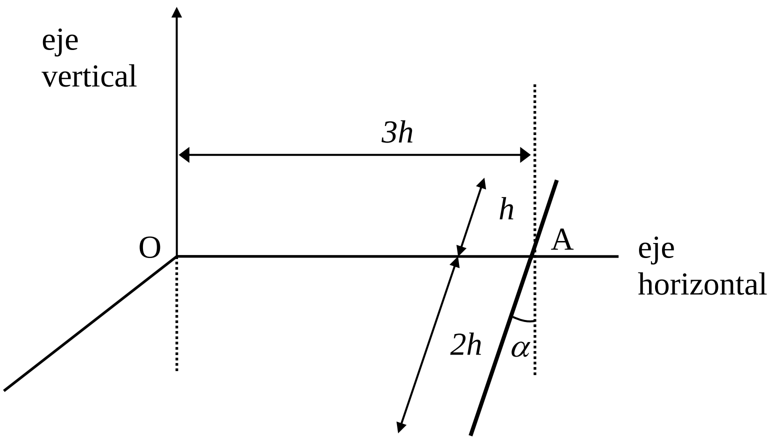


Se considera un disco homogéneo de masa m y radio r, soldado en su centro C a un eje de masa despreciable, es decir, unidos rígidamente. El plano del disco forma un ángulo α constante con el eje. Se coloca el eje horizontalmente sobre los apoyos lisos A y B, simétricos respecto a C, que permanece fijo, y se lo hace girar con velocidad angular ω constante.

Halle la fuerza y el momento resultantes de las fuerzas aplicadas sobre el disco para que el movimiento sea posible.

<u>NOTA</u>: Observe que si el centro de masa del disco no estuviese sobre el eje la resultante de las fuerzas no quedaría tan simple.

Ejercicio Nº 2



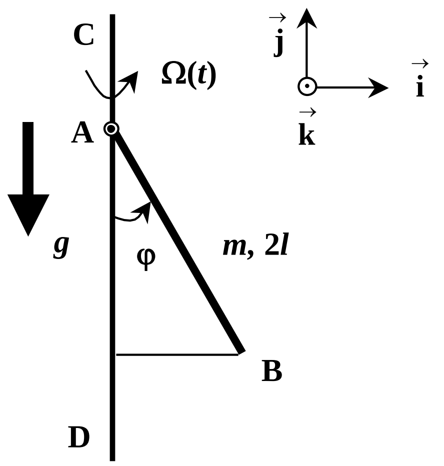
Una barra homogénea, de longitud $3h$ y masa m puede girar libremente alrededor de un eje horizontal mediante una articulación cilíndrica lisa en el punto A, ubicado a una distancia h de un extremo de la barra. El eje horizontal gira con velocidad angular constante ω en torno a un eje vertical que pasa por O, el cual dista $3h$ del punto A, como se muestra en la figura. Durante el movimiento, el ángulo α que forma la barra con el plano vertical es constante.

a) Halle los valores posibles de α en función de ω.

b) Determine el momento reactivo que ejerce la articulación sobre la barra.

Ejercicio Nº 3

Una barra homogénea AB, de masa m y longitud $2l$ está unida a un eje vertical CD en su extremo A, que permanece fijo respecto a un sistema de referencia inercial. La unión en el punto A está hecha a través de una articulación cilíndrica lisa, que permite a la barra girar libremente en un plano vertical que contiene al eje CD, pero a su vez obliga a este plano a girar en torno a CD con una velocidad angular impuesta $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$, siendo Ω_0 y α ambos positivos.



El extremo B de la barra se ata al eje CD por medio de un hilo inextensible de longitud $2l\text{sen}(\varphi_0)$ que permanece tenso en posición horizontal, y asegura que $\varphi = \varphi_0 < \pi/2$ sea constante, siendo φ el ángulo entre la barra AB y el eje CD, como indica la figura.

NOTA ACLARATORIA: El vínculo en A es tal que el momento de fuerzas que se transfiere a la barra en A es $\vec{\mathbf{M}}_A^{react} = M_1\hat{i} + M_2\hat{j}$, escrito en una base $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ solidaria al plano. M_2 es el par motor que hace girar al plano, y M_1 es el par reactivo que obliga a la barra a permanecer en ese plano vertical rotatorio. $\vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{M}}_A^{(r)} = 0$ por ser la articulación lisa.

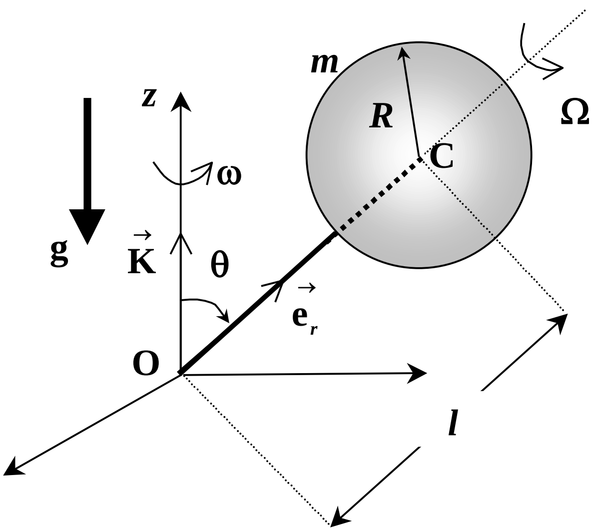
a) Halle el valor mínimo de Ω_0 para el cual el hilo permanece efectivamente tenso para todo instante $t > 0$.

b) Si se verifica la condición anterior, halle el par motor M_2 que hay que aplicar para asegurar que el sistema se mueva con esta velocidad angular $\Omega(t)$.

c) Si en un determinado instante $t_1 > 0$ se rompe el hilo, halle la ecuación de movimiento para el ángulo φ.

Ejercicio Nº 4

Una esfera de masa m, radio R y densidad uniforme está unida a una barra de longitud l y masa despreciable. La barra pasa por el centro de la esfera **C** y el vínculo es tal que la esfera puede girar libremente en torno a la barra. El otro extremo de la barra se encuentra articulado en un punto fijo **O**, de forma que la barra puede girar libremente en torno a **O**. El sistema está sometido solamente a la acción del peso (además de las fuerzas reactivas en **O**).

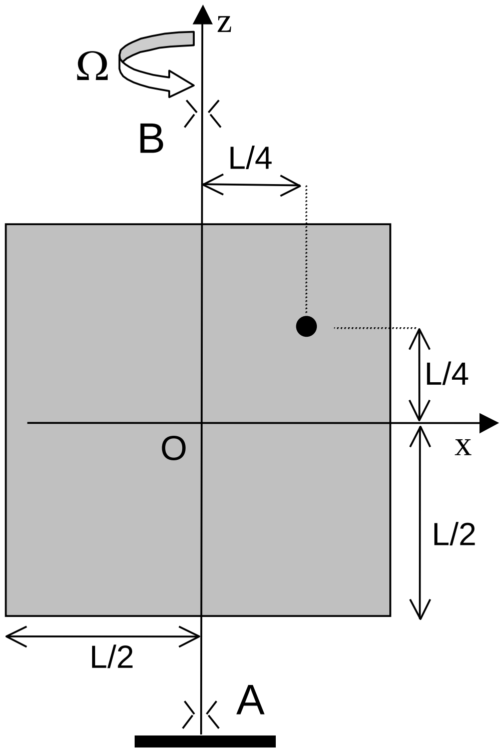


Se supondrá que el sistema gira con nutación θ constante, que la velocidad angular de la barra alrededor de **Oz** es ω y la velocidad angular de la esfera relativa a la barra es Ω. Ambas velocidades angulares, ω y Ω, son constantes.

a) Calcule el momento angular $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}}$ de la esfera respecto al punto **C**, y luego halle el momento angular del sistema total $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}}$ respecto del punto O.

b) ¿Cuál debe ser la relación que debe existir entre ω y Ω para que efectivamente ése sea el movimiento del sistema?

Ejercicio N° 5 (Segundo parcial 2001)



Considere una placa uniforme cuadrada de lado *L* y masa *M*. La placa tiene clavado un clavo de masa *m* y dimensiones despreciables en la posición indicada en la figura (el centro de uno de los cuadrantes de la placa). En este ejercicio se considera que no actúa el peso.

a) Calcule el tensor de inercia del sistema rígido formado por la placa y el clavo con respecto al centro O de la placa, utilizando el sistema de ejes ortogonales indicados en la figura (el eje *y* es perpendicular al plano de la placa y entrante). Ver nota más abajo.

b) La placa se mueve girando con velocidad angular constante Ω en torno a un eje de rotación de masa despreciable que coincide con el eje *z*. Los apoyos del eje son A y B (puntuales y lisos) y se encuentran en z = -3L/4 (A) y z = +3L/4 (B). Se sabe que los apoyos sólo pueden soportar una fuerza máxima (perpendicular al eje) de valor $F_{\max}$.

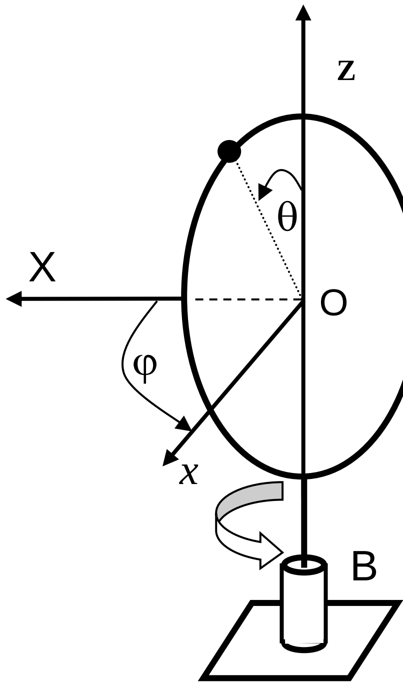
   i) Halle las componentes perpendiculares al eje de giro de las reacciones en los apoyos A y B.

   ii) Determine el valor máximo de Ω para que los apoyos no se rompan. Exprese el resultado en términos de *M*, *m*, *L* y $F_{\max}$. Si la condición anterior no se cumple, ¿cuál de los dos apoyos se romperá primero?

c) Se tiene un segundo clavo idéntico al anterior. ¿En qué posición de la placa debe clavarse este clavo si se desea que no exista un límite superior para Ω? Justifique su respuesta.

<u>NOTA</u>: Para una placa homogénea cuadrada de masa *M* y lado *L*, el tensor de inercia en la base *x*, *y*, *z* de la figura es
$$\begin{pmatrix} \frac{ML^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ML^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{12} \end{pmatrix}$$

Ejercicio Nº 6 (Examen agosto 2001)



Una partícula de masa *m* se mueve sobre una guía circular uniforme de radio *R* y masa *M*. El contacto entre la guía y la partícula es liso y bilateral. La guía gira libremente en torno al eje vertical Z. Para ello está sostenida, como muestra la figura, mediante un apoyo cilíndrico liso en B. El plano de la guía (*x*Z) forma un ángulo $\varphi(t)$ con respecto al plano fijo XZ. La posición de la partícula sobre la guía está identificada por el ángulo $\theta(t)$ (ver figura).

a) Demuestre que la componente vertical del momento angular total del sistema respecto al centro O de la guía es constante.

b) Halle la expresión de la energía total del sistema en función de los parámetros del problema y de las velocidades angulares $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$.

En el instante inicial la guía gira con velocidad angular $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ y la partícula se encuentra en la parte superior de la guía con velocidad nula.

c) Determine la velocidad angular de la guía y la velocidad de la partícula cuando ésta pasa por el extremo del diámetro horizontal $\left(\theta = \pi/2\right)$.

d) Halle la aceleración angular $\ddot{\varphi}$ de la guía en ese instante.

e) Halle la fuerza de contacto entre la guía y la partícula en ese instante.

Ejercicio Nº 7

El rígido de la figura está formado por una esfera de masa *m* y radio *R*, a la cual se suelda en el punto **A** de su superficie una barra **BA** en dirección radial, de largo *R* y masa *2m*. Dicho rígido se apoya sobre un plano horizontal liso como se muestra en la figura.

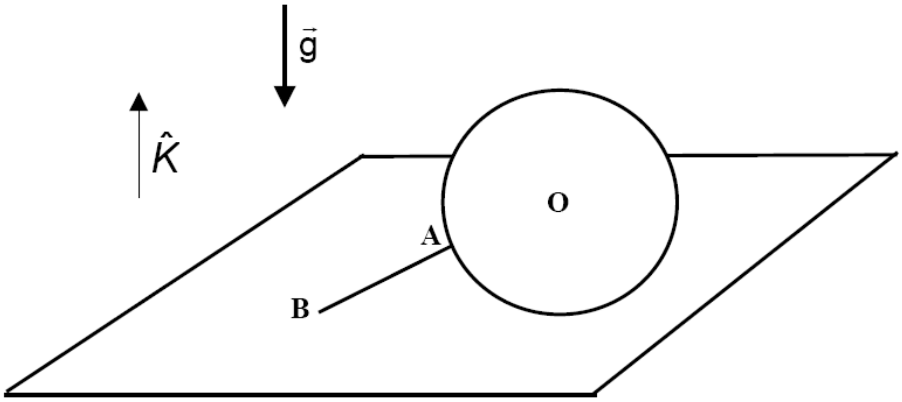
Inicialmente, el rígido está girando alrededor del eje vertical que pasa por su baricentro con velocidad angular $\vec{\Omega} = \omega\hat{K}$.

a) Halle el tensor de inercia del rígido en un sistema de referencia con origen en su centro de masa.

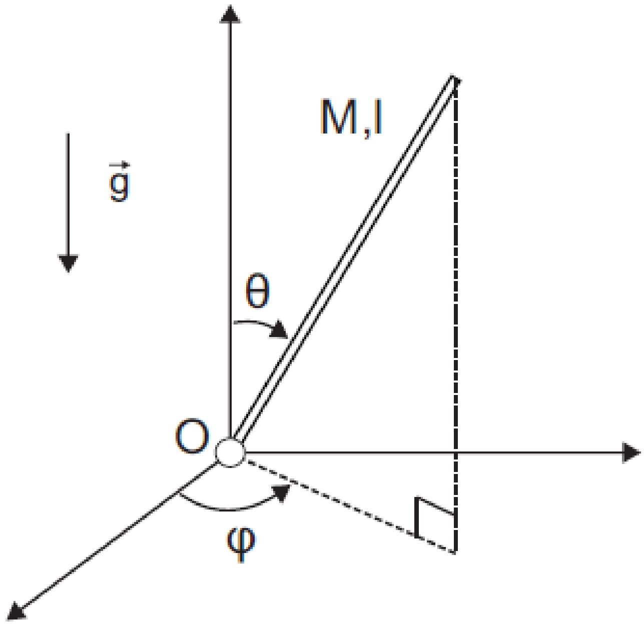
b) Calcule el momento angular del rígido respecto de su centro de masa.

c) Halle las reacciones del plano sobre el rígido.

d) Determine la condición para que el rígido se mantenga apoyado en ambos puntos de contacto.



Ejercicio Nº 8 (Segundo Parcial 2013)



Una barra homogénea, de masa *M* y longitud *l*, está unida a un punto fijo O por medio de una articulación esférica lisa. La barra se mueve bajo la influencia de la gravedad. Se definen los ángulos θ y φ usuales de las coordenadas esféricas: θ es el ángulo que forma la barra con el eje vertical z y φ el que forma la proyección de la barra en el plano horizontal con el eje x.

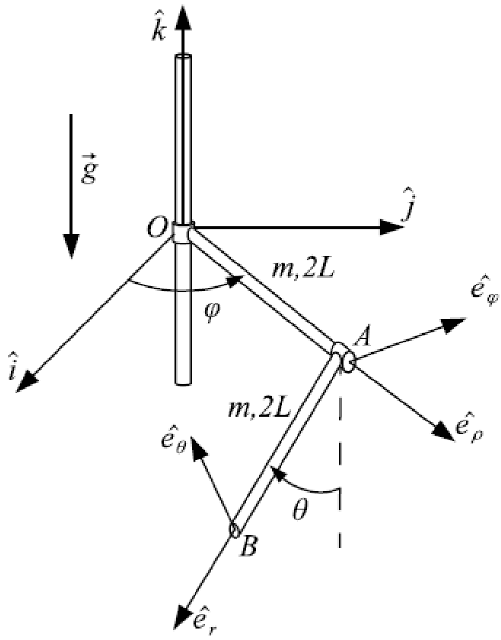
a) Halle el momento angular en el punto O y la energía cinética de la barra.

b) ¿Existen magnitudes conservadas en este problema? En caso afirmativo diga cuáles son y justifique su respuesta.

c) Se lanza la barra con $\theta(0)=\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}(0)=0$, $\varphi(0)=0$ y $\dot{\varphi}(0)=\omega$. Halle una ecuación diferencial para el ángulo θ de la forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$.

d) Suponiendo $\omega^2 = 3\sqrt{5}\frac{g}{l}$, halle los valores extremos que puede tomar el ángulo θ.

Ejercicio Nº 9 (Segundo Parcial 2016)



Considere el sistema formado por las barras homogéneas OA y AB, ambas de masa *m* y largo 2*L* y perpendiculares entre sí por el punto A; sean $\hat{e}_\rho$ y $\hat{e}_r$ versores según OA y AB, respectivamente. La barra OA está unida en el punto O a un eje vertical mediante una articulación cilíndrica lisa que le permite girar libremente en la dirección $O\hat{k}$ y permanecer en el plano horizontal (fijo) $O\hat{i}\hat{j}$ (sea φ el ángulo que forma la barra con respecto a $O\hat{i}$). Mediante otra articulación cilíndrica lisa la barra AB gira libremente en torno a $\hat{e}_\rho$ (sea θ el ángulo que forma AB con respecto a la vertical local).

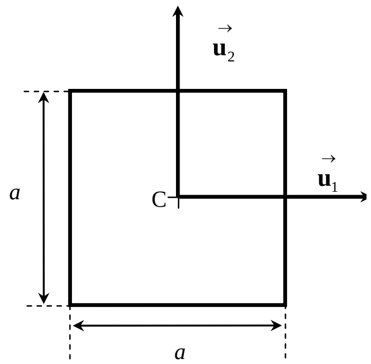
a) Pruebe que la componente vertical del momento angular respecto a O del sistema de las barras es una cantidad conservada. ¿Qué otra cantidad física se conserva en el movimiento del sistema? Justifique.

b) Halle, en función de θ, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ la componente vertical del momento angular respecto a O y la energía cinética para el sistema de barras.

Suponga de ahora en más que las barras parten del reposo con AB horizontal.

c) Halle $\dot{\varphi}$ para el instante en que AB alcanza la vertical.

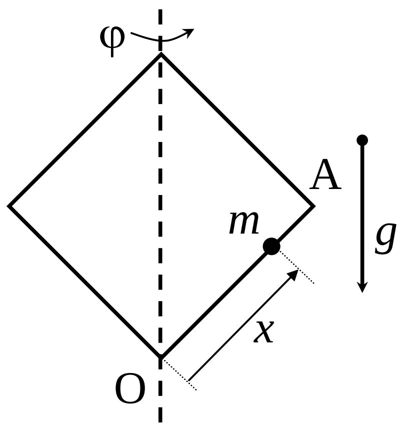
Ejercicio Nº 10 (Examen Diciembre 2019)



Con cuatro barras homogéneas idénticas se construye una pieza de forma cuadrangular, en que cada barra es el lado de un cuadrado. Las barras tienen largo *a* y masa *M*.

a) Calcule los momentos de inercia de la pieza respecto a las rectas que pasan por el centro C de la placa y son paralelas a los lados ($C\vec{\mathbf{u}}_1$ y $C\vec{\mathbf{u}}_2$ en la figura).

b) La pieza anterior gira libremente (articulaciones cilíndricas lisas) en torno a un eje vertical que coincide con una diagonal del cuadrado. A lo largo de uno de sus lados inferiores OA se mueve sin rozamiento una masa puntual *m*. El vértice inferior O (ubicado sobre el eje) es fijo. La masa total de la pieza $4M = 3m$. Inicialmente la pieza se mueve con velocidad angular $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ y la masa *m* está en reposo relativo a la pieza y ubicada en el punto medio del lado OA.



i. Halle las preintegrales de movimiento que se obtienen de las leyes de conservación del sistema.

ii. Suponiendo la masa sube a partir del instante inicial, encuentre la condición para que la masa *m* no llegue al extremo A.

Parte B: Resultado de algunos ejercicios seleccionados

Ejercicio Nº 1 $R = mg$ hacia arriba; $M = \frac{1}{4} mr^2\omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$ para el par, cuya dirección es perpendicular al eje y está en el plano del disco.

Ejercicio Nº 3 a) $\Omega_0 > \sqrt{\frac{3g}{4l\cos\varphi_0}}$ b) $M_2 = \frac{4ml^2}{3}\alpha \sin^2\varphi_0$

c) $\frac{4}{3} l\left(\ddot{\varphi} - \Omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\right) + g\sin\varphi = 0$

Ejercicio Nº 4 a) $\vec{\mathbf{L}}_C = \frac{2}{5} mR^2\left(\Omega\vec{\mathbf{e}}_r + \omega\vec{\mathbf{k}}\right)$, $\vec{\mathbf{L}}_O = \frac{2}{5} mR^2\left(\Omega\vec{\mathbf{e}}_r + \omega\vec{\mathbf{k}}\right) - ml^2\omega \operatorname{sen}\theta\, \vec{\mathbf{e}}_\theta$;

b) $\Omega = \frac{5l\left(g + l\omega^2\cos\theta\right)}{2R^2\omega}$

Ejercicio Nº 7 c) $N_1 = \frac{3}{2} mg - \frac{5}{12} mR\omega^2$ y $N_2 = \frac{3}{2} mg + \frac{5}{12} mR\omega^2$

d) $\omega^2 < \frac{18g}{5R}$