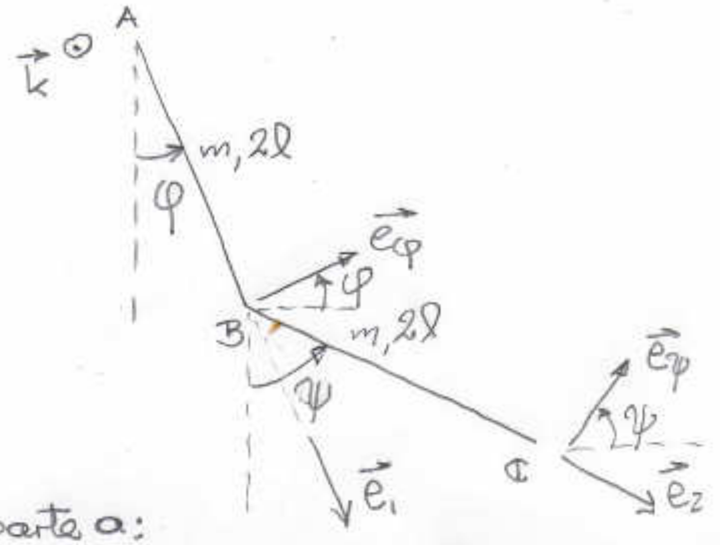
Ejercicio Nº15



φ y ψ se miden respecto a la misma dirección fija

parte a:

Para calcular la energía cinética del sistema formado por las barras hay que aplicar la fórmula de energía cinética de un rígido:

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_P^{\,2} + M \vec{v}_P \cdot \left[\vec{\omega} \wedge (G-P)\right] + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_P \vec{\omega}$$

Esta fórmula vale para un rígido, por lo que valdrá para cada barra por separado. Pero la energía cinética es aditiva: $T = T_{AB} + T_{BC}$

← Energía cinética barra BC

Energía cinética barra AB

Para calcular T_{AB} aplico la fórmula en el punto A de la barra AB que es fijo $\Rightarrow \vec{v}_A = 0$ y $T_{AB} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{AB} \mathbb{I}_A^{AB} \vec{\omega}_{AB}$

Donde $\vec{\omega}_{AB}$ es la velocidad angular de esa barra:

$\vec{\omega}_{AB} = \dot{\varphi} \vec{k} \Rightarrow T_{AB} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \underbrace{\vec{k} \cdot \mathbb{I}_A^{AB} \vec{k}}_{I^{AB}_{A,\vec{k}}}$

(φ se mide respecto a una recta fija)

$I^{AB}_{A,\vec{k}}$ ← momento de inercia barra AB respecto a A.

Para calcular el momento $I^{AB}_{A,\vec{k}}$ aplicamos Steiner

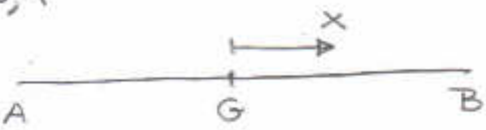
$$I^{AB}_{A,\vec{k}} = I^{AB}_{G,\vec{k}} + m\, d^2_{A\vec{k},G}$$

↳ distancia de recta $A\vec{k}$ al centro de masas G de esa barra

Por simetría el centro de masas de las barras se encuentra en su punto medio: $d_{A\vec{k},G} = l$

Calculamos directamente $I^{AB}_{G,\vec{k}}$

$$I^{AB}_{G,\vec{k}} = \int_{-l}^{l} dx\, \rho\, x^2$$



$$\rho = \frac{M}{L} = \frac{m}{2l} \Rightarrow I^{AB}_{G,\vec{k}} = \frac{m}{2l}\int_{-l}^{l} dx\, x^2 = \frac{m}{2l}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-l}^{l} =$$

↑ largo de la barra

$$= \frac{m}{2l}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{(-l)^3}{3}\right) = \frac{ml^2}{3}$$

$$I^{AB}_{A,\vec{k}} = \frac{ml^2}{3} + ml^2 = \frac{4ml^2}{3}$$

$$T_{AB} = \frac{2ml^2\dot{\varphi}^2}{3}$$

Para la barra BC aplico la fórmula en B (*)

$$T_{BC} = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} + m\vec{v}_B \cdot \left[\vec{\omega}_{BC} \wedge (G-B)\right] + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{BC} \cdot \mathbb{I}^{BC}_B\, \vec{\omega}_{BC}$$

B pertenece a las 2 barras $\Rightarrow \vec{v}_B = 2l\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} = 2ml^2\dot{\varphi}^2$$

(ψ se mide respecto a una dirección fija)

$\vec{\omega}_{BC} = \dot{\psi}\,\vec{k}$ ← Velocidad angular de la barra BC

$$G - B = l\,\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{\omega}_{BC} \wedge (G-B) = \dot{\psi}\,\vec{k} \wedge l\,\vec{e}_2 = l\dot{\psi}\,\vec{e}_\psi$$

$$m\vec{v}_B \cdot \left[\vec{\omega}_{BC} \wedge (G-B)\right] = m2l^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\psi} = 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)$$

$$\cos(\psi-\varphi) = \cos(\varphi-\psi)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}_{BC} \cdot \mathbb{I}^{BC}_B\, \vec{\omega}_{BC} = \frac{\dot{\psi}^2}{2}\underbrace{\vec{k} \cdot \mathbb{I}^{BC}_B\, \vec{k}}$$

$$I^{BC}_{B\vec{k}} = I^{BC}_{G\vec{k}} + ml^2 = \frac{4ml^2}{3}$$

$$T_{BC} = 2ml^2\dot{\varphi}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi) + \frac{2ml^2}{3}\dot{\psi}^2$$

(*) Observar que para esa barra no conviene aplicarlo en A, porque A no es fijo como perteneciente a la barra BC

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{8ml^2\dot{\varphi}^2}{3} + 2ml\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi) + \frac{2ml^2\dot{\psi}^2}{3}}$$

La fórmula de la energía cinética se podría haber aplicado en el centro de masas de cada barra:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\vec{v}_G^{\,2} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\omega}_{AB}\cdot \mathbb{I}_G^{AB}\vec{\omega}_{AB}}_{\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\vec{k}\cdot\mathbb{I}_G^{AB}\vec{k} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} I_{G\vec{k}} = \frac{ml^2}{6}\dot{\varphi}^2}$$

$$\vec{v}_G = l\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}m\vec{v}_G^{\,2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$T_{AB} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}\right)}_{4/3} = \frac{2ml^2\dot{\varphi}^2}{3}$$ Da el mismo resultado de antes

$$T_{BC} = \frac{m\vec{v}_G^{\,2}}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\omega}_{BC}\cdot\mathbb{I}_G^{BC}\vec{\omega}_{BC}}_{\frac{\dot{\psi}^2}{2} I_{G,\vec{k}}^{BC} = \dot{\psi}^2\frac{ml^2}{6}}$$

$$G = B + l\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{G}} = \dot{\vec{B}} + l\dot{\psi}\,\vec{e}_\psi = 2l\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + l\dot{\psi}\,\vec{e}_\psi$$

$\overset{\shortparallel}{\vec{v}_B}$ (el extremo de la barra siempre es un punto que pertenece a la barra)

$$\vec{v}_G^{\,2} = 4l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\psi}^2 + 4l\dot{\varphi}\dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\psi$$

$$T_{BC} = 2ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{ml^2\dot{\psi}^2}{2} + 2ml\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi) + \frac{ml^2\dot{\psi}^2}{6} =$$

$$= 2ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\psi}^2 + 2ml\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)$$

De nuevo da el mismo resultado de antes

parte b: Aplico directamente la fórmula de momento angular:

$$\vec{L}_B^{BC} = m(G-B)\wedge\vec{v}_B + \underbrace{\mathbb{I}_B^{BC}\vec{\omega}_{BC}}_{\dot{\psi}\,\mathbb{I}_B^{BC}\vec{k} = \dot{\psi}\, I_{B,\vec{k}}\vec{k} = \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi}\vec{k}}$$

$\vec{k}$ es eje principal x ser $\perp$ al plano de la barra.

$$m(G-B)\wedge\vec{v}_B = m\,l\vec{e}_2\wedge 2l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = 2ml^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_2\wedge\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_2 = \cos(\psi-\varphi)\vec{e}_1 + \operatorname{sen}(\psi-\varphi)\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{e}_2\wedge\vec{e}_\varphi = \cos(\psi-\varphi)\underbrace{\vec{e}_1\wedge\vec{e}_\varphi}_{\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{L}_B^{BC} = \left[2ml^2\dot{\varphi}\cos(\psi-\varphi) + \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi}\right]\vec{k}}$$

parte c: $\vec{L}_A = \vec{L}_A^{AB} + \vec{L}_A^{BC}$ Como la energía cinética, el momento angular es aditivo.

Para la barra AB, A es fijo $\Rightarrow \vec{L}_A^{AB} = \mathbb{I}_A^{AB}\vec{\omega}_{AB} = \frac{4ml^2}{3}\dot{\varphi}\vec{k}$

Para la barra BC aplico la fórmula de cambio de momentos: $\vec{L}_A^{BC} = \vec{L}_B^{BC} + \underbrace{\vec{P}}_{m\vec{v}_G}\wedge\underbrace{(A-B)}_{-2l\vec{e}_1}$

$$\vec{P}\wedge(A-B) = m(2l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + l\dot{\psi}\vec{e}_\psi)\wedge(-2l\vec{e}_1) = -m2l^2(2\dot{\varphi}\underbrace{\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_1}_{-\vec{k}} + \dot{\psi}\vec{e}_\psi\wedge\vec{e}_1)$$

$$\vec{e}_\psi = -\operatorname{sen}(\psi-\varphi)\vec{e}_1 + \cos(\psi-\varphi)\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{e}_\psi\wedge\vec{e}_1 = \cos(\psi-\varphi)\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_1$$

$$\vec{L}_A^{BC} = \vec{k}\left[2ml^2\dot{\varphi}\cos(\psi-\varphi) + \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi} + 4ml^2\dot{\varphi} + 2ml^2\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)\right]$$

$$\vec{L}_A^{BC} = \left[4ml^2\dot{\varphi} + \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi} + 2ml^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi})\cos(\psi-\varphi)\right]\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{L}_A = \left[\frac{16}{3}ml^2\dot{\varphi} + \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi} + 2ml^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi})\cos(\psi-\varphi)\right]\vec{k}}$$

Si aplicamos directamente la fórmula para calcular $\vec{L}_A^{BC}$

$$\vec{L}_A^{BC} = m(G-A)\wedge \vec{v}_A^{BC} + \mathbb{I}_A^{BC}\,\vec{\omega}_{BC}$$

↳ Esta velocidad no es cero, sino que se halla con la distribución de velocidades del rígido:

$$\vec{v}_A^{BC} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC}\wedge(A-B) = 2l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \underbrace{\dot{\psi}\vec{k}\wedge(-2l\vec{e}_1)}_{-2l\dot{\psi}\vec{e}_\varphi} =$$

$$= 2l(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\vec{e}_\varphi$$

Obs: Si $\dot{\varphi}=\dot{\psi}$ $\vec{v}_A^{BC}=0$

porque ambas barras se mueven como una sola.

$$m(G-A)\wedge\vec{v}_A^{BC} = m(G-B+B-A)\wedge\vec{v}_A^{BC} = m(l\vec{e}_2+2l\vec{e}_1)\wedge\vec{v}_A^{BC} =$$

$$= 2ml^2(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\cos(\psi-\varphi)\vec{k} + 4ml^2(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\vec{k}$$

$$\mathbb{I}_A^{BC}\vec{\omega}_{BC} = \dot{\psi}\,\mathbb{I}_A^{BC}\vec{k} = \dot{\psi}\,I_{A,\vec{k}}^{BC}\vec{k}$$

$$I_{A,\vec{k}}^{BC} = I_{G,\vec{k}}^{BC} + m\,d^2_{G,A\vec{k}}, \qquad I_{G,\vec{k}}^{BC} = \frac{ml^2}{3}$$

$$d^2_{G,A\vec{k}} = (G-A)^2 = (G-B+B-A)^2 = (l\vec{e}_2+2l\vec{e}_1)^2 =$$

$$= l^2+4l^2+4l^2\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1}_{\cos(\psi-\varphi)} = 5l^2+4l^2\cos(\psi-\varphi)$$

$$\vec{L}_A^{(BC)} = \vec{k}\Big[2ml^2(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\cos(\psi-\varphi) + 4ml^2(\dot{\varphi}-\dot{\psi}) + \frac{ml^2}{3}\dot{\psi} + 5ml^2\dot{\psi} + 4ml^2\cos(\psi-\varphi)\dot{\psi}\Big] =$$

$$= \Big[2ml^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi})\cos(\psi-\varphi) + 4ml^2\dot{\varphi} + \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi}\Big]\vec{k}$$

De nuevo da lo mismo de antes