INSTITUTO DE FÍSICA
MECÁNICA NEWTONIANA
Curso 2020

Práctico V – Sistemas de Partículas y Sistemas Rígidos

Parte A: Sistemas de Partículas

Ejercicio N° 1

Halle geométricamente (es decir, aplicando propiedades de simetría) o analíticamente el centro de masa de las siguientes figuras *homogéneas* (densidad de masa constante):

a) Paralelogramo, paralelepípedo, triángulo.

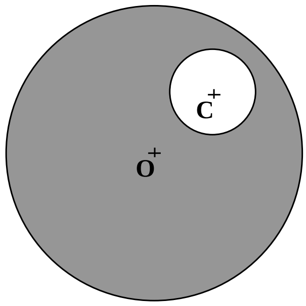
b) Sector de círculo de ángulo al centro 2α.

c) Arco de circunferencia de ángulo al centro 2α.

d) Cono de revolución de radio *r* y altura *h*.

Ejercicio N° 2

Halle el centro de masa de un disco homogéneo de radio *a* que tiene un agujero circular de radio *b*. Este agujero está centrado en un punto C que dista *d* del centro O del disco. Suponga se verifica que $0 < d < a - b$.



Ejercicio N° 3

Considere dos partículas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2, siendo sus posiciones en un sistema de referencia inercial $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente. Las únicas fuerzas que actúan en este sistema son las fuerzas de interacción internas ($\vec{F}_{12}$ actuando sobre P_1 y $\vec{F}_{21}$ actuando sobre P_2), que verifican el principio de acción y reacción ($\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$); no hay fuerzas externas.

a) Verifique que el referencial que se traslada con la velocidad del centro de masas G es inercial. A este referencial se le denomina referencial del centro de masas.

b) Demuestre que las ecuaciones de movimiento de ambas masas en el referencial del centro de masas, son equivalentes a las de una única partícula de *masa reducida* μ, dada por la ecuación $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, descrita por la posición relativa entre las partículas $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y sobre la que actúa la fuerza $\vec{F}_{12}$.

c) Demuestre que tanto el momento angular respecto a un punto fijo O del referencial inercial de partida como la energía cinética del sistema de dos partículas, ambos medidos en este referencial, son equivalentes a los de un sistema formado por una partícula de masa total $M = m_1 + m_2$ ubicada en el centro de masa, y por una partícula de masa reducida μ ubicada en $\Delta\vec{r}$.

Ejercicio Nº 4

Considere un sistema de partículas, al que llamaremos sistema *expansivo*, que obedece la siguiente distribución de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\left(\vec{r}_P - \vec{r}_O\right) + \alpha\left(\vec{r}_P - \vec{r}_O\right)$$

donde P es un punto cualquiera de dicho sistema, O un punto particular del mismo; $\vec{v}_P$, $\vec{v}_O$ las velocidades respectivas de esos puntos respecto a un sistema S inercial; y el vector $\vec{\omega}$ y el escalar α son parámetros del movimiento.

Observe primeramente que se trata de una distribución de velocidades similar a la de un sistema rígido, con un término de translación $\left(\vec{v}_O\right)$ y uno de rotación $\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_P - \vec{r}_O\right)\right)$, pero que además tiene un término *expansivo* $\left(\alpha\left(\vec{r}_P - \vec{r}_O\right)\right)$ que agrega una componente de la velocidad orientada según el radio vector $\left(\vec{r}_P - \vec{r}_O\right)$.

a) Demuestre que dicha distribución de velocidades es independiente del punto O, es decir, vale cualesquiera sean los puntos P y O del sistema.

   SUGERENCIA: Demuestre que si se plantea la velocidad para otro punto Q, haciendo la diferencia entre una y otra se recupera la misma expresión pero entre la pareja P y Q, en lugar de P y O.

b) Derivando la expresión $d_{PQ}{}^2 = \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right)^2$ muestre que la distancia $d_{\mathrm{PQ}} = \left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|$ entre dos puntos cualesquiera P y Q *no* se conserva, por lo que se tratará de un sistema *no* rígido en expansión o compresión, según sea el signo de α.

c) Verifique que el momento angular respecto a un punto Q, de un sistema de N partículas, con $i = 1, \ldots N$, que obedecen la distribución de velocidades anterior, puede escribirse igual que el de un sistema rígido:

$$\vec{L}_Q = M\left(\vec{r}_G - \vec{r}_Q\right)\times\vec{v}_Q + \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{r}_i - \vec{r}_Q\right)\times\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_i - \vec{r}_Q\right)\right)$$

d) Halle una expresión para la energía cinética de este sistema de partículas.

e) Escriba las expresiones de las partes (c) y (d), utilizando en lugar del punto Q genérico, el centro de masa G.

f) Demuestre que si el sistema de partículas está sometido a un sistema de fuerzas $\vec{F}_i^{(\text{total})} = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}$, donde $\vec{F}_i^{(\text{total})}$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula *i*, con $\vec{F}_i$ la fuerza externa sobre ella y $\vec{F}_{ij}$ la fuerza hecha sobre la i-ésima partícula por la j-ésima, la potencia de las fuerzas internas se reduce a:

$$P^{(\mathrm{int})} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}\cdot\vec{v}_i = \alpha\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\vec{F}_{ij}\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)$$

y que la potencia de fuerzas externas es:

$$P^{(\mathrm{ext})} = \vec{R}^{(\mathrm{ext})}\cdot\vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{(\mathrm{ext})}\cdot\vec{\omega} + \alpha\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_Q\right)$$

SUGERENCIA: Para la demostración utilice el principio de acción y reacción fuerte ($\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ y $\vec{F}_{ij}\times\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=0$) y agrupe términos de interacción entre dos partículas (*i,j* y *j,i*).

Ejercicio N° 5

Considere un sistema de masa total M bajo la acción de una resultante de fuerzas externas $\vec{R}^{(\mathrm{ext})}$ y un resultante de momentos externos $\vec{M}_{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{ext})}$.

a) Demuestre que los conjuntos de ecuaciones dados por una *primera cardinal* (variación de la cantidad de movimiento) y una segunda *cardinal* (variación del momento angular) aplicada en un punto Q, son equivalentes independientemente de cuál sea el punto Q, si se usan las fórmulas de cambio de momento. Es decir que, para cualquier punto R, vale:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{P}} = M\vec{a}_G = \vec{R}^{(\mathrm{ext})}\\ \dot{\vec{L}}_{\mathrm{Q}} = \vec{P}\times\dot{\mathrm{Q}} + \vec{M}_{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{ext})}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{P}} = M\vec{a}_G = \vec{R}^{(\mathrm{ext})}\\ \dot{\vec{L}}_{\mathrm{Q}} = \vec{P}\times\dot{\mathrm{R}} + \vec{M}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})}\end{array}\right.$$

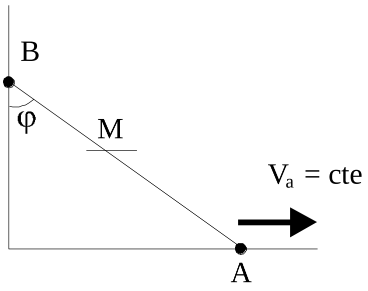
gracias a que, por la fórmula de cambio de momentos, se cumple:

$$\begin{array}{l}\vec{L}_{\mathrm{Q}} = \vec{L}_{\mathrm{R}} + \vec{P}\times(\mathrm{Q}-\mathrm{R})\\ \vec{M}_{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{ext})} = \vec{M}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} + \vec{R}^{(\mathrm{ext})}\times\left(\mathrm{Q}-\mathrm{R}\right)\end{array}$$

b) Demuestre, análogamente, que el conjunto de ecuaciones dado por una *primera cardinal* (variación de la cantidad de movimiento) y una segunda *cardinal* (variación del momento angular) en un punto Q, es equivalente al que nos dan tres ecuaciones cardinales (de variación de momentos angulares) aplicadas en tres puntos no alineados cualesquiera, por ejemplo, Q, R, S:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{P}} = M\vec{a}_G = \vec{R}^{(\mathrm{ext})}\\ \dot{\vec{L}}_{\mathrm{Q}} = \vec{P}\times\dot{\mathrm{Q}} + \vec{M}_{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{ext})}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{L}}_{\mathrm{Q}} = \vec{P}\times\dot{\mathrm{Q}} + \vec{M}_{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{ext})}\\ \dot{\vec{L}}_{\mathrm{R}} = \vec{P}\times\dot{\mathrm{R}} + \vec{M}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})}\\ \dot{\vec{L}}_{\mathrm{S}} = \vec{P}\times\dot{\mathrm{S}} + \vec{M}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{ext})}\end{array}\right.$$

Parte B: Cinemática del Rígido



Ejercicio Nº 6

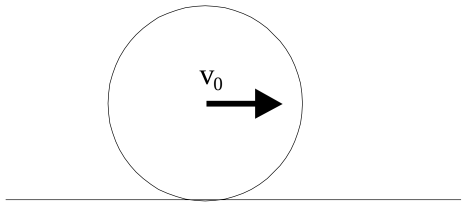
La barra AB, de longitud l, se mueve de forma que su extremo A recorre el eje Ox con velocidad v_A constante, mientras que su otro extremo B se mueve sobre el eje Oy, hasta que este último llega al origen. En el instante inicial ($t = 0$) el punto A coincide con el origen de coordenadas.

a) Halle la velocidad del punto B para todo tiempo.

b) Halle la velocidad angular de la barra, $\vec{\omega}(t)$.

c) Sea M un punto genérico de la barra que dista $d < l$ del extremo A. Halle su velocidad $\vec{v}_M$, su aceleración $\vec{a}_M$ y su trayectoria.

Ejercicio Nº 7



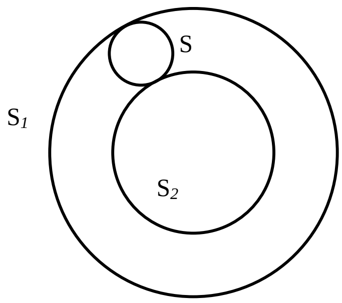
El disco de la figura, de radio a, rueda sin deslizarse sobre una guía rectilínea y su centro tiene velocidad v_0. Halle:

a) La ley horaria de un punto de la periferia de la rueda.

b) La distribución de velocidades y aceleraciones de los puntos de la periferia.

Utilice estos resultados para hallar la velocidad y aceleración del punto más alto.

Ejercicio Nº 8



En un plano, dos aros concéntricos circulares S_1 y S_2, de radios R_1 y R_2, con $R_1 > R_2$, giran alrededor de su centro O con velocidades angulares ω_1 y ω_2, respectivamente. Un disco S de radio $a = \frac{R_1 - R_2}{2}$, se mueve sin deslizar entre S_1 y S_2.

a) Halle la velocidad angular de S.

b) Halle la velocidad del centro de S.

c) Discuta los diferentes casos posibles para el movimiento de S de acuerdo a las relaciones entre los parámetros del sistema.

Ejercicio Nº 9

Considere un cuerpo rígido arbitrario.

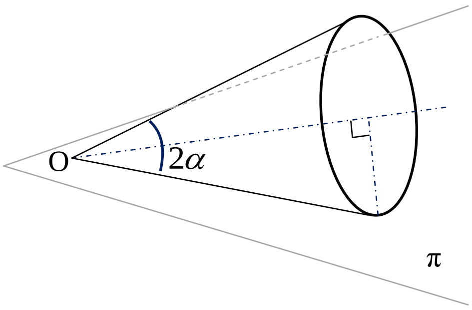
a) Suponiendo que el rígido se mueve de forma que un punto O del mismo está fijo, calcule la velocidad de un punto P tal que P – O es colineal con la velocidad angular $\vec{\omega}$ del rígido.

b) Suponiendo que el rígido se mueve de forma que dos de sus puntos A y B tienen velocidad nula, demuestre que B – A y la velocidad angular $\vec{\omega}$ del rígido son colineales.

c) Suponiendo que el rígido se mueve de forma que tres puntos no alineados A, B y C tienen velocidad nula, demuestre que la velocidad angular $\vec{\omega}$ del rígido es nula.

Ejercicio Nº 10

Un cono circular recto, de vértice O y ángulo al vértice 2α, rueda sin deslizarse sobre un plano π. La recta de contacto entre el cono y el plano se comporta como un eje instantáneo de rotación, porque, debido a la rodadura, los puntos del cono que están en esa posición tienen velocidad instantánea nula.



Determine la velocidad angular del cono en términos de la velocidad angular de la recta de contacto con el plano.

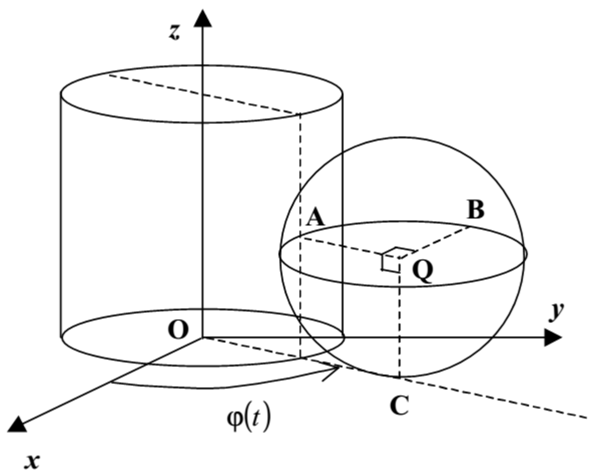
SUGERENCIA: Este problema puede hacerse, al menos, de dos formas:

1) Hallando la velocidad del centro de la base del cono y aplicando la distribución de velocidades entre tres puntos no alineados.

2) Descomponiendo el movimiento del cono en rotaciones simples y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares para hallar una expresión de la velocidad angular. Posteriormente se aplica la condición de rodadura sin deslizamiento para llegar al resultado final.

Ejercicio Nº 11

Un cilindro circular de radio *R* está fijo con su eje orientado verticalmente. Una esfera, también de radio *R*, se mueve de modo que rueda sin deslizar simultáneamente sobre un plano horizontal y sobre la superficie del cilindro. Se le llama Q a su centro, A al punto de contacto entre esfera y cilindro, C al punto de contacto entre la esfera y el plano y B a un punto que se ubica en el extremo del radio vector



perpendicular a QA y QC, como muestra la figura. En coordenadas cilíndricas con eje en el eje del cilindro y origen en la intersección de éste con el plano horizontal,

$$\mathrm{C} = \mathrm{O} + 2R\hat{e}_\rho \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C} + R\hat{k} \qquad \mathrm{A} = \mathrm{Q} - R\hat{e}_\rho \qquad \mathrm{B} = \mathrm{Q} + R\hat{e}_\phi$$

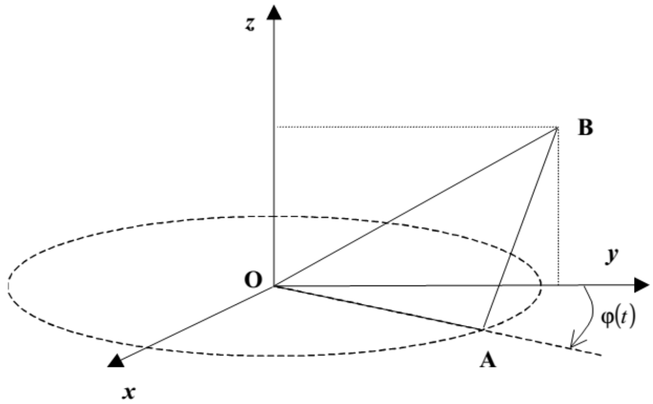
a) Halle el vector $\vec{\omega}$, velocidad angular de la esfera, en función del ángulo φ.

b) Determine la ecuación diferencial que debe verificar el ángulo $\varphi(t)$ para que el punto B tenga su velocidad y aceleración perpendiculares en todo instante.

c) Exprese la aceleración del punto B en función de la velocidad inicial del centro de la esfera y del tiempo.

Ejercicio Nº 12

Una placa triangular OAB es isósceles (OA = AB = a) y recta en A. Esta placa se mueve de forma tal que O es fijo, OA pertenece al plano Oxy, A describe un movimiento circular uniforme en torno a O, y B pertenece al plano Oyz.



a) Halle la velocidad de B en función del módulo de la velocidad del punto A, v_A.

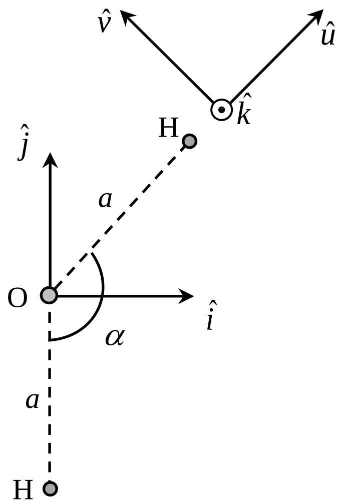
b) Halle la velocidad angular de la placa.

c) Si en el instante inicial la placa se encuentra contenida en el plano vertical, ¿durante qué intervalo de tiempo podrá mantenerse este estado de movimiento?

<u>Parte C: Cinética del Rígido</u>

Ejercicio Nº 13

Considere una molécula de agua, formada por un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno. Suponga que el átomo de oxígeno se encuentra ubicado en el origen de coordenadas O, y que los átomos de hidrógeno están a una distancia a de él, ubicados en rectas que pasan por el origen y forman un ángulo α entre sí. Uno de los átomos de hidrógeno estará ubicado sobre el eje O $\vec{j}$.



Para una molécula real α = 104,5^0 y a = 0,96 Å, pero para simplificar el cálculo asuma α = 120^0 y a = 1 Å. El átomo de oxígeno es 16 veces más masivo que el de hidrógeno y éste tiene una masa de 1,67 × 10^{-27} kg.

a) Halle la posición del centro de masa G.

b) Halle las componentes del tensor de inercia de la molécula de agua en los casos que se indican:

1. Respecto al origen en la base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.
2. Respecto al origen en la base $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{k})$.
3. Respecto al origen en una base que contenga al versor colineal a la recta OG y el versor perpendicular al plano de la molécula.
4. Respecto al baricentro en esta última base.

Ejercicio Nº 14

Halle el tensor de inercia con respecto al centro de masa *G* de los siguientes sistemas rígidos homogéneos:

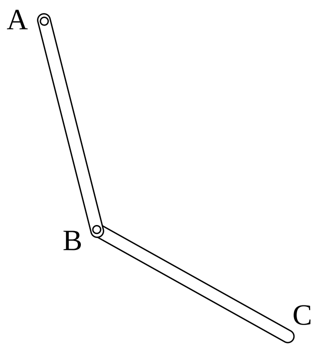
a) Disco de radio *R*.

b) Placa rectangular de lados *a* y *b*.

c) Esfera de radio *R*.

d) Superficie esférica de radio *R*.

Ejercicio Nº 15



Se consideran las dos barras iguales AB y BC de la figura. Las barras tienen masa *m* y longitud $2l$ y están articuladas en A y B, con A fijo, siendo ambas articulaciones *cilíndricas* y *lisas*, de forma que las barras se mueven manteniéndose siempre contenidas en el mismo plano.

a) Calcule la energía cinética total *T* del sistema formado por las dos barras.

b) Calcule el momento angular respecto del punto B de la barra BC.

c) Calcule el momento angular respecto al punto A del sistema total.

<u>Parte D: Resultado de algunos ejercicios seleccionados</u>

<u>*Ejercicio Nº 1*</u>: b) $r = \dfrac{2R\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$ c) $r = \dfrac{R\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

<u>*Ejercicio Nº 2*</u>: A $\dfrac{b^2 d}{a^2 - b^2}$ de O según CO.

<u>*Ejercicio Nº 6*</u>: $\vec{\omega}(t) = \dfrac{\mathrm{v_A}}{\sqrt{l^2 - \mathrm{v_A^2} t^2}}\hat{k}$, $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{M}(t) = \left(1 - \dfrac{d}{l}\right)\mathrm{v_A}\hat{i} - \dfrac{d}{l}\dfrac{\mathrm{v_A^2} t}{\sqrt{l^2 - \mathrm{v_A^2} t^2}}\hat{j}$,

$\hat{a}_M(t) = -\frac{\mathrm{v}_A^2 dl}{\left(l^2 - \mathrm{v}_A^2 t^2\right)^{3/2}}\,\hat{j}$. Trayectoria: $\frac{x_M^2}{(l-d)^2} + \frac{y_M^2}{d^2} = 1$ (elipse).

Ejercicio N^o 7: a) $x_P(t) = vt + R\,\mathrm{sen}(vt/R)$, $y_P(t) = R[1+\cos(vt/R)]$ (cicloide).

b) $\vec{v}_P = v(1+\cos\phi)\hat{i} - v\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{j}$, $\vec{a}_P = -\frac{v^2}{R}\mathrm{sen}\,\phi\hat{i} - \frac{v^2}{R}\cos\phi\,\hat{j}$.

Punto más alto: $\vec{v}_P = 2v\hat{i}$ y $\vec{a}_P = -\frac{v^2}{R}\hat{j}$.

Ejercicio N^o 8: $\omega = \frac{R_1\omega_1 - R_2\omega_2}{R_1 - R_2}$ es la velocidad angular de S y $\dot{\varphi} = \frac{R_1\omega_1 + R_2\omega_2}{R_1 + R_2}$ siendo φ la coordenada angular del centro de S.

Ejercicio N^o 10: $\vec{\omega} = -(\dot{\phi}\cot g\alpha)\hat{u}$ con $\dot{\varphi}$ la velocidad angular de la recta de contacto en torno de O y $\hat{u}$ en la dirección de la misma.

Ejercicio N^o 11: b) $\varphi = -\ln|1-\dot{\varphi}_0 t|$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0)$ c) $\vec{a}_B = -\frac{2R\mathrm{v}_0^2}{(2R-\mathrm{v}_0 t)^2}\left(2\hat{e}_r + 3\hat{e}_\phi + \hat{K}\right)$

Ejercicio N^o 12: a) $\vec{\mathrm{v}}_B = \frac{\mathrm{tg}\,\phi}{\sqrt{2\cos^2\phi - 1}}\sqrt{2}a\dot{\phi}\hat{e}_\theta$ b) $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{I} - \dot{\phi}tg\theta\hat{J} - \dot{\phi}\hat{K}$

Ejercicio N^o 15: a) $T = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\psi}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi)$ donde φ es el ángulo que forma la barra AB con una recta fija y ψ es el ángulo que forma la barra BC con la misma recta.

b) $\vec{L}_B = 2ml^2\left(\dot{\phi}\cos(\phi-\psi) + \frac{2}{3}\dot{\psi}\right)\hat{k}$

c) $\vec{L}_A = \left[\frac{16ml^2}{3}\dot{\phi} + \frac{4ml^2}{3}\dot{\psi} + 2ml^2\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\right)\cos\left(\phi-\psi\right)\right]\hat{k}$