Ejercicio IV.6

$$\vec{F} = -\frac{K\vec{r}}{r^4} = -\frac{K}{r^3}\hat{e_r} \quad (I^{\circ})$$

$t=0$:


a) Se trata de una fuerza central e isotrópica, por lo que es conservativa (ver Apuntes 2020, 4.2) y proviene entonces de un potencial $U(r)$:

$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{e_r}$$

como: $\vec{F} = -\frac{K}{r^3}\hat{e_r}$

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{K}{r^3} : \boxed{U(r) = -\frac{K}{2r^2}} \quad (I)$$

(tomando como referencia $U(r \to \infty) = 0$)

b) Dado que la fuerza que actúa sobre la partícula es central y conservativa, sabemos que se conserva $\vec{L_O}$ y $E$. La conservación de $\vec{L_O}$ implica por un lado movimiento plano (argumente cómo se da esto!) y por otro conservación del módulo ($\ell$) de $\vec{L_O}$:

$$\boxed{\ell = mr^2\dot{\theta}} \quad (II)$$

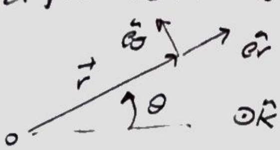
La energía mecánica de la partícula, por otro lado, se puede escribir como:

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(r) \quad (III^{\circ})$$

y sabemos que es constante.

La velocidad en coordenadas polares en el plano de movimiento de la partícula es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta},$$




por lo que:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r)} \quad (III)$$

Despejando $\dot{\theta}$ de (II) y sustituyendo en III nos queda:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{eff}(r)}} \quad (IV)$$

$U_{eff}(r)$ : es el potencial efectivo para el movimiento radial de la partícula

Veamos ahora las condiciones iniciales, que nos permiten hallar $\ell$ y $E$!

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad : \quad \vec{L}_o(t=0) = (a\,\hat{e}_r) \times (m v_0 \hat{e}_\theta) = \underbrace{m a v_0}_{\ell} \hat{k}$$

De acuerdo a (III°): $E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + U(r) \overset{(I)}{=} \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{K}{2r^2}$ :

$$\boxed{E = E(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{K}{2a^2} = \frac{m(a v_0)^2 - K}{2a^2}}$$

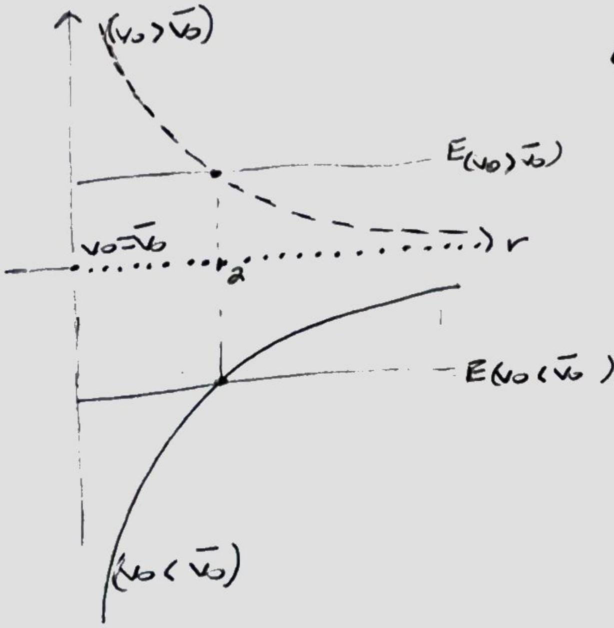
Sustituyendo entonces (I), $\ell$ y $E$ en (IV):

$$\underbrace{\frac{m(a v_0)^2 - K}{2a^2}}_{E} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{(m a v_0)^2}{2 m r^2} - \frac{K}{2r^2}}_{\boxed{U_{eff}(r) = \frac{m(a v_0)^2 - K}{2r^2}}}$$

$$\frac{(m a v_0)^2}{2 m r^2} = \frac{m(a v_0)^2}{2r^2}$$

**E** Consideremos ahora diferentes casos de acuerdo a $v_0$; sea $\bar{v}_0 \,/\, E = 0$:

$$\boxed{m(a\bar{v}_0)^2 - K = 0} \quad \text{(que anula también a } U_{eff}(r)\text{)}$$




← El potencial eficaz $U_{eff}(r)$ sigue un tipo de curva según sea $v_0$, la energía también se modifica de acuerdo a $v_0$.

$v_0 > \bar{v}_0$: $U_{eff}$ : - - - , $E_{v_0 > \bar{v}_0} > 0$

$v_0 = \bar{v}_0$: $U_{eff}$ : ..... (idénticamente nulo), $E_{v_0 = \bar{v}_0} = 0$

$v_0 < \bar{v}_0$: $U_{eff}$ : —— , $E_{v_0 < \bar{v}_0} < 0$

(¿Cómo sería el análisis para una fuerza como (I°) pero repulsiva?)

para determinar el rango de posibles valores de $r$, partiremos de la conservación de la energía (IV) : #3

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \leftrightarrow E - U_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 :$$

los valores de $r$ accesibles son aquellos para los cuales $E \geq U_{eff}(r)$ ;

$\dot{r} = 0$ marca el extremo del posible movimiento de la partícula en su coordenada $r$

(¿qué dirección tiene su velocidad absoluta en ese valor extremo de $r$?)

De acuerdo a las condiciones iniciales $\vec{v}(0) = v_0 \hat{e}_\theta$ : $\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow$

$r = a$ es un valor extremo (mínimo o máximo) del movimiento en $r$

Por todo lo anterior podemos decir que:

$$\begin{cases} v_0 > \bar{v}_0 : & r \geq a \\ v_0 = \bar{v}_0 : & r = a \\ v_0 < \bar{v}_0 : & 0 \leq r \leq a \text{ (ver d))} \end{cases}$$

¿por qué?

(tengo un movimiento circular uniforme, ya que en el instante inicial $\dot{r} = 0$ para $r = a$ y como $E = U_{eff} = 0 \ \forall r$, estoy parado en un valor de equilibrio ($\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$ *) de la coordenada $r$ con $\dot{r}$ nulo [vamos a ver esto también por Newton en c)])

c) Una forma simple de encontrar las condiciones para un movimiento circular es estudiar la 2da ley de Newton según la dirección radial:

$$F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \xrightarrow[(I^\circ, II)]{} -\frac{K}{r^3} = m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3} ;$$

Para un movimiento circular $r = cte.\ \forall t$ : $\dot{r} = 0 \ \forall t$ : $\ddot{r} = 0 \ \forall t$

$$\Rightarrow +\frac{K}{r^3} = +\frac{\ell^2}{mr^3} ;$$

sustituyendo las condiciones iniciales : $r(0) = a$, usando que $\ell = m a v_0$, nos queda:

---

(¿puede pasar en algún caso análogo con $U_{gravitatorio}$?)

* Como $U_{eff}(r)$ es constante

$\Rightarrow \frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \ \forall r$ : tengo un continuo de posiciones de equilibrio marginal o neutral: son inestables en cuanto a que una condición inicial con $\dot{r} \neq 0$ no permite permanecer cerca del equilibrio, pero con $\dot{r} = 0$ puedo permanecer tan cerca como quiera de él (los vecinos son de eq.)

$K = m(a v_0)^2$ : $\boxed{v_0 = \bar{v}_0}$ definido en b), que confirma el caso analizado en términos de $U_{eff}(r)$

Obs: para un caso general de una fuerza conservativa, Newton radial corresponde a:

$$F = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \quad : \quad -\frac{dU}{dr} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \quad \underset{(II)}{:} \quad -\frac{dU}{dr} = m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$\leftrightarrow \quad m\ddot{r} + \underbrace{\frac{dU}{dr} - \frac{\ell^2}{mr^3}}_{\frac{dU_{eff}}{dr}} = 0$$

: preintegrando adecuadamente llego a $\underline{IV}$

(vea cómo surge $\ell = mr^2\dot{\theta}$ preintegrando Newton tangencial)

Aquí vemos que las órbitas circulares, que deben verificar $\ddot{r} = 0$ (y arrancar con $\dot{r} = 0$) se corresponden con los extremos del potencial eficaz

d) El análisis hecho hasta ahora sólo me permite sacar algunas características generales (si es acotada o no por ejemplo) de la órbita de la partícula; vamos a hallarla explícitamente a partir de la ecuación de Binet para la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{\ell^2}{m^2} u^2 (u + u'') \quad , \text{ donde } \quad a_r = \frac{F(u)}{m} \quad ; \quad u(\theta) = \frac{1}{r} \quad ;$$

$$u''(\theta) = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$F(r) = -\frac{K}{r^3} \quad : \quad F(u) = -Ku^3$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{Ku^{\cancel{3}}}{\cancel{m}} = -\frac{\ell^2}{m^{\cancel{2}}} \cancel{u^2} (u + u'') = -m(a v_0)^2 (u + u'')$$

$$\Rightarrow \quad u'' + \underbrace{\left[1 - \underbrace{\frac{K}{m(a v_0)^2}}_{> 1 \text{ porque } v_0 < \bar{v}_0}\right]}_{< 0} u = 0$$

(← Cómo seguiría el análisis para $\vec{F}$ repulsiva en lugar de atractiva?)

$< 0$ : defino $-\alpha^2 = 1 - \frac{K}{m(a v_0)^2}$ ($\alpha$ real)

La ecuación diferencial para $u(\theta)$ queda entonces:

$$\boxed{u'' - \alpha^2 u = 0}$$

con las condiciones iniciales $u(0) = \frac{1}{r(0)} = \frac{1}{a}$

$u'(0) = 0 \quad (\dot{r}(0) = 0)$

Para ver la última condición, recordar que $u = \frac{1}{r} \leftrightarrow r = \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{\ell/m}\underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{u'} = -\frac{\ell}{m}u'}$$

(ver Apunte 2010, 4.3)

$\Rightarrow$ si $\dot{r}=0$ : $u'=0$

Volviendo a la ecuación para $u(\theta)$, buscamos una solución de la forma $u = Ae^{\lambda\theta}$

$$\Rightarrow (\lambda^2-\alpha^2)\underbrace{Ae^{\lambda\theta}}_{\neq 0} = 0 : \lambda^2-\alpha^2=0 : \lambda = \pm\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{u(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}}$$

ahora sacamos $A$ y $B$ de las condiciones iniciales para la trayectoria:

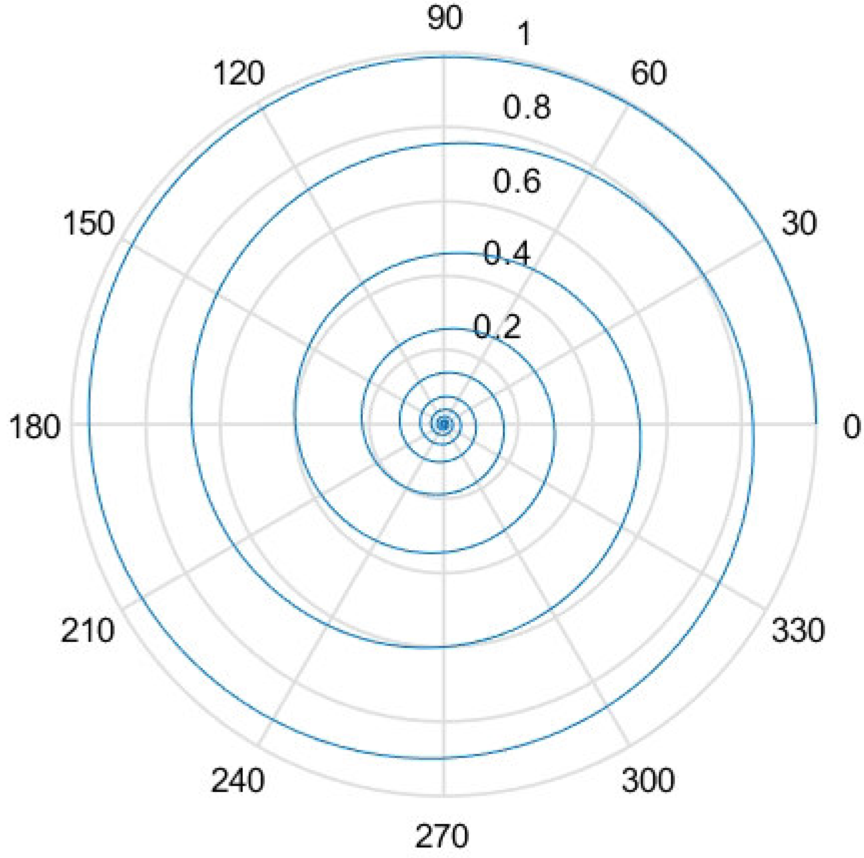
$$\left.\begin{array}{l} u(0) = A+B = a^{-1} \\ u'(0) = \alpha(A-B) = 0 \end{array}\right| \quad A=B=\frac{1}{2}a^{-1}$$

$$\Rightarrow u(\theta) = a^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(e^{\alpha\theta}+e^{-\alpha\theta}\right)}_{ch(\alpha\theta)} = a^{-1}ch(\alpha\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = u^{-1}(\theta) = \frac{a}{ch(\alpha\theta)}} \xrightarrow[\theta\to\infty]{} 0$$

: la trayectoria colapsa al origen luego de infinitas vueltas alrededor del mismo

$\frac{r}{a}$ luego de 10 vueltas al origen $(\alpha = 0.1)$ :


90
1
120
60
0.8
0.6
150
30
0.4
0.2
180
0
210
330
240
300
270