INSTITUTO DE FÍSICA
MECÁNICA NEWTONIANA

(Editado por última vez: marzo 2024)

Práctico IV – Movimiento Central

Parte A: Problemas generales de movimiento central

Ejercicio Nº 1

Una partícula P de masa m se mueve sin rozamiento sobre una mesa horizontal, unida a un hilo flexible, inextensible y sin masa que pasa por un orificio situado en la mesa. Inicialmente la partícula está describiendo un movimiento circular uniforme de radio a con velocidad v_a. Una persona tira *lentamente* del hilo (se puede considerar que en todo instante la velocidad radial es nula) hasta que la partícula describe una circunferencia de radio b.

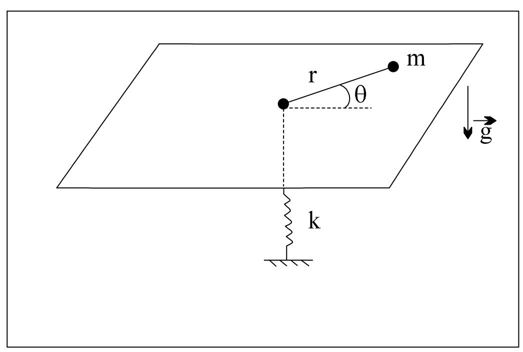
a) Calcular la velocidad v_b de la partícula cuando ésta describe la circunferencia de radio b, y compararla con v_a.

b) Calcular las tensiones en el hilo en los movimientos inicial y final.

c) Calcular el trabajo realizado por la persona.

Ejercicio Nº 2

La partícula de masa m de la figura se mueve sobre una mesa lisa horizontal. La cuerda (flexible, inextensible y sin masa) unida a la partícula pasa a través de un orificio en la mesa y está atada a un resorte de constante k. La longitud natural del resorte es tal que la fuerza del mismo es nula cuando r (distancia del orificio a la partícula) es igual a cero. En el instante inicial, $r = R$, la velocidad radial de la partícula es nula y su velocidad angular ω.



a) Escribir las ecuaciones de movimiento de la partícula y hallar $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ en función de los datos iniciales del problema.

b) Determinar la expresión de $\dot{r}^2$ (velocidad radial al cuadrado) en función de r^2 y los otros datos del problema.

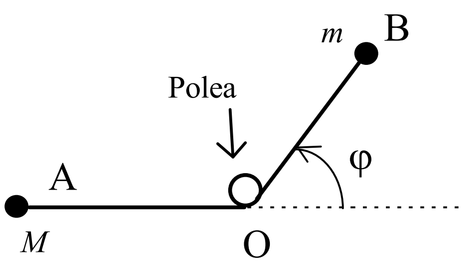
c) ¿Para qué valor de ω la trayectoria es circular? Sea ω_0 ese valor.

d) Si $0 < \omega < \omega_0$, ¿llegará la partícula al orificio por donde pasa el hilo? Justifique su respuesta. En el caso en que su respuesta sea negativa, ¿cuál es el valor mínimo de r de la trayectoria?

e) Si $\omega > \omega_0$, calcule el valor de r máximo de esta nueva trayectoria.

Ejercicio Nº 3

La figura muestra un plano liso horizontal y dos partículas A y B de masa *M* y *m*, respectivamente, unidas por un hilo flexible, inextensible y sin masa, que puede deslizar sin frotamiento sobre la polea del esquema. El punto A se encuentra inicialmente en reposo y el estado inicial de movimiento de B es tal que $\varphi = 0$, la distancia OB es igual a a y tiene velocidad v_0 perpendicular a OB.



a) Hallar las ecuaciones de movimiento y la tensión en el hilo.

b) Suponiendo la longitud del hilo suficientemente grande, determinar la condición que se debe verificar para que en algún instante se llegue a $\varphi = \pi$.

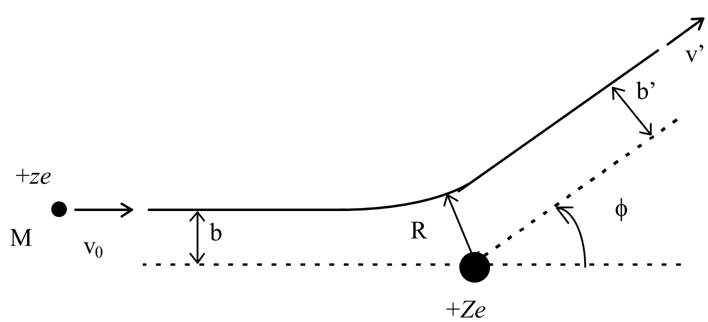
SUGERENCIA: Usar las fórmulas de Binet.

c) Indicar si el sistema formado por ambas partículas conserva su energía. Justificar. De ser afirmativo, hallar la energía mecánica del sistema.

Ejercicio Nº 4

En el estudio de sistemas atómicos es necesario conocer cómo se desvía una partícula "proyectil" (por ejemplo, una partícula α) en el "choque" con un "blanco" (núcleo atómico). Para ello, asumamos el proyectil como una partícula cargada positivamente, de masa *M* y carga $+ze$, que se acerca al blanco desde el infinito con velocidad $\vec{v}_0$. El blanco está también cargado positivamente (carga $+Ze$) y es muy masivo, de forma que se considera fijo. La interacción entre ambas partículas es una fuerza radial repulsiva proporcional a las cargas y que varía con el inverso de la distancia al cuadrado:

$$\vec{F} = \frac{zZe^2}{r^2}\vec{e}_r$$



Esta fuerza es despreciable cuando ambas partículas están muy alejadas, por lo que inicialmente el proyectil se moverá sobre una recta, y después del "choque" también.

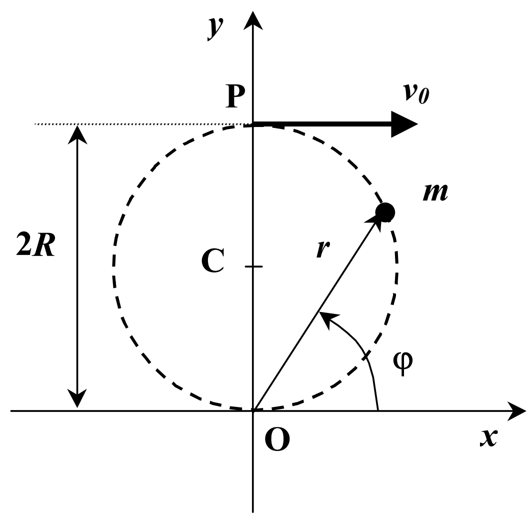
a) Hallar el ángulo ϕ entre ambas rectas, en función del parámetro de impacto b, definido como la distancia entre la recta del movimiento inicial y una paralela a ella que pasa por el blanco (ver figura).

NOTA: Puede ser cómodo definir el parámetro $D = \frac{2zZe^2}{\mathrm{M}v_0^2}$ para simplificar la notación.

b) Hallar R, la distancia de máximo acercamiento (menor distancia entre el proyectil y el blanco). Estudiando los casos límites $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$ interpretar físicamente el parámetro D.

Ejercicio N° 5 (Examen diciembre 1998)

Una partícula de masa m, sometida ***solamente*** a la acción de una fuerza central atractiva $F(r)$, describe una trayectoria circular de radio R. El polo del movimiento central (centro de fuerzas), **O**, se encuentra sobre dicha trayectoria, y la partícula parte del punto **P** diametralmente opuesto con velocidad v_0.



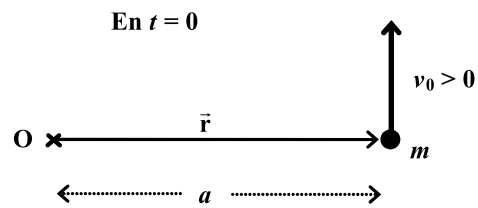
La ecuación de dicha trayectoria, expresada en coordenadas polares con origen en el centro de fuerzas (ver figura), es $r(\varphi) = 2\,R$ sen φ.

a) Partiendo de la velocidad y la aceleración de una partícula expresadas en coordenadas polares, deducir las ecuaciones de Binet en forma general para un movimiento central ***cualquiera***.
b) Demostrar que para que el movimiento de la partícula sea el indicado la fuerza atractiva debe tener módulo $F(r) = \frac{K}{r^5}$, con K constante. Hallar además cuál debe ser la condición inicial v_0, en función de $\boldsymbol{K}$ y los demás parámetros del problema, para que efectivamente la trayectoria sea ésa.
c) Hallar y graficar el potencial ***efectivo***, suponiendo que éste se anula en el infinito. Demostrar que la energía del movimiento antes descrito es igual a cero.
d) Calcular el tiempo que demora la partícula en alcanzar el centro de fuerzas **O**, si parte del punto **P** con la velocidad hallada anteriormente.

Ejercicio N° 6 (Primer parcial 1998)

Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cubo de la distancia al origen **O**, o sea, una fuerza de componente radial $-\frac{k}{r^3}$. Vectorialmente, esto se escribe como

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{k\,\vec{\mathbf{r}}}{r^4} \qquad \text{con } k > 0.$$

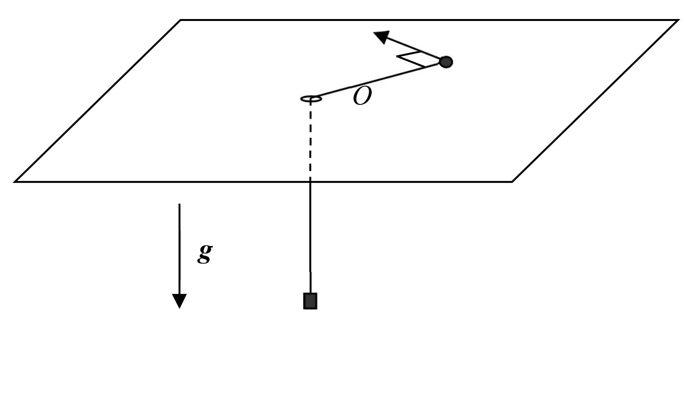


En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia a del origen y su velocidad inicial, de magnitud v_0, es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$.

a) Hallar la energía potencial, si es que existe, asociada a dicha fuerza.
b) Escriba el teorema de la energía para este problema y grafique el *potencial efectivo* del movimiento radial de la partícula, para diferentes valores de v_0. A partir de dicha figura discuta en qué regiones del plano es posible el movimiento de la partícula según sea v_0.
c) A partir de las ecuaciones de movimiento verifique que existe una velocidad inicial para la que el movimiento de la partícula es circular uniforme. ¿Cuál es esa velocidad?
d) Para una velocidad menor que la hallada en la parte anterior, determine cuál es la trayectoria que seguirá la partícula y verifique que la misma colapsa hacia el origen (se acerca infinitamente al mismo).
NOTA: Para hallar la trayectoria a partir de las ecuaciones de movimiento se sugiere utilizar la ecuación de Binet.

Ejercicio Nº 7 (Examen agosto 2003)

Sobre una mesa horizontal lisa se mueve una partícula **P** de masa m, unida a un hilo que pasa a través de un agujero **O** en la mesa, y del cual cuelga otra partícula **Q** de masa M. Inicialmente **Q** está en reposo, **P** tiene velocidad $\mathbf{v_0}$ perpendicular al hilo y $|\mathbf{P}\text{-}\mathbf{O}| = \rho_o$. Se desprecia el frotamiento.



a) Hallar las ecuaciones del movimiento.
b) Hallar $\mathbf{v_0}$ para que la trayectoria de **P** sea circular.
c) Hallar una ecuación que determine la velocidad de **Q** en función de la distancia **OP** para cualquier $\mathbf{v_0}$.
d) Hallar una ecuación algebraica que determine las distancias máxima y mínima de la partícula **P** al agujero **O**.

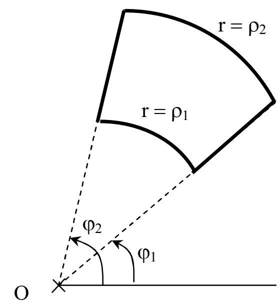
Ejercicio Nº 8 (Examen diciembre 2019)

Una partícula de masa m está sometida a una única fuerza radial no isotrópica de la forma $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\cos(2\varphi)\vec{e}_r$ en coordenadas esféricas, donde K es una constante. Inicialmente la partícula se encuentra en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), con $\varphi = 0$, a una distancia a del origen de coordenadas O con velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}(0) = v_0\,\vec{e}_\varphi$.

a) Demuestre que se conserva el momento angular respecto al origen O.

b) ¿Es esta fuerza conservativa?

SUGERENCIA: Calcule el trabajo realizado por la fuerza en la curva cerrada de la figura. Es decir, una curva ubicada en el plano ecuatorial formada por dos tramos de radio r diferentes y constantes y dos rectas de ángulo φ diferentes y constantes.



c) Encuentre la ecuación diferencial que satisface $u(\varphi) = \frac{1}{r}$ y permite hallar la trayectoria de la partícula.

d) Halle cuál debe ser v_0 para que la partícula se aleje infinitamente de O en $\varphi = 45^{\circ}$.

Parte B: Movimiento bajo cantidades conservadas

Ejercicio Nº 9 (Examen marzo 2002)

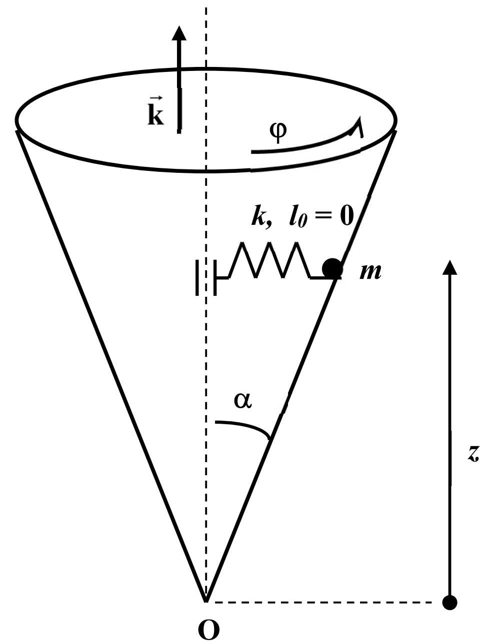
Una partícula de masa m se mueve sobre la superficie de un cono recto de ángulo al vértice 2α (el ángulo entre el eje del cono y la generatriz es α). El cono está fijo y su vértice es O. El contacto entre la partícula y el cono es liso, y la partícula no puede desprenderse del cono (vínculo bilateral). La partícula está unida al eje del cono $O\vec{k}$ por un resorte, de constante k y longitud natural nula, que consideraremos siempre permanece perpendicular a dicho eje.

Llamaremos z a la distancia vertical de la partícula al punto O, medida en la dirección del eje del cono. Inicialmente la partícula se encuentra con $z(0) = H$ moviéndose con velocidad v_0, perpendicular al eje del cono (tangencial a su superficie).

Consideraremos que no actúa el peso.

a) Halle las ecuaciones de movimiento de la masa puntual m.

NOTA: Observe que la altura z y la distancia desde el eje del plano a la partícula m no son independientes, sino que están vinculados entre sí. Escriba este vínculo, y téngalo en cuenta al hallar las ecuaciones de movimiento



b) Observe que no existe ninguna fuerza aplicada en la dirección perpendicular al eje del cono que es tangencial a su superficie, por lo que la aceleración de la partícula en dicha dirección será nula. Preintegre la ecuación correspondiente y halle, a partir de dicha preintegral, la relación que vincula la velocidad angular $\dot{\varphi}$ de la partícula en torno al eje del cono con la coordenada z.

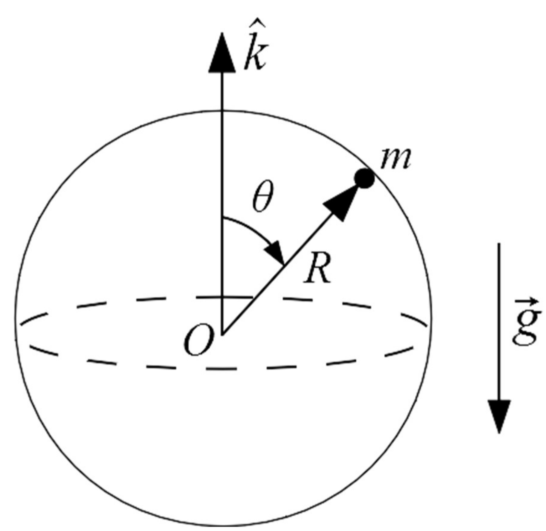
c) Utilizando las expresiones halladas en (a) y (b), despeje la ecuación diferencial para la coordenada $z(t)$.

d) ¿Cuánto vale la reacción normal del cono en función de la coordenada z y de los parámetros m, k, α, v_0 y H?

e) ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el movimiento sea tal que $z(t) = H$ constante? Calcule también la velocidad angular $\dot{\varphi}$ de la partícula en dicho movimiento.

Ejercicio Nº 10 (Primer Parcial 2018)

Una partícula de masa m se mueve en el interior de un cascarón esférico liso de centro $\boldsymbol{O}$ y radio R. Sea θ el ángulo polar que forma el vector posición $\vec{r}$ (referido a $\boldsymbol{O}$) de la partícula con respecto a la dirección vertical $\hat{k}$. Inicialmente la partícula se encuentra sobre la línea ecuatorial indicada en la figura ($\theta = \pi/2$) y su velocidad es horizontal y de módulo v_0.



a) Pruebe que la componente vertical del momento angular de la partícula visto desde ***O*** ($\vec{L}_O = m\vec{r} \times \vec{v}$) es una cantidad conservada.
b) Halle la energía cinética de la partícula.
c) Muestre que se puede escribir una ecuación de la forma $\dot{\theta}^2 + f(\theta) = 0$ donde $f(\theta)$ es una función del ángulo polar que se determinará.
d) Halle el valor de v_0 para el cual la partícula alcanza el punto más bajo de su movimiento en $\theta = 5\pi/6$.

Parte D: Resultados de algunos ejercicios seleccionados

Ejercicio Nº 1: a) $\mathrm{v_b} = \dfrac{a}{b}\mathrm{v_a}$; b) $\mathrm{T_i} = m\dfrac{\mathrm{v_a^2}}{a}$, $\mathrm{T_f} = m\dfrac{a^2\mathrm{v_a^2}}{b^3}$; c) $\dfrac{1}{2}m\mathrm{v_a^2}\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$.

Ejercicio Nº 2: a) $L = mr^2\omega$; b) $\dot{r}^2 = \dfrac{R^2}{r^2}\omega^2(r^2 - R^2) + \dfrac{k}{m}(R^2 - r^2)$; c) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$;

d) $r_{min} = \omega R/\omega_0$, $r_{max} = R$; e) $r_{min} = R$, $r_{max} = \omega R/\omega_0$.

Ejercicio Nº 3: a) $(m+M)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = 0$, $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$, $T(r) = \dfrac{mM}{m+M}\dfrac{a^2\mathrm{v}_0^2}{r^3}$

b) $M > 3m$ c) $\dfrac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2$

Ejercicio Nº 4: a) $\mathrm{tg}\dfrac{\phi}{2} = \dfrac{D}{2b}$ b) $R = \dfrac{D}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{sen}(\phi/2)}\right)$