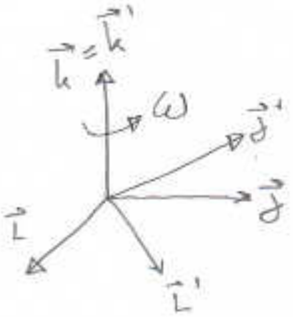
Ejercicio III.9



$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ con ω constante

$S = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es inercial

$S' = \{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ no " (porque gira respecto a S, y solo los sistemas que se trasladan con velocidad constante respecto a uno inercial son también inerciales)

$\mathcal{C}'$: guía lisa

$\vec{F} = -\nabla U_1'(x', y', z')$

parte a: La 2ª Ley de Newton solo vale en sistemas inerciales, por lo que vale en S:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

Aceleración Absoluta $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$

Fuerza activa

Reacción de la guía, que como es lisa no tiene componente tangencial:

$$\vec{R} = N\vec{n} + B\vec{b}$$

Componente Normal — Componente Binormal

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$$

Fuerza ficticia de Transporte

$$\vec{F} = -m\vec{a}_T \text{ con } \vec{a}_T = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$$

Aceleración Absoluta de O.

Elijo O sobre el eje de giro $\Rightarrow$ O fijo $\sim \vec{a}_O = 0$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$ porque $\vec{\omega}$ es constante

Escribo $P-O$ en coordenadas cilíndricas en el sistema relativo

$$P - O = \rho \vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

$$\vec{a}_T = \omega \vec{k} \wedge \underbrace{[\omega \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z\vec{k})]}_{\omega \rho \vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \omega \rho \vec{e}_\varphi} = \omega^2 \rho \vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\omega^2 \rho \vec{e}_\rho$$

Aceleración Centrípeta

$$\Rightarrow \vec{F}_T = m\omega^2 \rho \vec{e}_\rho$$

Fuerza Centrífuga

Para calcular el trabajo de la fuerza de transporte empiezo por calcular su potencia:

$$P_T = \vec{F}_T \cdot \vec{v}\,'$$

Velocidad relativa (porque calculo potencia relativa a sistema S' que es donde existe esta fuerza centrífuga)

$$\vec{v}\,' = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k} \Rightarrow P_T = m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$W_T = \int_{t_A}^{t_B} P_T(t)\,dt = \int_{t_A}^{t_B} m\omega^2\rho\dot{\rho}\,dt \qquad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \dot{\rho}\,dt = d\rho$$

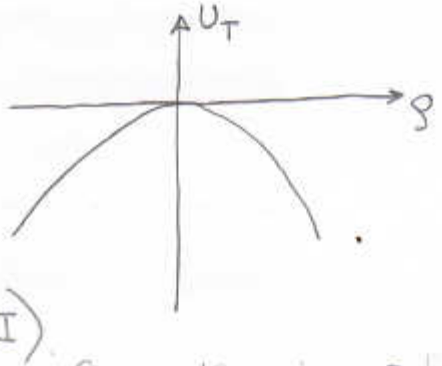
Trabajo de la fuerza de transporte

$$\underset{A\to B}{W_T} = \int_{\rho_A}^{\rho_B} m\omega^2\rho\,d\rho = \left.\frac{m\omega^2\rho^2}{2}\right|_{\rho_A}^{\rho_B} = \frac{m\omega^2\rho_B^2}{2} - \frac{m\omega^2\rho_A^2}{2}$$

EL trabajo de la fuerza de transporte al ir de A a B solo depende de posición final y posición inicial $\Rightarrow$ la fuerza es conservativa, y deriva de una energía potencial

$$\underset{A\to B}{W_T} = -\Delta U = -\left[U(B) - U(A)\right] \Rightarrow \boxed{U_T = -\frac{m\omega^2\rho^2}{2}}$$

La energía potencial es cuadrática como la de un resorte de longitud natural nula atada al eje, pero con el signo cambiado (Ver Ej 12 de Práctico II)



Eso es porque al ser la fuerza centrífuga la energía potencial decrece hacia afuera (la fuerza tiende a llevar la partícula hacia la región de menor energía)

$$\text{Verificación: } \vec{F}_T = -\nabla U_T = -\underbrace{\frac{\partial U_T}{\partial \rho}}_{-m\omega^2\rho}\vec{e}_\rho = m\omega^2\rho\,\vec{e}_\rho \checkmark$$

parte b:

$\vec{F}_{\mathbb{C}} = -m\vec{a}_{\mathbb{C}} = -2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,'$

$P_{\mathbb{C}} = \vec{F}_{\mathbb{C}}\cdot\vec{v}\,' = 0$ porque $\vec{F}_{\mathbb{C}}$ es $\perp$ a $\vec{v}\,'$ (por producto vectorial)

parte c: $T' = \dfrac{m\vec{v}\,'^2}{2}$ ← Energía cinética relativa

$$\frac{d'T'}{dt} = \frac{m}{2}\underbrace{\frac{d'\vec{v}\,'^2}{dt}}_{=\,\frac{d'\vec{v}\,'}{dt}\cdot\vec{v}\,' + \vec{v}\,'\cdot\frac{d'\vec{v}\,'}{dt} \,=\, 2\vec{a}\,'\cdot\vec{v}\,'} = m\vec{a}\,'\cdot\vec{v}\,' = \left(\vec{F}+\vec{R}+\vec{F}_T+\vec{F}_{\mathbb{C}}\right)\cdot\vec{v}\,'$$

$$\frac{d'\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,'$$

$\vec{F}_{\mathbb{C}}\cdot\vec{v}\,' = 0$ por parte b

$\vec{R}\cdot\vec{v}\,' = 0$ porque $\vec{R} = N\vec{n} + B\vec{b}$ y $\vec{v}\,' = \dot{s}\vec{t}$ ← la velocidad es siempre tangencial a la curva

$$\frac{d'T'}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,' + \vec{F}_T\cdot\vec{v}\,'$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{dT'}{dt}dt = T(t_B) - T(t_A) = \underbrace{\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}\cdot\vec{v}\,'dt}_{W^{\vec{F}}_{A\to B}} + \underbrace{\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}_T\cdot\vec{v}\,'dt}_{-U_T(B)+U_T(A)}$$

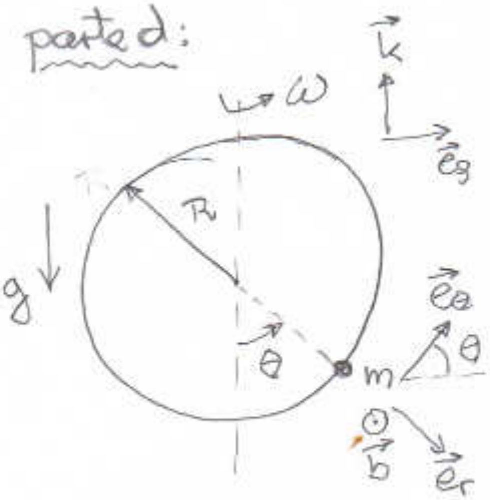
$W^{\vec{F}}_{A\to B} = -U_1'(B) + U_1'(A)$ porque por letra $\vec{F}$ deriva de una energía potencial $U_1'(x',y',z')$

$-U_T(B)+U_T(A)$ por parte a

$$T(t_B) + U_1'(B) + U_T(B) = T(t_A) + U_1'(A) + U_T(A)$$

Luego: $\boxed{T + U_1' + U_T = E \text{ constante}}$

A la energía potencial activa hay que sumarle la energía potencial de la fuerza de transporte parte d:



$$U = U_1' + U_T$$

$$U_1' = mgz = -mgR\cos\theta$$

Observar que el peso es conservativo en el sistema no inercial porque está dirigido según la dirección fija del eje de giro. Si estuviese dirigido según cualquier otra dirección móvil no sería conservativo porque dependería del tiempo. Recordar que la primer condición para que una fuerza sea conservativa es que solo dependa de la posición

¿Estamos en las condiciones del enunciado?

$$U_T = -\frac{m\omega^2\rho^2}{2} = -\frac{m\omega^2R^2\operatorname{sen}^2\theta}{2}$$

$$U = -mR\left(g\cos\theta + \frac{\omega^2R\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)$$

Para que una posición sea de equilibrio en un sistema conservativo debe ser un extremo relativo de la energía potencial. Si es mínimo es estable, si es máximo es inestable

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mR\left(-g\operatorname{sen}\theta + R\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0 \text{ si } \operatorname{sen}\theta\left(-g + R\omega^2\cos\theta\right) = 0$$

1) $\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$

2) $\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$

Hay 3 posiciones de equilibrio, pero la última solo existe si $g < R\omega^2$ (porque $\cos\theta < 1$)

Estabilidad:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -mR\left[-g\cos\theta + R\omega^2\left(\cos^2\theta - \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{1-\cos^2\theta}\right)\right] =$$

$$= -mR\left[-g\cos\theta + R\omega^2\left(2\cos^2\theta - 1\right)\right]$$

1) $\theta = 0$ $\quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mR\left[-g + R\omega^2\right]$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ si $g > R\omega^2$ ← estable

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} < 0$ si $g < R\omega^2$ ← inestable

$\theta = \pi$ $\quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mR\left[+g + R\omega^2\right] < 0$ inestable

2) $\cos\theta = \dfrac{g}{R\omega^2}$ $\quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mR\left[-\dfrac{g^2}{R\omega^2} + R\omega^2\left(\dfrac{2g^2}{R^2\omega^4} - 1\right)\right] =$

$$= -mR\left(\frac{g^2}{R\omega^2} - R\omega^2\right)$$

Esta posición existe solo si $g < R\omega^2$ y en ese caso $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ entonces es estable

Conclusión: Si la posición de equilibrio intermedia $\cos\theta = \dfrac{g}{R\omega^2}$ existe es estable y las otras dos en $\theta = 0$ y π son inestables. Si no existe la posición de equilibrio en $\theta = 0$ es estable y la en $\theta = \pi$ es inestable

Nota: La estabilidad de las posiciones de equilibrio suele alternarse porque los extremos de una función se alternan entre mínimos y máximos.

Fin del Ejercicio

Aunque el ejercicio no lo pide es interesante estudiar la ecuación de movimiento y su deducción en el sistema absoluto

Del teorema de conservación de la energía relativa:

$\vec{v}' = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad T' = \dfrac{m\vec{v}'^2}{2} = \dfrac{mR^2\dot{\theta}^2}{2}$

$$\frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mR\left(g\cos\theta + \frac{R\omega^2\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right) = E$$

Para hallar la ecuación de movimiento debo derivar:

$$\cancel{m}R^{\cancel{2}}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} - \cancel{m}\cancel{R}\left(-g\operatorname{sen}\theta\,\cancel{\dot{\theta}} + R\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\cancel{\dot{\theta}}\right) = 0$$

$\dot\theta = 0$ es la solución introducida en la demostración del teorema de la energía (corresponde con $\vec{v}' = 0$)

Ec de mov: $\boxed{R\ddot\theta + g\,\text{sen}\,\theta - R\omega^2 \text{sen}\,\theta\cos\theta = 0}$

Plantiomos la 2ª ley de Newton en el sistema absoluto:

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(neta)} = -mg\vec{k} - N\vec{e}_r + B\vec{b} = 0$$

$\vec{n} = -\vec{e}_r$ $\quad \vec{b} = \vec{t}\wedge\vec{n} = \vec{e}_\theta \wedge(-\vec{e}_r) = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ Ver figura

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}' = R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta - R\dot\theta^2\,\vec{e}_r$$

$\vec{a}_T = -\omega^2\rho\,\vec{e}_\rho$ ← calculado en la parte a

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\wedge\underbrace{\vec{v}'}_{R\dot\theta\,\vec{e}_\theta} = 2\omega R\dot\theta\,\vec{k}\wedge\vec{e}_\theta = 2\omega R\dot\theta\cos\theta\,(-\vec{b})$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\rho + \text{sen}\,\theta\,\vec{k}$$

Como en toda guía lisa, la proyección según la dirección tangencial da la ecuación de movimiento y las otras proyecciones dan las componentes de la reacción normal

$$\underbrace{m\vec{a}\cdot\vec{e}_\theta}_{R\ddot\theta - \omega^2\rho\,\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\theta = R\ddot\theta - \omega^2 R\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} = -mg\vec{k}\cdot\vec{e}_\theta = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

$\Rightarrow \boxed{R\ddot\theta - R\omega^2\text{sen}\,\theta\cos\theta = -g\,\text{sen}\,\theta}$ Es la misma ecuación de antes

$m\vec{a}\cdot\vec{e}_r = -mg\vec{k}\cdot\vec{e}_r - N \qquad \vec{k}\cdot\vec{e}_r = -\cos\theta$

$$-R\dot\theta^2 - \omega^2\rho\,\underbrace{\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_r}_{\text{sen}\,\theta} = -R\dot\theta^2 - \omega^2 R\,\text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + mR\dot\theta^2 + m\omega^2 R\,\text{sen}^2\theta$$

$$\underbrace{m\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\vec{a}_c\cdot\vec{b} = -2\omega R\dot\theta\cos\theta} = B \Rightarrow B = -2m\omega R\dot\theta\cos\theta$$

Vale la pena preguntarse: ¿En el sistema absoluto es el movimiento de la masa conservativo?

Hay que ver las fuerzas que actúan en el sistema absoluto (las fuerzas ficticias de transporte y Coriolis no actúan en el sistema absoluto).

Fuerzas: 1) Peso → conservativa: $U = mgz = -mgR\cos\theta$

2) Componente normal de reacción: $-N\vec{e}_r$

$P_{\vec{N}} = -N\vec{e}_r \cdot \vec{v}$

Velocidad Absoluta

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_T$

$\vec{v}\,' = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\quad \vec{v}_T = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \omega\vec{k} \wedge R\vec{e}_r =$, $\quad \vec{v}_O = 0$

$\vec{e}_r = \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\rho - \cos\theta\,\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_T = -R\omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{b}$

$\vec{v} \perp \vec{e}_r \Rightarrow P_{\vec{N}} = 0$ La componente normal de la reacción es de potencia nula

3) Componente binormal de la reacción $B\vec{b}$

$P = B\vec{b} \cdot \vec{v} = 2m\omega^2 R^2 \dot{\theta}\cos\theta\operatorname{sen}\theta \neq 0$

No es de potencia nula y depende de $\dot{\theta}$ por lo que no es conservativo

En el sistema absoluto no vale la conservación de la energía.

Pero si puedo aplicar el teorema de variación de la energía: $\Delta T + \Delta U = W_{\text{residuales}}^{\text{fuerzas}}$

$\Delta T = T(t) - T(0)$

$T(t) = \dfrac{m\vec{v}^{\,2}}{2} = \dfrac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2\operatorname{sen}^2\theta\right)$

velocidad absoluta

$$\Delta U = U(t) - U(0) \overset{\shortparallel}{=} -mgR\cos\theta$$

$$W_{\text{fuerza residual}} = \int_0^t P_{\vec{B}}\, dt = \int_0^t 2m\omega^2 R^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \underbrace{\dot{\theta}\, dt}_{d\theta}$$

$$= m\omega^2 R^2 \operatorname{sen}^2\theta \Big|_{\theta(0)}^{\theta(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2\operatorname{sen}^2\theta}{2} - mgR\cos\theta = m\omega^2R^2\operatorname{sen}^2\theta + Cte$$

2 términos pareados

$$\boxed{\frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mgR\cos\theta - \frac{mR\omega^2\operatorname{sen}^2\theta}{2} = Cte}$$

Si bien en el sistema absoluto no se conserva la energía la correcta aplicación del teorema de variación de la " lleva a la misma ley de conservación que la conservación de la energía en el sistema relativo