INSTITUTO DE FÍSICA
MECÁNICA NEWTONIANA

(Editado por última vez marzo 2020)

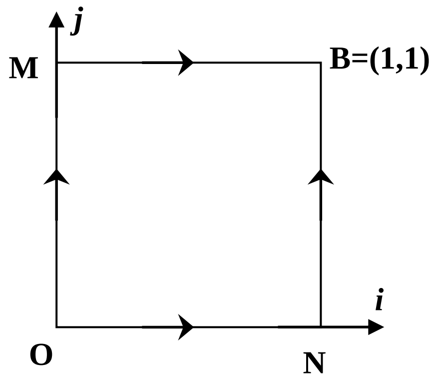
<u>Práctico III</u> – Trabajo y Energía.

<u>Parte A: Ejercicios de Trabajo y Energía.</u>

Ejercicio Nº 1

Una partícula está sometida a una fuerza

$$\vec{F} = K\left(y^2 - x^2\right)\vec{i} + 3Kxy\,\vec{j}$$



a) Calcule el trabajo hecho por la fuerza al llevar la partícula de O hasta B:
   i) Por los caminos (OM+MB) y (ON+NB).
   ii) Por la diagonal del rectángulo ONBM (recta OB).
   iii) Por la parábola $y = x^2$.

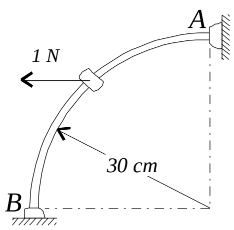
b) Repita los cálculos si la fuerza es $\vec{F} = 2Kxy\,\vec{i} + Kx^2\,\vec{j}$.

c) ¿Qué puede decir acerca de las dos fuerzas? ¿Por cuál de los caminos llevaría Ud. al móvil sometido a esas fuerzas, si desease que, al menos en términos "energéticos", le costase poco?

d) Investigue si las fuerzas anteriores derivan de un potencial, y en caso de que sea así halle dicho potencial.

Ejercicio Nº 2

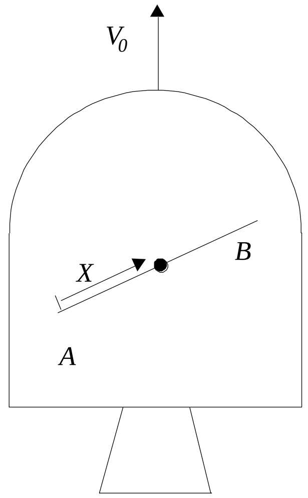
Una cuenta de 50 g parte del reposo en *A* y se desliza sin rozamiento en un plano vertical a lo largo del alambre fijo bajo la acción de una fuerza horizontal constante de 1 N. Halle la velocidad *v* de la cuenta cuando choca contra el extremo *B*.



Ejercicio Nº 3

Verifique directamente, en el <u>Ejercicio Nº 9 del Práctico II,</u> que el trabajo de la fuerza de rozamiento es igual a la variación de energía.

Ejercicio Nº 4



Dentro de una nave espacial, que se encuentra lejos de cualquier campo gravitatorio, se realiza el siguiente experimento: se lanza una bala por una guía AB a 45º con la trayectoria de la nave, y se observa que la posición $x(t)$ de la bala es: $x(t) = Ct^2$. Si la nave avanza con velocidad v_0 constante alejándose de la Tierra,

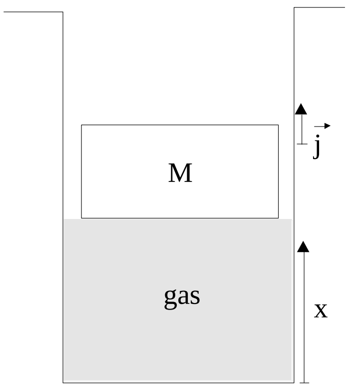
a) Halle la energía cinética T de la bala para un observador dentro de la nave y un observador parado en la Tierra.

b) Halle la potencia neta $P(t)$ que se ejerce sobre la bala para cada uno de los observadores.

c) ¿Son las cantidades medidas en uno y otro sistemas iguales? ¿Deberían serlo? Dado que ambos sistemas son inerciales, ¿a qué se deben las diferencias que puedan aparecer entre uno y otro?

<u>NOTA</u>: Una forma de intentar responder la pregunta es observar a qué es igual la diferencia entre la potencia "relativa" y la "absoluta".

Ejercicio Nº 5



La fuerza que ejerce un gas comprimido dentro de un tubo sobre la masa M que lo comprime (ver figura) vale $\vec{F}_{\text{GAS}} = \frac{k}{x}\vec{j}$, donde $\vec{j}$ indica la dirección vertical ascendente.

a) Halle un potencial $U(x)$ para dicha fuerza.

b) Halle la ecuación del movimiento de M:

i) aplicando la segunda ley de Newton.

ii) derivando la ecuación de la energía $T + U = E$.

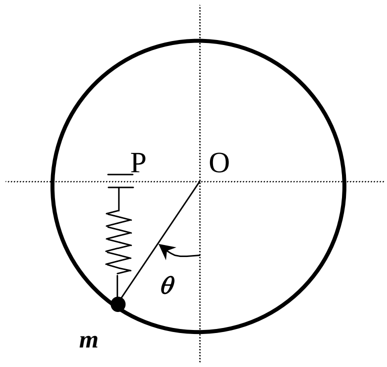
c) Halle las posiciones de equilibrio de la masa. Indique si son estables o no.

d) Si el tubo tiene longitud l, se comprime el gas hasta la mitad del mismo y en determinado momento se suelta la masa (en reposo). ¿Con qué velocidad llega M al borde del tubo? ¿Qué condición se debe verificar para que efectivamente llegue arriba?

Ejercicio Nº 6

Una masa m se mueve sobre una guía circular (de centro O y radio R) ubicada en un plano vertical, sometida a la acción de un resorte. El resorte tiene longitud natural nula y constante k, y su otro extremo P se mueve sobre una guía horizontal lisa, que pasa por O. Se verifica que $\frac{mg}{kR} = \frac{1}{3}$ y $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

a) Demuestre que, siempre que el resorte esté estirado $\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$, si el extremo P puede considerarse una partícula *sin masa* moviéndose sobre una guía *lisa*, entonces el resorte permanecerá siempre vertical.



NOTA: En resto de las partes de este ejercicio son completamente independientes de esta demostración. Se asumirá que el resorte permanece efectivamente vertical.

b) Halle la ecuación del movimiento de *m*:

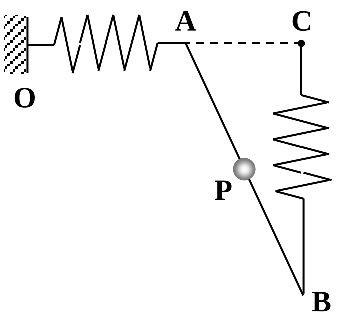
i) aplicando la segunda ley de Newton.

ii) derivando la ecuación de la energía $T + U = E$.

c) Halle las posiciones de equilibrio de la masa. Indique si son estables o no.

Ejercicio Nº 7

El sistema de la figura consiste en una barra AB de longitud $2l$ y masa despreciable, sometida a la acción de dos resortes de constante elástica $k = \frac{mg}{4l}$ y longitud natural nula. El punto A se mueve sobre una guía horizontal lisa OC y el punto B se mueve sobre una guía vertical también lisa. O y C son fijos, y están separados una distancia $2l$.



En el punto medio P de la barra hay incrustada una partícula de masa *m*.

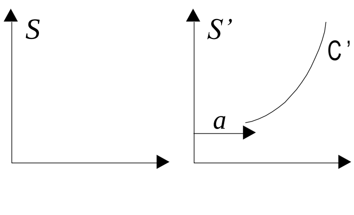
a) Halle la ecuación del movimiento usando el teorema de la energía.

NOTA: Este ejercicio tiene la dificultad conceptual de que se trata de un sistema de partículas formado por la masa *m* y la barra, sometidas a las fuerzas de los resortes y el peso; y no de una sola partícula, como se ha estudiado hasta el momento. Deben incluirse las energías potenciales involucradas, teniendo en cuenta que las fuerzas internas que mantienen la masa y la barra unidas son de potencia nula, como se demostrará más adelante.

b) Halle las posiciones de equilibrio y estudie su estabilidad.

Ejercicio Nº 8

Un sistema de referencia *S’* se traslada respecto a otro sistema *S*; que es inercial, con aceleración $\vec{a}$ constante. Una partícula P’ se mueve, respecto de *S’*, sobre una guía C’ lisa.



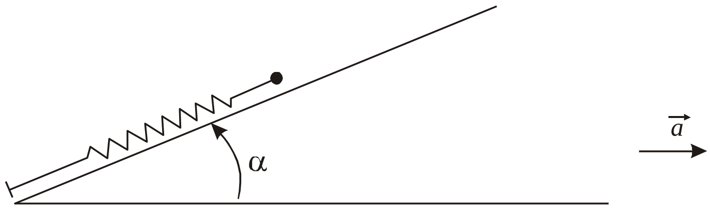
La fuerza neta activa $\vec{F}$ real, a la que está sometida P', deriva de un potencial $U_1^{'}(x',y',z')$ en *S'*; esto es $\vec{F} = -\nabla' U_1^{'}(x',y',z')$

a) Demuestre que la "*Fuerza de transporte*" $\vec{F}_T = -m\vec{a}_T$, donde $\vec{a}_T$ es la aceleración de transporte, deriva de un potencial $U_2^{'}(x',y',z')$ en *S'*.

b) Demuestre que la reacción de la guía es de potencia nula en *S'*.

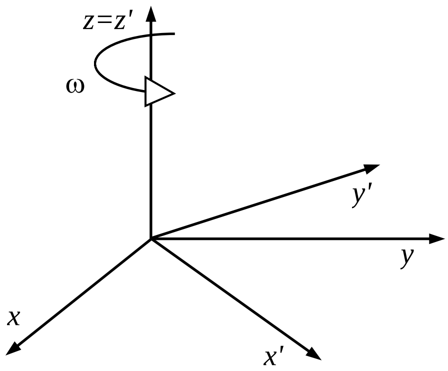
c) Demuestre que se tiene una ley de conservación de la forma del teorema de la energía en el sistema no inercial *S'*.

d) Halle una ley de conservación para el movimiento de una partícula P de masa *m* sobre una rampa lisa inclinada un ángulo α



respecto de la horizontal (se considera movimiento unidimensional). Dicha rampa se traslada con aceleración $\vec{a} = a\,\vec{i}$. La partícula está sometido a la acción de un resorte de constante *k*, y longitud natural l_0. Determine luego, la ecuación del movimiento de P.

Ejercicio Nº 9



Un sistema de referencia *S'* rota respecto de otro sistema *S* (inercial) con velocidad angular ω constante según un eje Oz fijo. Una partícula P' se mueve, respecto de *S'*, sobre una guía C' lisa. La fuerza neta activa $\vec{F}$ real, a la que está sometida P' deriva de un potencial $U_1^{'}(x',y',z')$ en *S'*.

a) Muestre que la "*Fuerza de transporte*" deriva de un potencial.

$$U_T\left(\vec{r}\right) = U_T(\rho) = -\frac{m\omega^2\rho^2}{2}$$

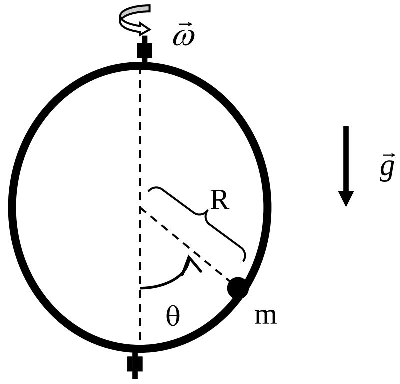
donde ρ es la distancia de la masa al eje de giro.

<u>NOTA:</u> Recuerde que $\nabla V = \dfrac{dV}{d\rho}\hat{e}_\rho$ en coordenadas cilíndricas, siendo $V = V(\rho)$.

b) Demuestre que la "*Fuerza de Coriolis*" $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C$, donde $\vec{a}_C$ es la aceleración de Coriolis es de potencia nula.

c) Demuestre que se tiene una ley de conservación de la forma del teorema de la energía en el sistema no inercial.

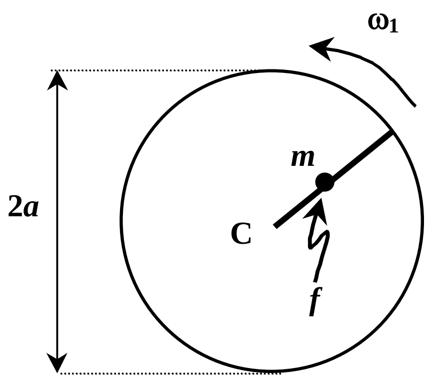
d) Una guía circular lisa de radio R gira con velocidad angular ω constante alrededor del eje vertical que coincide con uno de sus diámetros. Una partícula P de masa m se mueve sobre la guía (vínculo bilateral). Halle las posiciones de equilibrio relativo y estudie la estabilidad de las mismas, discutiendo según los parámetros del sistema.



Parte B: Ejercicios propuestos en Parciales y Exámenes.

Ejercicio Nº 10 (Examen febrero 1999)

Un disco de radio a gira con velocidad angular ω_1 constante en torno a su centro C que se encuentra fijo. Solidaria al disco hay una guía radial rugosa sobre la que se mueve una partícula de masa m. El coeficiente de rozamiento entre la partícula y la guía es f. Considere que no hay peso en este problema.



La partícula se encuentra inicialmente en reposo respecto a la guía, a una distancia b del centro del disco.

a) Halle la ecuación de movimiento.

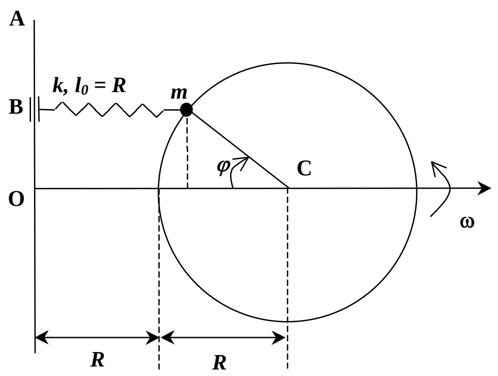
b) Halle la ley horaria.

c) Halle el trabajo realizado por la reacción normal de la guía sobre la partícula, desde el instante inicial hasta que la misma alcanza el borde del disco.

d) Usando el teorema de variación de la energía, deduzca cuál es la energía disipada por la fuerza de fricción, dejándola expresado en función de la velocidad radial final.

Ejercicio Nº 11 (Examen febrero 2000)

Una partícula de masa m se mueve sobre una guía circular *lisa* de radio R y centro C. La partícula está unida a un resorte de constante k y longitud natural R. El otro extremo del resorte, B, está unido a otra guía rectilínea OA, que dista 2R de C (es decir OA $\perp$ OC = 2R) y que se encuentra en el mismo plano de la guía circular. La unión entre este extremo B del resorte y la guía OA es tal que el resorte permanece paralelo a OC en todo instante.



Todo el sistema gira con respecto al eje OC con velocidad angular ω constante respecto a un sistema fijo.

Considere que no actúa el peso.

a) Halle la ecuación de movimiento relativo de la masa *m*.

b) Halle las posiciones de equilibrio relativo de la masa *m*.

c) Especificar cuáles posiciones de equilibrio son estables y cuáles inestables.

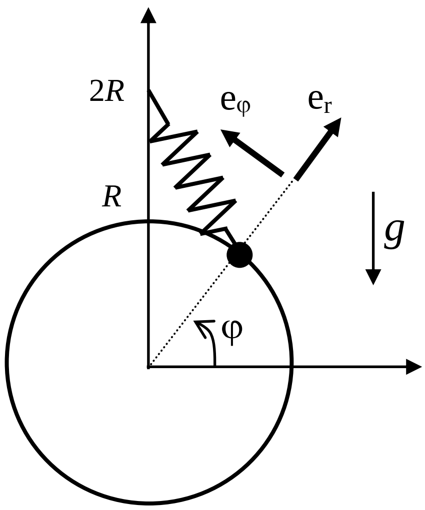
Ejercicio Nº 12 (Primer parcial 2002)

Una partícula de masa *m* está obligada a moverse sobre una guía circular de radio *R*, fija, lisa (vínculo bilateral), contenida en un plano vertical. La partícula está sometida a la fuerza del peso y a la fuerza de un resorte de constante *k* y longitud natural despreciable cuyo otro extremo se encuentra fijo en un punto situado a una distancia 2*R* del centro de la guía sobre la vertical que pasa por éste.

a) Encuentre las posiciones de equilibrio de la partícula y discuta su estabilidad en función de los valores de *m*, *k*, *R* y *g*.

b) Suponga de aquí en adelante que se cumple que $kR = mg$. La partícula se suelta con velocidad nula desde el extremo de un diámetro horizontal. Calcule su velocidad al pasar por el extremo de un diámetro vertical.

c) Halle la expresión para la fuerza del resorte en la base e_r y e_φ (ver figura) válida para cualquier valor del ángulo φ.



d) Determine la fuerza normal a la guía en función del ángulo φ durante el movimiento considerado en b).

e) Suponga ahora que el vínculo es *unilateral*, de tal manera que la partícula está únicamente obligada a permanecer del lado *exterior* a la guía. Para las mismas condiciones iniciales que en b), halle el valor del ángulo φ para el cual la partícula se despega de la guía.

Parte C: Resultados de algunos Ejercicios Seleccionados:

Ejercicio Nº 1: a) *i*) 2K/3 y 7K/6; *ii*) K.

Ejercicio Nº 4: a) $T_R = 2mc^2t^2$, $T_A = \frac{1}{2}m(v_0^2 + 2\sqrt{2}v_0ct + 4c^2t^2)$

b) $P_R = 4mc^2t$, $P_A = m(\sqrt{2}v_0c + 4c^2t)$

c) La energía cinética y la potencia, a pesar de ser cantidades escalares, están definidas a través de la velocidad, que es un concepto relativo al sistema de referencia. Para interpretar la diferencia entre la potencia "relativa" y "absoluta" debemos estudiar el concepto de potencia, trabajo y energías sobre un sistema de partículas y no una partícula aislada, y tener en cuenta el principio de acción y reacción.

<u>Ejercicio Nº 5</u>: a) $-k\ln x$; b) $\ddot{x} = \dfrac{k}{Mx} - g$; c) $x_{eq} = \dfrac{k}{Mg}$(estable)

d) $\mathrm{v_f} = \sqrt{\dfrac{2k}{M} ln\, 2 - gl}$.Condicion $: 2k\, ln\, 2 \geq Mgl$.

<u>Ejercicio Nº 6</u>: $\theta = 0$ (inestable) ; $\theta = \pm\arccos(1/3)$ (estables)

<u>Ejercicio Nº 7</u>: a) $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}(\mathrm{sen}\,\varphi - \cos\varphi) = 0$; b) $\varphi_{eq} = \pi/4$(estable) ;

<u>Ejercicio Nº 8</u>: d) $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x + g\,\mathrm{sen}\,\alpha + a\cos\alpha = 0$