INSTITUTO DE FÍSICA
MECÁNICA NEWTONIANA

(Editado por última vez marzo 2020)

Práctico II – Dinámica de la Partícula y Sistemas No Inerciales.

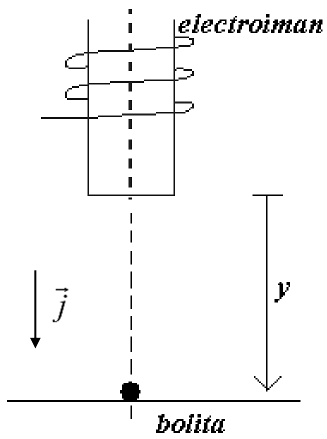
Parte A: Ejercicios de Dinámica de la Partícula

Ejercicio Nº 1

Una partícula de masa *m* se desplaza por un tubo horizontal que contiene un fluido viscoso. Dicho fluido ejerce sobre la partícula una fuerza $\vec{F} = -b\vec{v}$, con $b > 0$ (modelo de Stokes de fuerza de fricción viscosa). En cierto instante se mide que la partícula tiene una velocidad v_0.

Encuentre la expresión de la velocidad y la posición en función del tiempo tomando como origen de tiempo el instante de medición y como origen de coordenadas el lugar de medición.

Ejercicio Nº 2



Sobre una mesa horizontal descansa una pequeña bolita de radio *s* y de masa *m*. A una distancia D por encima de la mesa hay un electroimán, que al conectarse en un determinado instante levanta a la bolita de la mesa y la hace chocar con su cara inferior.

El polo opuesto del electroimán se halla a considerable distancia de la bolita, por lo que se puede suponer que la fuerza atractiva es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y entre la cara del electroimán y el centro de la bolita, y vale $\vec{F} = -\frac{k}{y^2}\vec{j}$, siendo k una constante positiva y $\vec{j}$ un versor vertical descendiente.

¿Cuál es la velocidad de la bolita en el momento en que choca con el electroimán?

Ejercicio Nº 3

Un avión que avanza a una velocidad v_0 = 600 km/h a una altura h quiere soltar una carga de 600 kg para que llegue a un objetivo en el suelo que se encuentra a una distancia L (medida horizontalmente). Considerando que la velocidad inicial de la carga es la misma que la del avión, y que las fuerzas que actúan sobre ella son el peso y la fuerza de rozamiento del aire, que es de la forma $\vec{F} = -b\vec{v}$ con b = 83 kg/s:

a) Halle la velocidad de la carga en función del tiempo $\vec{v}(t)$ y demuestre que tiende a una constante cuando $t \to \infty$. Halle esta *velocidad límite* e indique para qué tiempo t_{lim} después de lanzada la bomba puede considerarse que ese límite es alcanzado.

NOTA: Cuándo dicho límite es “alcanzado” depende de un criterio de aproximación. El mismo debe tener en cuenta el error en la medida de los parámetros. Para este problema es suficiente considerar que t_{lim} es el tiempo en que las componentes varían, por ejemplo, un 90 % de su valor máximo.

b) Halle la dependencia de la posición vertical de la carga con el tiempo. ¿Para qué alturas h se llegará a alcanzar esa velocidad límite?

c) ¿Cuál debe ser la distancia L para que la carga alcance el objetivo en el suelo?

d) Si el avión viaja a una altura h de 2500 m, ¿cuánto habrá avanzado en el momento en que la carga llegue al suelo?

Ejercicio Nº 4

Una bala de masa m es disparada hacia arriba con una velocidad inicial v_0 vertical. Asumiendo que la misma está sometida a su peso y a una fuerza de arrastre del tipo $\vec{\mathbf{F}} = -b|\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}$ (o sea, una fuerza de fricción que depende del cuadrado de la velocidad, $F = -bv^2$, siempre en la dirección opuesta al sentido del movimiento dado por la velocidad):

a) Plantee la ecuación del movimiento e integre la misma para hallar:

i) El tiempo que demora en detenerse.

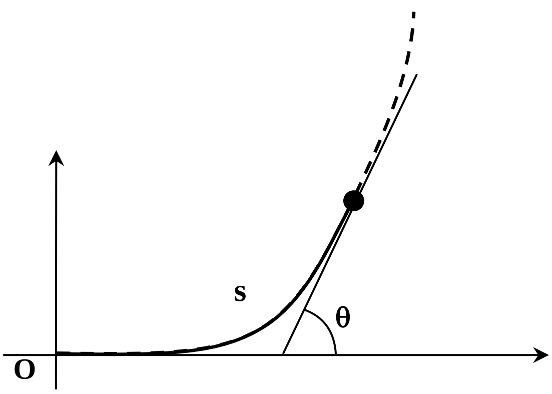
ii) La altura máxima a la que llega.

NOTA: Ambas cantidades pueden hallarse en forma completamente independiente, integrando en forma diferente la ecuación de movimiento.

b) ¿Cuál es la velocidad con que vuelve a golpear el piso?

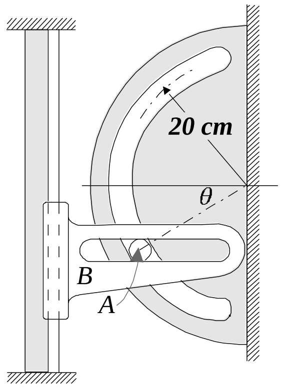
Ejercicio Nº 5

Un objeto pequeño se mueve con una velocidad inicial de módulo v sobre una guía fija y lisa contenida en un plano vertical. La guía es tal que el ángulo θ que forma la tangente de la curva con la horizontal varía siguiendo la ley $sen\,\theta = k \cdot s$, donde k es una constante y s es la abscisa curvilínea (distancia medida a lo largo de la curva, a partir de un punto O en su parte inferior).



Halle la máxima distancia s que se desliza el objeto hacia arriba de la curva y el tiempo que demora en detenerse si el mismo se encuentra inicialmente en el origen.

Ejercicio Nº 6



El movimiento del pasador A de 100 g en la ranura circular está regido por la guía B que tiene una velocidad constante hacia arriba de 1,2 m/s durante una parte de su movimiento. Calcule la fuerza *N* ejercida por la guía B sobre el pasador cuando éste pasa por la posición para la cual θ = 30º. Todas las superficies están exentas de rozamiento.

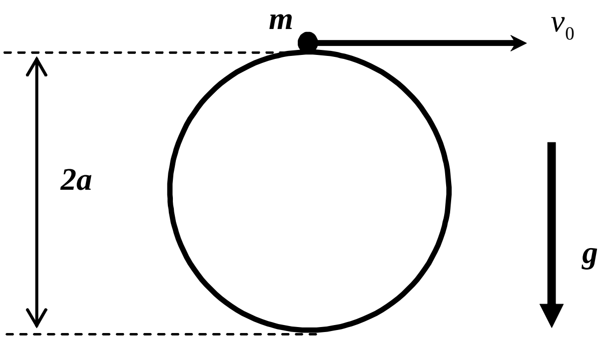
Ejercicio Nº 7

En el exterior de una guía vertical circular lisa de radio *a* se mueve, apoyado sobre ella, una partícula de masa *m*, que en un cierto instante se encuentra en el punto superior con velocidad v_0 (tangente a la guía).

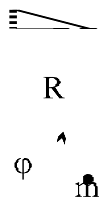
a) Halle la ecuación de movimiento para la partícula.

b) Integrando la ecuación anterior, halle la velocidad de la partícula en función de la posición.

c) Analice físicamente el resultado discutiendo qué sucede para diferentes valores de v_0.



Ejercicio Nº 8



Una partícula de masa *m* está unida a un hilo de longitud *R* cuyo otro extremo está atado a un punto fijo. Uno de los movimientos posibles de la partícula, llamado péndulo simple, es cuando se supone que la partícula permanece en un plano vertical, sometida solamente a su peso y a la tensión del hilo, moviéndose sobre una circunferencia.

a) Halle la ecuación de movimiento de un péndulo simple.

b) Suponiendo que el péndulo se lanza con velocidad v_0 tangente a la circunferencia desde el punto inferior de la misma (φ = 0), integre una vez la ecuación del movimiento hallando la velocidad angular en función de la posición.

c) Suponiendo que el vínculo es bilateral (en lugar de un hilo, la unión de la partícula con el punto fijo es a través de una barra rígida, de masa despreciable) demuestre que si $v_0 \leq 2\sqrt{gR}$ la partícula se detiene cuando alcanza un cierto ángulo $\varphi = \varphi_0$ y, eventualmente, retrocederá.

   i) Halle dicho ángulo φ_0.

   ii) En caso de que no se cumpla la condición anterior, observe que tendremos un movimiento giratorio. ¿Por qué?

   iii) Si $v_0 = 2\sqrt{gR}$, ¿cuál es el ángulo φ_0 y cuánto demora la partícula en llegar allí?

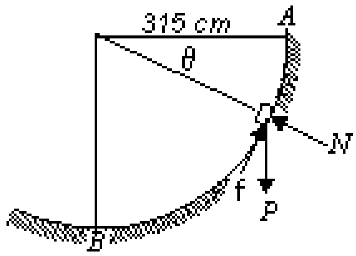
d) Halle la fuerza ejercida por la barra.

e) Suponga ahora que la partícula se encuentra unida al punto fijo por medio de un hilo, que supondremos flexible, inextensible y sin masa. Estudiando el sentido de la fuerza ver que, como el hilo solo puede ejercer tensión en un sentido, puede existir un cierto ángulo de desprendimiento φ_{des} en el cual la partícula deje de moverse en una circunferencia. Halle dicho ángulo.

f) Estudiando cómo varían φ_0 y φ_{des} con la velocidad v_0 discuta los diferentes tipos de movimientos posibles. Para eso considere que el vínculo es unilateral, es decir que puede haber desprendimiento.

Ejercicio Nº 9

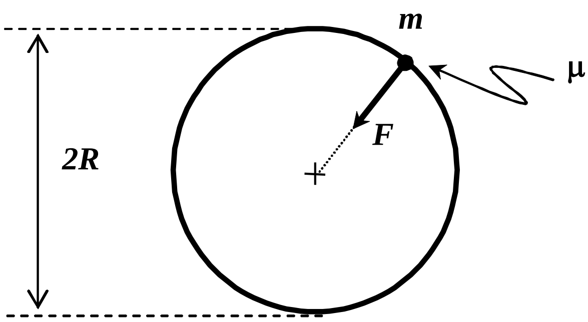
Se suelta un objeto pequeño desde *A* partiendo del reposo y el mismo se desliza hacia abajo por el camino circular con rozamiento. Si el coeficiente de rozamiento dinámico vale 1/5, determine la velocidad del objeto al pasar por *B*.



SUGERENCIA: Halle la ecuación de movimiento en función de θ y resuélvala haciendo el cambio de variable $\dot{\theta}^2 = u(\theta)$. *Este cambio de variable puede serle útil en varios ejercicios*.

Ejercicio Nº 10

Sobre una guía circular de radio *R* corre, con vínculo bilateral, una partícula de masa *m* sometida a una fuerza radial de atracción de magnitud constante *F*. El coeficiente de rozamiento con la guía es μ, y la velocidad inicial de la partícula es v_0. Se considera que no actúa el peso. Se definen los parámetros $\omega = \frac{v_0}{R}$ y $\Omega = \sqrt{\frac{F}{mR}}$.



a) Demuestre que si Ω > ω la partícula se detendrá luego de haber recorrido un cierto arco de circunferencia que se hallará. Demuestre que permanecerá en equilibrio en esa posición.

b) Demuestre que si Ω = ω el movimiento resultante será circular uniforme.

c) Demuestre que si Ω < ω el movimiento corresponderá a una desaceleración continua llegando a una velocidad límite que se hallará.

d) Demuestre que si la fuerza *F* es repulsiva, en lugar de atractiva, el movimiento resultante es siempre como el de la parte a).

Parte B: Ejercicios de Sistemas No Inerciales

Ejercicio Nº 11

Un bloque pequeño, de masa m, se coloca sobre la superficie horizontal de un disco circular, a una distancia radial r del eje de giro. Si f es el coeficiente de rozamiento y el disco parte del reposo con aceleración angular α constante, halle la velocidad angular ω en el momento en que el bloque empieza a deslizar. ¿Bajo qué condiciones se deslizará desde el comienzo?

Ejercicio Nº 12

Un tubo de radio R gira alrededor de un eje vertical por su centro con una velocidad angular ω constante, de forma que el eje del tubo siempre se mantiene contenido en un plano horizontal. Dentro del tubo está colocada una esfera de radio también R (por lo que llena completamente el interior del mismo) que se desliza sin rozamiento.

a) Halle la ley horaria para la posición de la esfera si en el instante inicial ésta se encuentra en el centro de rotación y tiene una velocidad inicial v_0 a lo largo del tubo.

b) Halle la fuerza que ejerce el tubo sobre la esfera.

c) Si el tubo tiene una longitud total $2l$, ¿cuál será la velocidad de la esfera, vista desde un sistema inercial con origen en el centro del tubo, en el instante en que sale del tubo?

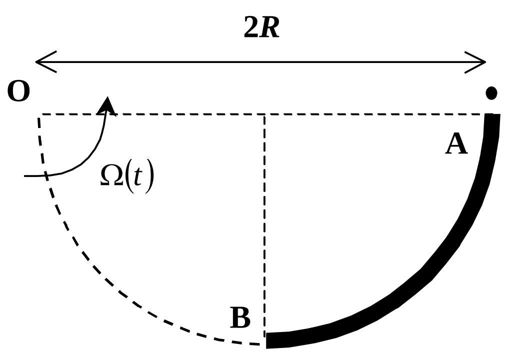
d) Se desea evitar que la esfera se escape del tubo, por lo que se agrega un resorte de constante k y longitud natural nula que tiene un extremo unido a la esfera y el otro atado al centro del tubo. Halle las condiciones que deben verificar los parámetros del problema para que la esfera no alcance el extremo del tubo.

Ejercicio Nº 13

Un tubo liso AB, en forma de cuadrante de circunferencia de diámetro OA = $2R$, gira en un plano con velocidad angular variable $\Omega(t)$ alrededor de un eje perpendicular al plano que pasa por O. En el instante inicial, el extremo A del tubo captura una partícula que se hallaba en reposo. Considerando que no actúa el peso en este problema:

a) Determine Ω (t) en función de Ω (0) de modo que la velocidad de la partícula relativa al tubo sea de módulo constante.

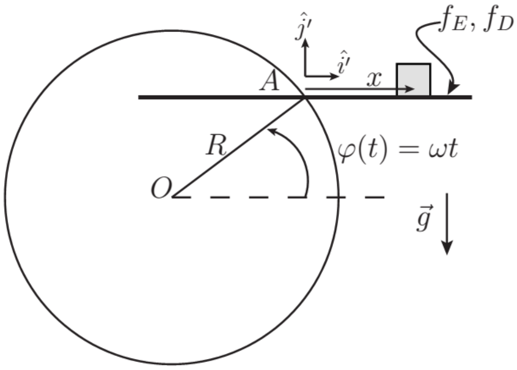
b) Halle la normal $\vec{N}(t)$ que actúa sobre la partícula.



Parte C: Ejercicios propuestos en Pruebas y Exámenes

Ejercicio Nº 14 (Ejercicio 1 del primer parcial 2014)

Un bloque de masa *m* se mueve sobre una plataforma móvil que se mantiene siempre horizontal. El centro A de esta base se mueve sobre una circunferencia de radio *R* y su radio vector forma con la horizontal un ángulo $\varphi(t) = \omega t$ ($\omega > 0$ constante) tal como se indica en la figura. La base $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}'\}$ es solidaria a la plataforma y *x* es la coordenada que ubica a la partícula con respecto al centro A. El contacto entre la plataforma y el bloque es rugoso, de coeficiente de fricción estática f_E y fricción dinámica f_D ($<f_E$).



a) Escriba la velocidad y aceleración de la partícula relativa a la plataforma.

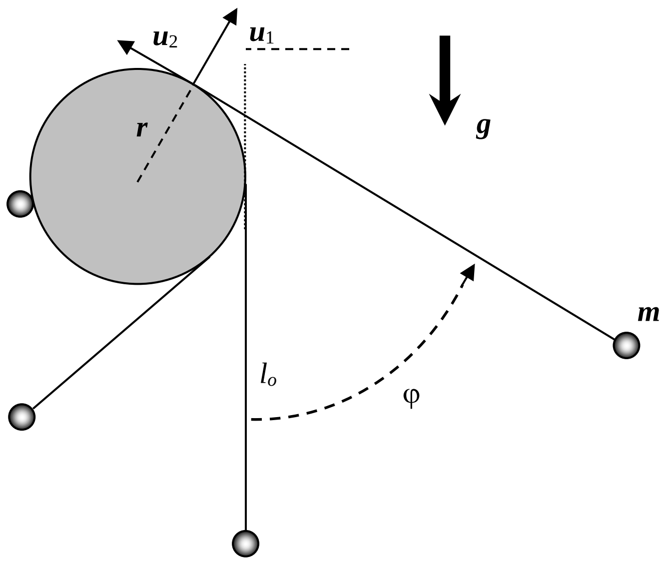
b) Halle la velocidad y aceleración absoluta de la partícula.

c) En $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto A en reposo relativo a la plataforma. Encuentre la condición que debe verificar f_E para que el bloque no se deslice respecto a la plataforma en un entorno del instante inicial.

d) Si f_E no cumple con la condición anterior, halle la aceleración relativa y la componente horizontal de la velocidad absoluta de la partícula en función del tiempo en un entorno del instante inicial.

Ejercicio Nº 15 (Ejercicio 1 del examen de febrero de 2002)

Una masa *m* puntual está unida a un hilo flexible, inextensible y sin peso, el cual se encuentra enrollado en torno a un cilindro fijo de radio *r*. Estando la masa en la posición **A** (hilo vertical, ver figura), el trozo de hilo desenrollado tiene largo l_o. Se definen dos versores móviles $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ perpendicular y paralelo al hilo respectivamente, y φ como el ángulo del hilo con la vertical (ver figura). En todo el movimiento se supondrá que actúa el peso y que el hilo no desliza sobre el cilindro.



a) Escriba expresiones para los vectores velocidad y aceleración de la partícula en función de φ (y sus derivadas temporales) en la base $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$.

b) Encuentre la ecuación de movimiento de la partícula.

c) Verifique que la tensión del hilo es de potencia nula.

OBSERVACIÓN: La parte (c) de este ejercicio no corresponde a los temas de este práctico.

d) Si se deja caer la partícula con velocidad nula desde la superficie del cilindro (por ejemplo **B**), ¿desde qué posición debe dejarse caer para que el hilo nunca deje de estar tenso y l_o sea lo más grande posible?

Parte D: Resultados de algunos Ejercicios Seleccionados:

Ejercicio Nº 1: $v(t) = v_0 e^{-bt/m}$, $x(t) = \dfrac{mv_0}{b}(1-e^{-bt/m})$

Ejercicio Nº 2: $v = \sqrt{2(D-2s)\left(\frac{k}{ms(D-s)} - g\right)}$

Ejercicio Nº 3: a) $\vec{v}(t) = (v_0 e^{-bt/m})\vec{i} - \dfrac{mg}{b}(1-e^{-bt/m})\vec{j}$, con $\vec{i}$ horizontal y $\vec{j}$ vertical.

$$\vec{v}_{lim} = -\frac{mg}{b}\vec{j}$$

Ejercicio Nº 4: a) i)$t = \int_0^{v_0} \frac{m d\dot{y}}{mg + b\dot{y}^2} = \sqrt{\frac{m}{bg}}\, arctan\left(\sqrt{\frac{bv_0^2}{mg}}\right)$, ii) $h = \frac{m}{2b} ln\left(\frac{mg+bv_0^2}{mg}\right)$;

b) $v_f = \sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg+bv_0^2}}$

Ejercicio Nº 5: $s = \dfrac{v_0}{\sqrt{gk}}$

Ejercicio Nº 6: $N = mg - \dfrac{mv_B^2 \operatorname{sen}\theta}{R\cos^4\theta} = 0.34\,N$.

Ejercicio Nº 7: a) $mg\operatorname{sen}\theta = mR\ddot{\theta}$

b) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)}$.

c) Si $v_0 \leq \sqrt{gR}$ entonces se desprende para un ángulo $\theta = \arccos\frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR} + 2\right)$. (Si se cumple que $v_0 \approx 0$ entonces $\theta \approx 48.2º$).

Si $v_0 > \sqrt{gR}$ entonces se desprende inicialmente ($\theta = 0$).

<u>*Ejercicio Nº 8*</u>: a) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\varphi = 0$,

b) $\dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - 2\frac{g}{R}(1 - cos\,\phi)$,

c) i) $\varphi_0 = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right)$,

ii) Porque la velocidad no se anula y entonces no puede cambiar de signo.

iii) $\varphi_0 = \pi$ y el tiempo es infinito.

d) $T = mg(3\cos\varphi - 2) + m\frac{v_0^2}{R}$,

e) $\varphi_{des} = \arccos\frac{1}{3}\left(2 - \frac{v_0^2}{gR}\right)$

f) i) Si $v_0 < \sqrt{2gR} \Rightarrow |\varphi| < \varphi_0 < \pi/2$ (movimiento oscilatorio, no hay desprendimiento)

ii) $\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR} \Rightarrow \pi/2 < \varphi_{des} < \pi$ (la partícula llega hasta φ_{des} , no se alcanza φ_0)

iii) $v_0 > \sqrt{5gR}$ (la partícula da vueltas completas).

<u>*Ejercicio Nº 9*</u>: $v_B = \sqrt{\frac{gR}{29}\left(46 - 30e^{-\pi/5}\right)} = 5.56 m/s$.

<u>*Ejercicio Nº 10*</u>: a) $\varDelta\theta = \frac{1}{2\mu}ln\left(\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\right)$

c) $\dot{\theta}^2 = (\omega^2 - \Omega^2)e^{-2\mu\theta} + \Omega^2 \qquad \dot{\theta}^2 \to \Omega^2$

d) $\varDelta\theta = \frac{1}{2\mu}ln\left(\frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2}\right)$

<u>*Ejercicio Nº 11:*</u> $\omega = \sqrt[4]{\frac{f^2g^2}{r^2} - \alpha^2}$, si $\alpha \geq \frac{fg}{r}$ deslizará desde el comienzo.

<u>*Ejercicio Nº 12*</u>: a) $r(t) = \frac{v_0}{\omega}senh(\omega t)$,

b) $\vec{N}(t) = 2mv_0\omega\cosh(\omega t)\vec{e}_\varphi + mg\vec{k}$,

c) $\vec{v}_f = \sqrt{v_0^2 + l^2\omega^2}\,\vec{e}_r + l\omega\vec{e}_\varphi$.

Ejercicio Nº 13: a) $\Omega(t) = \frac{2\Omega(0)}{2+ln\left(\frac{1+cos(2\Omega(0)t)}{2}\right)}$

b) $N(t) = 2mR\left(2\Omega(0)\Omega(t) - \Omega^2(t) - 2\Omega^2(0)\right)$

Ejercicio Nº 15: a) $v = l\dot{\phi}u_1,\quad a = \left(r\dot{\phi}^2 + l\ddot{\phi}\right)u_1 + l\dot{\phi}^2 u_2$

b) $r\dot{\phi}^2 + l\ddot{\phi} = -gsen\theta$

c) P=**T**.**v**=0 (**T** es la tensión del hilo y **v** la velocidad de la partícula) debido a que u_1 y u_2 son perpendiculares.

d) $\phi_O = -\pi/2$