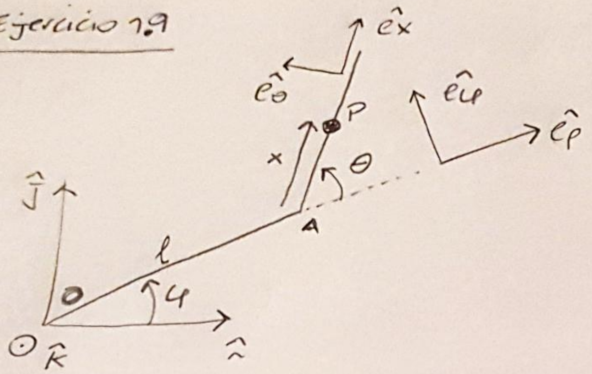
Ejercicio 7.9



$S = \{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ sistema absoluto

a) Comenzamos por escribir la posición de la partícula vista desde el sistema abs:

$\vec{r} = P - O$;

$= P - O + A - A = \underbrace{(P-A)}_{x\hat{e}_x} + \underbrace{(A-O)}_{l\hat{e}_\rho} = \boxed{x\hat{e}_x + l\hat{e}_\rho}$;

$\hat{e}_\rho = \hat{e}_\rho(\varphi)$: φ está medido con respecto al eje $\hat{i}$ (fijo) ; idem: $\hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi(\varphi)$

$\hat{e}_x = \hat{e}_x(\theta, \varphi)$: θ mide el ángulo que forma $\hat{e}_x$ con $\hat{e}_\rho$, que a su vez es variable, por eso $\hat{e}_x$ depende de los dos ángulos (idem $\hat{e}_\theta$)

Para hallar $\vec{v}$ derivo $\vec{r}$:

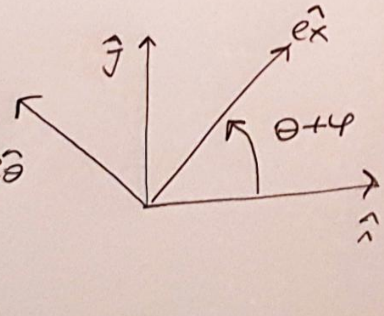
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{e}_x + x\dot{\hat{e}}_x + l\dot{\hat{e}}_\rho$;

$\dot{\hat{e}}_\rho = \underbrace{\frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi}}_{= \hat{e}_\varphi} \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$ ¿De qué otras formas puedo llegar a $\dot{\hat{e}}_\rho$?

(por ej. 7.8 Apuntes)

$\dot{\hat{e}}_x = \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_x}{\partial \theta}}_{\hat{e}_\theta} \dot{\theta} + \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_x}{\partial \varphi}}_{\hat{e}_\theta :} \dot{\varphi} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\hat{e}_\theta$ ¿Se podrá hacer de alguna forma alternativa usando 7.34 y Teo. Ad. Vel. Angulares?

observación →



la variación de $\hat{e}_x$ bajo un cambio diferencial de φ manteniendo θ = cte. es según $\hat{e}_\theta$:

$d\hat{e}_x = d\varphi\, \hat{e}_\theta$

luego:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\hat{e_x} + x(\dot\theta+\dot\varphi)\hat{e_\theta} + l\dot\varphi\hat{e_\varphi}}$$

Para la aceleración, derivo la velocidad:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}\hat{e_x} + \dot{x}\dot{\hat{e_x}} + \dot{x}(\dot\theta+\dot\varphi)\hat{e_\theta} + x(\ddot\theta+\ddot\varphi)\hat{e_\theta} + x(\dot\theta+\dot\varphi)\dot{\hat{e_\theta}}$$

$$+ l\ddot\varphi\hat{e_\varphi} + l\dot\varphi\dot{\hat{e_\varphi}};$$

Idem que $\hat{e_\rho}$: $\dot{\hat{e_\varphi}} = -\dot\varphi\hat{e_\rho}$

Idem que $\hat{e_x}$: $\dot{\hat{e_\theta}} = -(\dot\theta+\dot\varphi)\hat{e_x}$

Sustituyendo las derivadas de los versores en $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{e_x} + \dot{x}(\dot\theta+\dot\varphi)\hat{e_\theta} + \dot{x}(\dot\theta+\dot\varphi)\hat{e_\theta} + x(\ddot\theta+\ddot\varphi)\hat{e_\theta} - x(\dot\theta+\dot\varphi)^2\hat{e_x}$$

$$+ l\ddot\varphi\hat{e_\varphi} - l\dot\varphi^2\hat{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left[\ddot{x} - x(\dot\theta+\dot\varphi)^2\right]\hat{e_x} + \left[2\dot{x}(\dot\theta+\dot\varphi) + x(\ddot\theta+\ddot\varphi)\right]\hat{e_\theta} - l\dot\varphi^2\hat{e_\rho} + l\ddot\varphi\hat{e_\varphi}}$$

Obs: Note que tanto $\vec{r}$ como $\vec{v}, \vec{a}$ representan una cantidad que ves desde el sistema absoluto S pero en ningún caso expresamos alguna cantidad en los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ de cartesianas del mismo; nos resultó mucho más claro dejarlos expresados en bases móviles $(\{\hat{e_\rho}, \hat{e_\varphi}\}, \{\hat{e_x}, \hat{e_\theta}\})$

b) Puedo calcular todo lo anterior usando Teo. de Roverbal y Teo. Coriolis resp.:

$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_T}$, donde $\vec{v_T} = \vec{v_{0'}} + \vec{\omega}\times\vec{r'}$ (velocidad de transporte)

$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_C}$, siendo $\vec{a_T} = \vec{a_{0'}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'})$ (aceleración transporte)

$\vec{a_C} = 2\vec{\omega}\times\vec{v'}$ (aceleración de Coriolis)

- Comencemos por aplicar el Teo. de Roverbal para hallar la velocidad absoluta; para ello, fijemos un posible sistema relativo:

$S' = \{A, \hat{e_x}, \hat{e_\theta}, \hat{k}\}$ cuya velocidad angular con respecto al sistema absoluto es $\vec{\omega} = (\dot\theta+\dot\varphi)\hat{k}$

↳ estoy parado en la barra AB

(puedo ver que $\vec{\omega}$ de S' respecto de S es así sabiendo que el ángulo que forma $\hat{e}_x$ es $(\theta+\varphi)$ con respecto a una dirección fija)

Para aplicar el Teorema tenemos que:

$O' = A : \vec{v}_{O'} = \vec{v}_A = l\dot{\varphi}\hat{e}_{\varphi}$ ¿de dónde saldrá?

$\vec{r}' = P - A = x\hat{e}_x$ (posición relativa)

$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt}$, derivada relativa de $\vec{r}'$, donde consideramos S' ($\leftrightarrow$ sus versores) fijo en esa operación

$\vec{v}' = \dot{x}\hat{e}_x + x\frac{d'\hat{e}_x}{dt}$ $= 0$: $\hat{e}_x$ está fijo en esta operación

$\boxed{\vec{v}' = \dot{x}\hat{e}_x}$ (desde AB sólo veo un mov. unidimensional)

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + l\dot{\varphi}\hat{e}_{\varphi} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}'} = \boxed{\dot{x}\hat{e}_x + x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{e}_{\theta} + l\dot{\varphi}\hat{e}_{\varphi}}$$

$$(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{k}\times(x\hat{e}_x) = x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\underbrace{\hat{k}\times\hat{e}_x}_{\hat{e}_{\theta}} = x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{e}_{\theta}$$

• Veamos ahora el Teo. de Coriolis para la aceleración absoluta:

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \boxed{\ddot{x}\hat{e}_x}$$

$$\vec{a}_A = -l\dot{\varphi}^2\hat{e}_{\rho} + l\ddot{\varphi}\hat{e}_{\varphi}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d}{dt}\left[(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{k}\right] = (\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\hat{k} \; : \; \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' = (\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\hat{k}\times(x\hat{e}_x) = x(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\hat{e}_{\theta}$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{k}\times\left[(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{k}\times(x\hat{e}_x)\right] = x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\underbrace{\hat{k}\times(\underbrace{\hat{k}\times\hat{e}_x}_{\hat{e}_{\theta}})}$$

$$\hat{k}\times\hat{e}_{\theta} = -\hat{e}_x$$

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\hat{e}_x$ (✓ apunta hacia el eje de giro pasando por el origen)

$$2\vec{\omega}\times\vec{v}' = 2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{k}\times(\dot{x}\hat{e}_x) = 2\dot{x}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{e}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left[\ddot{x} - x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\right]\hat{e}_x + \left[x(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) + 2\dot{x}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right]\hat{e}_{\theta} - l\dot{\varphi}^2\hat{e}_{\rho} + l\ddot{\varphi}\hat{e}_{\varphi}$$

¿Cómo debería operar si elijo $S' = \{A, \hat{e}_{\rho}, \hat{e}_{\varphi}, \hat{k}\}$?

(me paro en OA con origen en A)