

# Apuntes de Mecánica Newtoniana

Ariel Fernández  
Daniel Marta

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería - Universidad de la República

# Índice general

<b>Contenidos</b>	<b>I</b>
<b>Prefacio</b>	<b>1</b>
<b>1. Cinemática de la partícula.</b>	<b>3</b>
1.1. Conceptos preliminares. . . . .	3
1.1.1. Posición, ley horaria y trayectoria. . . . .	3
1.1.2. Velocidad y aceleración instantánea. . . . .	4
1.2. Sistemas de coordenadas. . . . .	5
1.2.1. Coordenadas circulares cilíndricas. . . . .	5
1.2.2. Coordenadas polares esféricas. . . . .	8
1.2.3. Coordenadas intrínsecas. . . . .	9
1.3. Movimiento relativo. . . . .	12
1.3.1. Sistemas de referencia en rotación y traslación relativa. . . . .	12
1.3.2. Teorema de Roverbal. . . . .	16
1.3.3. Teorema de Coriolis. . . . .	18
1.3.4. Adición de velocidades angulares. . . . .	18
<b>2. Dinámica de la partícula.</b>	<b>21</b>
2.1. Leyes de Newton. . . . .	21
2.1.1. Fuerzas. . . . .	22
2.2. Sistemas vinculados. . . . .	25
2.2.1. Fuerza ejercida por una superficie . . . . .	26

2.2.2.	Fuerza ejercida por una guía . . . . .	26
2.2.3.	Fricción: leyes de Coulomb. . . . .	27
2.3.	Sistemas acelerados. . . . .	31
2.3.1.	Movimiento sobre la superficie de la Tierra. . . . .	32
<b>3.</b>	<b>Trabajo y Energía.</b>	<b>37</b>
3.1.	Trabajo y Potencia de una fuerza. . . . .	37
3.1.1.	Teorema del Trabajo y la Energía. . . . .	39
3.2.	Sistemas Conservativos. . . . .	39
3.2.1.	Peso. . . . .	41
3.2.2.	Fuerza elástica. . . . .	41
3.2.3.	Conservación de la Energía . . . . .	42
3.3.	Equilibrio y Estabilidad. . . . .	44
3.3.1.	Sistemas no conservativos preintegrables. . . . .	47
<b>4.</b>	<b>Movimiento Central.</b>	<b>49</b>
4.1.	Fuerzas Centrales. . . . .	49
4.2.	Fuerzas isotrópicas. . . . .	51
4.2.1.	Potencial efectivo. . . . .	52
4.2.2.	Leyes horarias. . . . .	53
4.3.	Ecuaciones de Binet. . . . .	54
4.4.	Movimiento Planetario. . . . .	55
4.4.1.	Problema de dos cuerpos. . . . .	55
4.4.2.	Fuerza gravitatoria. . . . .	56
4.4.3.	Leyes de Kepler. . . . .	59
<b>5.</b>	<b>Sistemas de Partículas.</b>	<b>63</b>
5.1.	Centro de masas de un sistema de partículas. . . . .	63
5.1.1.	Centros de masas parciales. . . . .	64
5.1.2.	Sistemas con distribución continua de masa. . . . .	65
5.1.3.	Simetrías. . . . .	65

5.2. Momento lineal de un sistema de partículas. Primera cardinal. . . . .	66
5.3. Momento angular de un sistema de partículas. Segunda cardinal. . . . .	68
5.3.1. Cambio de punto de aplicación de momentos. . . . .	69
5.4. Energía de un sistema de partículas. . . . .	70
5.4.1. Energía cinética. . . . .	70
5.4.2. Conservación de la energía. . . . .	71
<b>6. Cinemática del Rígido. . . . .</b>	<b>73</b>
6.1. Distribución de velocidades y aceleraciones. . . . .	74
6.2. Rodadura sin deslizamiento. . . . .	75
6.3. Movimiento Plano. . . . .	77
6.3.1. <i>Ejemplo: Disco rodando sin deslizar.</i> . . . . .	78
6.3.2. Centro instantáneo de rotación. . . . .	80
6.4. Ejemplos de movimiento del rígido en el espacio. . . . .	81
6.4.1. Placa cuadrada girando alrededor de un eje. . . . .	81
6.4.2. Esfera rodando sin deslizar. . . . .	82
6.5. Ángulos de Euler. . . . .	83
<b>7. Cinética del Rígido. . . . .</b>	<b>85</b>
7.1. Momento Angular de un Rígido. . . . .	85
7.2. Propiedades del Tensor de Inercia. . . . .	89
7.2.1. Cambio de base. . . . .	90
7.2.2. Ejes Principales. . . . .	91
7.2.3. Momentos de inercia de un rígido plano. . . . .	92
7.2.4. Simetrías. . . . .	94
7.2.5. Teorema de Steiner. . . . .	96
7.3. Energía cinética de un rígido. . . . .	98
<b>8. Dinámica del Rígido. . . . .</b>	<b>101</b>
8.1. Ecuaciones Cardinales. . . . .	101
8.2. Sistemas de Fuerzas Aplicadas. . . . .	103

8.2.1.	Sistemas Equivalentes. . . . .	103
8.2.2.	Reducción de un sistema de fuerzas aplicado sobre un rígido. .	105
8.2.3.	Potencia de un sistema de fuerzas sobre un rígido. . . . .	107
8.3.	Sistemas vinculados. . . . .	108
8.3.1.	Ejemplo - Placa apoyada en una recta. . . . .	108
8.4.	Estática del Rígido. . . . .	110
8.4.1.	Ejemplo - Barra y placa rectangular. . . . .	111
8.4.2.	Ejemplo - Escalera apoyada en una pared. . . . .	113
8.5.	Dinámica del Rígido en el Plano. . . . .	115
8.5.1.	Ejemplo - Placa apoyada en un plano inclinado. . . . .	115
8.5.2.	Disco y aro. . . . .	120
8.5.3.	Barra en el borde de una mesa. . . . .	121
8.6.	Dinámica del Rígido en el Espacio. . . . .	123
8.6.1.	Masas coplanares. . . . .	123
8.6.2.	Placa cuadrada girando alrededor de un eje. . . . .	124
8.6.3.	Trompo simétrico pesado. . . . .	126

# Prefacio

Las presentes notas están basadas en los apuntes de clase del Profesor Daniel Marta, de quien muchos seguimos aprendiendo. La publicación de las mismas no tiene por intención sustituir ningún buen libro de Mecánica, tan sólo pretende servir como material de apoyo para los estudiantes. En ese sentido, nos resultaría tremendamente útil saber la opinión del lector, escuchar las sugerencias y comentarios que ayuden a mejorar las notas.

*A.F.,  
Montevideo, 2010*



# Capítulo 1

## Cinemática de la partícula.

### Introducción.

En este capítulo se introducirán los elementos necesarios para la descripción del movimiento de una partícula en el espacio. Llamaremos partícula a cualquier objeto cuyas dimensiones características sean mucho menores que las distancias que recorre en su trayectoria, y lo representaremos mediante un punto.

### 1.1. Conceptos preliminares.

#### 1.1.1. Posición, ley horaria y trayectoria.

La *posición* de una partícula en un instante de tiempo  $t$  se describirá por un vector  $\vec{r}(t)$  que va del origen de coordenadas ( $O$ ) al punto ( $P$ ) que ocupa la partícula en dicho instante (ver figura 1.1):

$$\vec{r}(t) = P - O$$

Introduciendo un *sistema de coordenadas* podemos caracterizar a la posición mediante un conjunto de magnitudes bien definidas; en el caso de elegir un sistema cartesiano ortonormal, estas magnitudes ( $\{x, y, z\}$ ) corresponderán al producto escalar ( $\cdot$ ) del vector posición con los versores del sistema de coordenadas:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad x(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{i}, \quad \text{etc.}$$

Una descripción correcta del movimiento de la partícula en el espacio se da en términos de su *ley horaria*, es decir, el valor de las componentes del vector posición (en



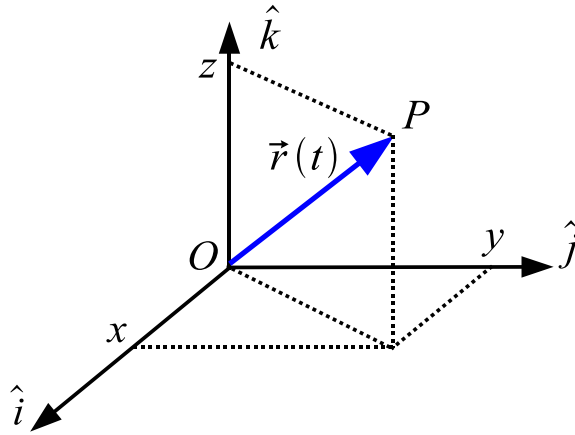


Figura 1.1: Vector posición en coordenadas cartesianas.

este caso  $\{x, y, z\}$  a cada tiempo  $t$ . Estas componentes dan de por sí una descripción paramétrica de la curva que recorrerá la partícula en su movimiento en el espacio; a esa curva se le llama *trayectoria* (ver figura 1.2) de la partícula.

### 1.1.2. Velocidad y aceleración instantánea.

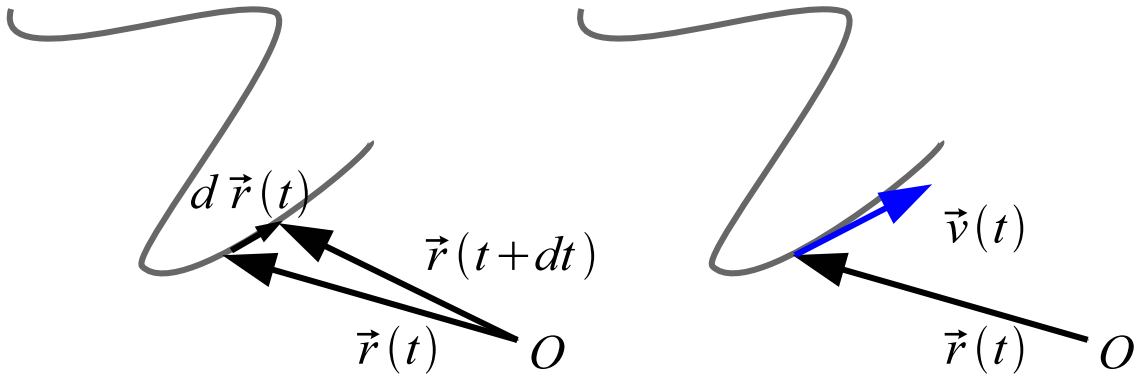


Figura 1.2: Velocidad instantánea de una partícula.

Consideremos la diferencia ( $d\vec{r}$ ) entre los vectores posición para dos instantes separados un tiempo infinitesimal  $dt$  (figura 1.2). Este vector es en primera aproximación, tangente a la trayectoria y su módulo corresponde a la distancia (infinitesimal) recorrida por la partícula en el tiempo  $dt$ . El cociente entre este vector y el tiempo  $dt$

(que corresponde a la derivada del vector posición) nos da la *velocidad instantánea* de la partícula:

$$(1.1) \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

que en coordenadas cartesianas toma esta forma:

$$(1.2) \quad \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

La *aceleración instantánea* de una partícula se define como:

$$(1.3) \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

que en coordenadas cartesianas es:

$$(1.4) \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

En las expresiones anteriores utilizamos la siguiente notación para las derivadas temporales:

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}, \quad \ddot{f} \equiv \frac{d^2f}{dt^2}$$

## 1.2. Sistemas de coordenadas.

### 1.2.1. Coordenadas circulares cilíndricas.

A pesar de que  $\{x, y, z\}$  es el conjunto estándar de coordenadas utilizado para la descripción del movimiento de una partícula, en muchas ocasiones resulta natural la utilización de otras coordenadas. Consideremos el caso de las *coordenadas circulares cilíndricas*  $\{\rho, \varphi, z\}$  (ver figura 1.3), que se vinculan con  $\{x, y, z\}$  de la siguiente forma:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

bajo las restricciones:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

Los versores  $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$  tienen las siguientes direcciones y sentidos: considerando una superficie cilíndrica de radio  $\rho$  y eje  $\hat{k}$  que pasa por  $O$  y el semiplano  $\varphi = cte.$  que pasa por  $\hat{k}$  (figura 1.3.a),  $\hat{e}_\rho$  es normal a la superficie cilíndrica, está contenido en el semiplano y apunta en el sentido creciente de  $\rho$ ;  $\hat{e}_\varphi$  es tangente a la superficie cilíndrica, perpendicular al semiplano y apunta en el sentido creciente del ángulo azimutal  $\varphi$ ; el tercer versor es el  $\hat{k}$  usual de coordenadas cartesianas. Estos versores forman una base ortonormal *directa*:

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{k}, \quad \hat{e}_\varphi \times \hat{k} = \hat{e}_\rho, \quad \hat{k} \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi$$

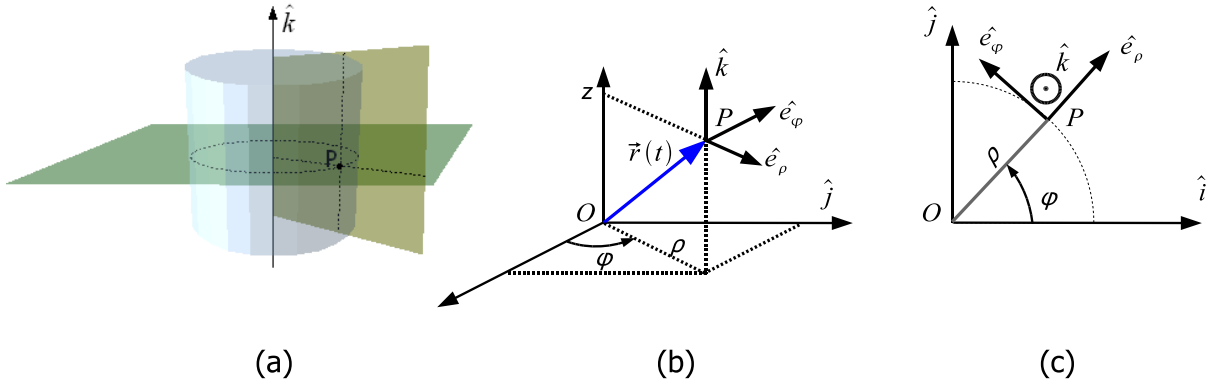


Figura 1.3: Coordenadas cilíndricas.

El vector posición se escribe en coordenadas cilíndricas como:

$$(1.6) \quad \vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k}$$

Observe que la dependencia de la posición con el ángulo  $\varphi$  aparece a través del versor  $\hat{e}_\rho = \hat{e}_\rho(\varphi)$ , cuya dirección depende de este ángulo; la base  $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$  es *móvil* ya que  $\hat{e}_\rho$  y  $\hat{e}_\varphi$  definen su dirección a partir del punto que estemos ubicando, es decir, los versores acompañan el movimiento del punto.

El vector velocidad se obtiene a partir de la derivada temporal de (1.6):

$$(1.7) \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{k} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \dot{z} \hat{k}$$

donde la última igualdad viene de la aplicación de la regla de la cadena para la derivación. Una construcción geométrica sencilla nos permite hallar el término en  $\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi}$ : consideremos la variación ( $d\hat{e}_\rho$ ) en el versor  $\hat{e}_\rho$  bajo una variación infinitesimal

del ángulo  $\varphi$  (ver figura 1.4). Este vector tiene la dirección y sentido de  $\hat{e}_\varphi$  y su módulo se puede aproximar por  $d\varphi$ , que corresponde al arco de una circunferencia de radio 1 (módulo de  $\hat{e}_\rho$ ) y ángulo al centro  $d\varphi$ . De esta forma:

$$(1.8) \quad d\hat{e}_\rho = d\varphi\hat{e}_\varphi \Rightarrow \frac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial\varphi} = \hat{e}_\varphi$$

y la velocidad resulta:

$$(1.9) \quad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{k}$$

La aceleración se obtiene derivando la expresión anterior con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}^2\frac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi} + \ddot{z}\hat{k}$$

Con una construcción análoga a la de la figura 1.4 podemos probar que:

$$(1.10) \quad \frac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\hat{e}_\rho$$

y la aceleración resulta:

$$(1.11) \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{k}$$

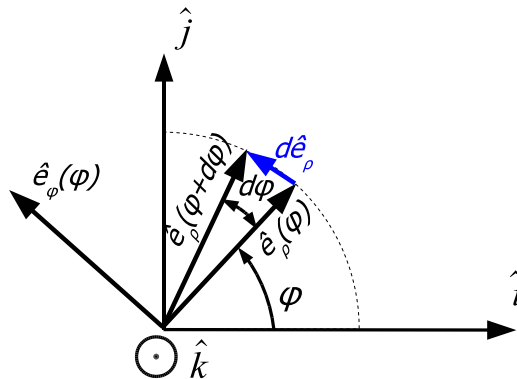


Figura 1.4: Derivada del versor  $\hat{e}_\rho$ .

### 1.2.2. Coordenadas polares esféricas.

En este caso,  $\{r, \theta, \varphi\}$  son las coordenadas que definirán la posición de la partícula y se vinculan con las coordenadas cartesianas así:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

bajo las restricciones:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Consideremos las siguientes superficies: una esfera de radio  $r$  centrada en  $O$ , el cono recto con eje en  $\hat{k}$  y vértice en  $O$  para el cual  $\theta = cte.$  y el semiplano  $\varphi = cte.$  que pasa por  $\hat{k}$  (ver figura 1.5.a). Los versores  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$  asociados a las *coordenadas polares esféricas* se hallan así:  $\hat{e}_r$  es normal a la esfera, tangente al cono, está contenido en el semiplano y apunta en el sentido creciente de  $r$ ;  $\hat{e}_\theta$  es tangente a la esfera, normal al cono, está contenido en el semiplano y apunta en el sentido creciente de  $\theta$ ;  $\hat{e}_\varphi$  es normal al semiplano y apunta en el sentido creciente de  $\varphi$ . Estos versores forman una base ortonormal directa.

El vector posición en coordenadas esféricas tiene esta forma sencilla:

$$(1.13) \quad \vec{r} = r \hat{e}_r$$

donde la dependencia angular aparece a través del versor  $\hat{e}_r = \hat{e}_r(\theta, \varphi)$ .

La velocidad de la partícula es:

$$(1.14) \quad \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} + r \dot{\varphi} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi}$$

El término  $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}$  se calcula siguiendo una construcción similar a la de la figura 1.4 (estamos considerando una variación infinitesimal  $d\theta$  manteniendo  $\varphi = cte.$ ):

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$$

Para calcular el segundo término del lado derecho de (1.14), a partir de la figura 1.5.c observe que los versores de coordenadas esféricas se pueden escribir en términos de los de cilíndricas así:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \hat{e}_r &= \operatorname{sen} \theta \hat{e}_\rho + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{e}_\theta &= \cos \theta \hat{e}_\rho - \operatorname{sen} \theta \hat{k} \end{aligned}$$

por lo que:

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = \text{sen}\theta \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = \text{sen}\theta \hat{e}_\varphi$$

y la velocidad resulta:

$$(1.16) \quad \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\varphi} \text{sen}\theta \hat{e}_\varphi$$

La aceleración por su parte resulta de derivar la anterior:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \vec{a} = & \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \left( \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \text{sen}\theta \hat{e}_\varphi \right) \\ & + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \left( \dot{\theta} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ & + \dot{r} \dot{\varphi} \text{sen}\theta \hat{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \text{sen}\theta \hat{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \text{cos}\theta \hat{e}_\varphi + r \dot{\varphi}^2 \text{sen}\theta \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

donde cabe notar que en el último término usamos que el versor  $\hat{e}_\varphi$  no depende del ángulo  $\theta$  (ya que está definido sólo en términos del semiplano  $\varphi = \text{cte.}$ ). El término  $\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi}$  lo tenemos calculado en (1.10):

$$\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{e}_\rho = -(\text{sen}\theta \hat{e}_r + \text{cos}\theta \hat{e}_\theta)$$

donde la última igualdad proviene de invertir las relaciones (1.15). Las derivadas de  $\hat{e}_\theta$  se calculan procediendo similarmente a lo hecho con  $\hat{e}_r$  y nos dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\hat{e}_r \\ \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \text{cos}\theta \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

Sustituyendo todas las derivadas anteriores en (1.17) y simplificando nos queda:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \vec{a} = & \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \text{sen}^2\theta \right) \hat{e}_r \\ & + \left( r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left( r \ddot{\varphi} \text{sen}\theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \text{sen}\theta + 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \text{cos}\theta \right) \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

### 1.2.3. Coordenadas intrínsecas.

Otro sistema de coordenadas útil, en especial cuando la trayectoria de la partícula está predeterminada (por ej., una cuenta moviéndose sobre un alambre), es

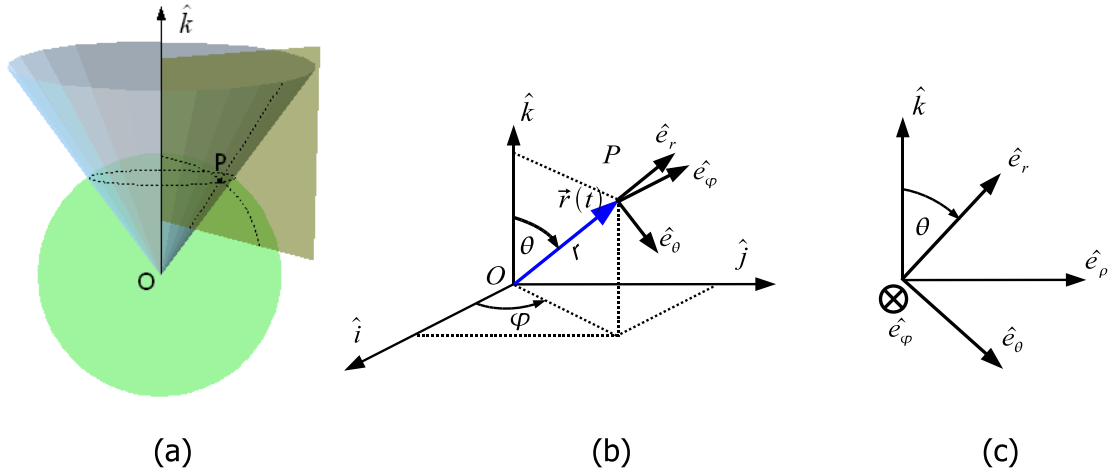


Figura 1.5: Coordenadas polares esféricas.

el *intrínseco* o curvilíneo, donde se describe el movimiento de una partícula a partir de una única coordenada  $s$  llamada *abscisa curvilínea*. Como ya dijimos en 1.1.1, la trayectoria de una partícula se puede dar en forma paramétrica especificando las componentes  $(x(t), y(t), z(t))$  del vector posición para cada tiempo. Consideremos ahora una variación  $d\vec{r}$  de la posición bajo una variación infinitesimal del tiempo ( $dt$ ), que de acuerdo a (1.1) es:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Dado un origen ( $O$ ) sobre la curva que describe la partícula (ver figura 1.6), la distancia recorrida  $s$  (con un signo definido de acuerdo al lado de  $O$  del que estemos) será nuestra abscisa curvilínea. El diferencial  $ds$  de la distancia recorrida por la partícula sobre su trayectoria durante  $dt$  es:

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \pm |\vec{v}|dt$$

de acuerdo a si se produce un incremento (+) o una disminución (−) en  $s$  durante  $dt$ .

### Versor tangente, normal y binormal.

Los versores asociados a las coordenadas intrínsecas forman el llamado *triedro de Frenet*  $\{\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}\}$ . Comencemos definiendo el versor *tangente*:

$$(1.19) \quad \hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

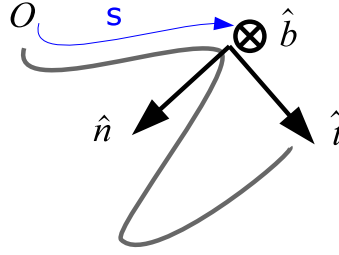


Figura 1.6: Coordenadas intrínsecas.

(observe que el módulo de  $d\vec{r}$  es  $ds$ ). La velocidad de la partícula se escribe en términos de este versor así:

$$(1.20) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s} \hat{t}$$

y resulta como cabía esperar, tangente a la trayectoria de la partícula.

**Nota: conservación de la norma.**

Observemos que para cualquier vector cuya norma se mantenga constante (tal es el caso del versor  $\hat{t}$ ), cualquier variación de este versor será ortogonal al mismo:

$$(1.21) \quad 0 = d(\hat{t} \cdot \hat{t}) = d\hat{t} \cdot \hat{t} + \hat{t} \cdot d\hat{t} \Rightarrow d\hat{t} \cdot \hat{t} = 0$$

Consideremos en particular una variación en  $\hat{t}$  bajo un incremento en  $s$ :  $\frac{d\hat{t}}{ds}$ . Usando que este nuevo vector es ortogonal a  $\hat{t}$  definimos el versor *normal*:

$$(1.22) \quad \hat{n} = \frac{1}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|} \frac{d\hat{t}}{ds}$$

que está dirigido hacia el *interior* de la curva. El término  $\frac{1}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|}$  recibe el nombre de *radio de curvatura* ( $\mathcal{R}$ ) y será mayor cuanto menor sea el cambio en la tangente de la curva respecto a la longitud.<sup>1</sup>

Finalmente, para completar el triedro de Frenet, definimos el versor *binormal*:

$$(1.23) \quad \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$$

<sup>1</sup>En el caso extremo de una recta,  $\mathcal{R} = \infty$ .



### Aceleración en intrínsecas.

Derivando (1.20) con respecto al tiempo, tenemos la aceleración en intrínsecas:

$$(1.24) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\hat{t})}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2 \frac{d\hat{t}}{ds} \stackrel{(1.22)}{=} \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\mathcal{R}}\hat{n}$$

El primer término de la aceleración corresponde al *cambio en el módulo* ( $\dot{s}$ ) de la velocidad sin cambio en la dirección, mientras que el segundo término corresponde al *cambio en la dirección* del vector velocidad sin cambio en el módulo del mismo; siempre que el radio de curvatura sea finito, la partícula experimentará una aceleración (presente en el segundo término), *aún* cuando el módulo de su velocidad no cambie, tal como sucede por ejemplo, en el caso de un movimiento circular uniforme.

## 1.3. Movimiento relativo.

No podemos hablar de movimiento si no es en relación directa al *sistema de referencia* desde el cual estemos realizando nuestras observaciones. Es importante por ello que podamos vincular la velocidad y aceleración de una partícula vistas desde diferentes sistemas de referencia.

### 1.3.1. Sistemas de referencia en rotación y traslación relativa.

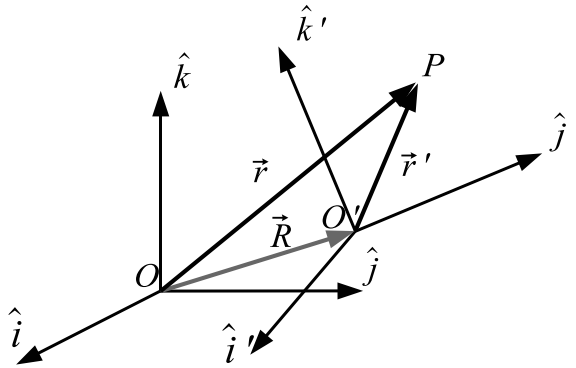


Figura 1.7: Sistemas de referencia absoluto  $S = \{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  y relativo  $S' = \{O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ .

Sean dos sistemas de referencia,  $S$  y  $S'$ , al primero de los cuales lo consideraremos como sistema fijo y lo llamaremos *sistema absoluto* y al segundo como móvil

y lo llamaremos *sistema de transporte*. El movimiento de  $S'$  respecto de  $S$  estará caracterizado, por un lado, por el cambio en la posición del origen de coordenadas  $O'$  (*traslación*) y por otro, por el cambio de orientación de los ejes de la base del sistema móvil  $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$  respecto de los ejes del sistema fijo  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  (*rotación*) (ver figura 1.7). Consideremos un vector arbitrario  $\vec{A}$  que escribiremos en términos de sus componentes (cartesianas) en uno y otro sistema:

$$(1.25) \quad \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$(1.26) \quad \vec{A} = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}'$$

En el sistema fijo  $S$ , la derivada temporal de este vector es (consideremos  $\vec{A}$  según la expresión (1.25)):

$$(1.27) \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x \hat{i} + \dot{A}_y \hat{j} + \dot{A}_z \hat{k}$$

Nótese que en (1.2) teníamos una expresión similar, al haber asumido (implícitamente en ese caso) que el sistema de referencia era fijo.

Por otro lado, si derivamos (1.26) tendremos:

$$(1.28) \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}'_x \hat{i}' + \dot{A}'_y \hat{j}' + \dot{A}'_z \hat{k}' + A'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

La primera parte de la expresión anterior (la que incluye las derivadas temporales de las componentes) tiene la misma forma que (1.27) y corresponde a la derivada de  $\vec{A}$  considerando los versores del sistema móvil como fijos. A esta derivada la llamaremos *derivada relativa*:

$$(1.29) \quad \frac{d'\vec{A}}{dt} = \dot{A}'_x \hat{i}' + \dot{A}'_y \hat{j}' + \dot{A}'_z \hat{k}'$$

Las ecuaciones (1.27) y (1.29) se pueden tomar como las definiciones para la derivada absoluta y relativa de un vector respectivamente. En el caso de magnitudes escalares, no existe distinción en el tipo de derivada. Combinando (1.28) y (1.29) podemos vincular las dos derivadas:

$$(1.30) \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + A'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Escribamos ahora las derivadas de los versores móviles en la base móvil propiamente:

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{i}'}{dt} &= a_{11} \hat{i}' + a_{12} \hat{j}' + a_{13} \hat{k}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= a_{21} \hat{i}' + a_{22} \hat{j}' + a_{23} \hat{k}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= a_{31} \hat{i}' + a_{32} \hat{j}' + a_{33} \hat{k}' \end{aligned}$$

donde tenemos, en principio, 9 coeficientes  $a_{ij}$  para hallar. Podemos reducir el número de incógnitas comenzando por derivar la relación de normalidad:

$$\hat{i}' \cdot \hat{i}' = 1$$

de la que obtenemos:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} \cdot \hat{i}' = 0$$

(que es un caso particular de la relación (1.21)). De la relación anterior y las correspondientes para  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  nos queda:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

Derivando ahora la relación de ortogonalidad:

$$\hat{i}' \cdot \hat{k}' = 0$$

tenemos:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} \cdot \hat{k}' = -\hat{i}' \cdot \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

De esta relación y otras dos análogas nos queda:

$$a_{31} = -a_{13}, \quad a_{12} = -a_{21}, \quad a_{23} = -a_{32}$$

De las relaciones anteriores entre los coeficientes, resulta que de los 9 originales presentes en (1.31) alcanza con especificar  $a_{12}$ ,  $a_{23}$  y  $a_{31}$  para que los otros 6 queden determinados. La expresión (1.31) se escribe entonces:

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{i}'}{dt} &= a_{12}\hat{j}' - a_{31}\hat{k}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= -a_{12}\hat{i}' + a_{23}\hat{k}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= a_{31}\hat{i}' - a_{23}\hat{j}' \end{aligned}$$

Definimos ahora el vector **velocidad angular**  $\vec{\omega}$  como aquel que tiene por componentes en la base móvil:

$$(1.33) \quad \omega'_x = a_{23}, \quad \omega'_y = a_{31}, \quad \omega'_z = a_{12}$$

y la expresión (1.32) se reescribe así:

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{i}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{i}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{j}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{k}' \end{aligned}$$

Insertando las relaciones anteriores en (1.30) nos queda:

$$(1.35) \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + A'_x\vec{\omega} \times \hat{i}' + A'_y\vec{\omega} \times \hat{j}' + A'_z\vec{\omega} \times \hat{k}' = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Esta relación entre las derivadas temporales absoluta y relativa nos dice que la derivada absoluta de un vector arbitrario tiene dos contribuciones: la derivada en el sistema de transporte más la derivada absoluta que tendría de estar en reposo en el sistema de transporte.

### Observación:

De acuerdo a (1.35), para cualquier vector paralelo a la velocidad angular de  $S'$  respecto a  $S$  ( $\vec{\omega}$ ), las derivadas absoluta y relativa coinciden. En particular, esto vale para la velocidad angular:

$$(1.36) \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

y utilizaremos sin ambigüedad  $\dot{\vec{\omega}}$  para denotar cualquiera de las dos.

### Ejemplo.-

Consideremos un caso sencillo de movimiento relativo, donde los orígenes  $O$  y  $O'$  así como los ejes  $\hat{k}$  y  $\hat{k}'$  coinciden entre sí (figura 1.8). A un tiempo dado, el ángulo que forman entre sí los versores  $\hat{i}$  e  $\hat{i}'$  es  $\phi$ . Procediendo análogamente a lo trabajado en coordenadas cilíndricas y esféricas podemos probar que las derivadas de los versores móviles son:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}'}{dt} &= \dot{\phi}\hat{j}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= -\dot{\phi}\hat{i}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

y la velocidad angular tiene entonces por componentes:

$$\omega'_x = 0, \quad \omega'_y = 0, \quad \omega'_z = \dot{\phi}$$

es decir:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k}$$

El vector velocidad angular del sistema es un vector cuyo módulo corresponde a la tasa de cambio del ángulo  $\phi$  y está dirigido a lo largo del eje  $\hat{k}$  y con su sentido respetando la regla de la mano derecha del giro del sistema  $S'$ .

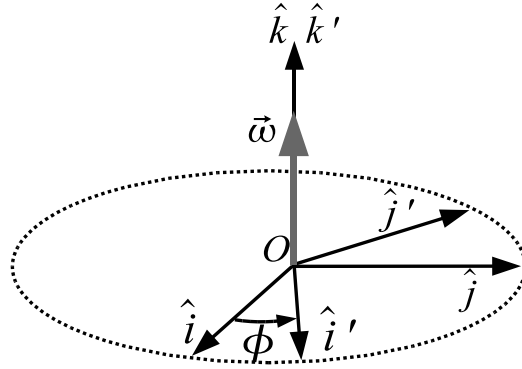


Figura 1.8: Caso simple para la determinación de la velocidad angular de un sistema de transporte.

### Interpretación de la velocidad angular.

Sea  $\vec{B}$  un vector constante en el sistema de transporte  $S'$ , por lo que claramente, su derivada relativa es cero. La fórmula (1.35) se reduce entonces a:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}$$

El vector diferencia:  $d\vec{B} = \vec{B}(t + dt) - \vec{B}(t)$  tiene entonces por módulo  $\omega dt B \sin\theta$  (figura 1.9) y está dirigido tangencialmente a una circunferencia de radio  $|\vec{B}| \sin\theta$  cuyo plano es perpendicular al vector  $\omega$ . Un vector como  $\vec{B}$ , en reposo en el sistema móvil, se comporta como si instantáneamente rotase alrededor del eje  $OQ$  (que tiene la dirección de  $\omega$ ) siguiendo el sentido de giro que se corresponde positivamente a través de la regla de la mano derecha con  $\omega$ .

### 1.3.2. Teorema de Roverbal.

Apliquemos las deducciones anteriores para hallar la velocidad de una partícula  $P$  (ver figura 1.7). Sea  $\vec{r}$  la posición absoluta de la partícula y  $\vec{r}'$  la relativa; se tiene que:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

que derivada con respecto al tiempo nos da la velocidad de  $P$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

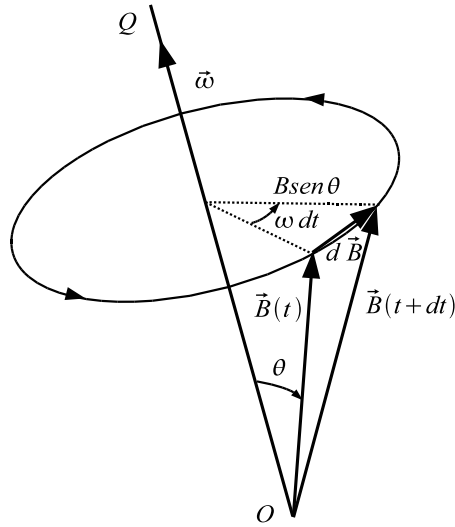


Figura 1.9: Interpretación del vector velocidad angular.

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior es la velocidad absoluta ( $v_{\vec{O}'}$ ) del origen del sistema  $S'$ . Para el segundo término, apliquemos (1.35):

$$\vec{v} = v_{\vec{O}'} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = v_{\vec{O}'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

donde definimos la *velocidad relativa*  $\vec{v}'$  de la partícula. Los términos restantes del lado derecho de la ecuación conforman lo que se llama *velocidad de transporte*  $\vec{v}_T$  de la partícula:

$$\vec{v}_T = v_{\vec{O}'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

con lo que la velocidad absoluta de la partícula resulta (**Teorema de Roverbal**):

$$(1.37) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_T \\ \vec{v}' &= \frac{d'\vec{r}'}{dt} \\ \vec{v}_T &= v_{\vec{O}'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

La velocidad absoluta de una partícula es entonces la velocidad que tiene por moverse en relación al sistema móvil más la velocidad que adquiriría tan sólo por permanecer en reposo con respecto al sistema móvil, de allí el término de *transporte*.

### 1.3.3. Teorema de Coriolis.

Para hallar la aceleración absoluta de la partícula, procedamos a derivar (1.37):

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{dv_{\vec{O}'}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
 &\stackrel{(1.35)}{=} \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + a_{\vec{O}'} + \frac{d'}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
 &= \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + a_{\vec{O}'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
 &= \frac{d'\vec{v}'}{dt} + a_{\vec{O}'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.38) \quad \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \\
 \vec{a}' &= \frac{d'\vec{v}'}{dt} \\
 \vec{a}_T &= a_{\vec{O}'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
 \vec{a}_C &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}'
 \end{aligned}$$

La fórmula (1.38) de relacionamiento de las aceleraciones entre los sistemas de referencia móvil y fijo constituye el llamado **Teorema de Coriolis**. El término  $\vec{a}'$  es la aceleración de la partícula *relativa* al sistema móvil, el término  $\vec{a}_T$  es la *aceleración de transporte* (adquirida tan sólo con estar en reposo con respecto al sistema móvil) y  $\vec{a}_C$  la *aceleración de Coriolis* presente sólo en el caso de movimiento de la partícula relativo al sistema móvil. Dentro de los términos que conforman la aceleración de transporte cabe destacar (ver figura 1.10) un término de *aceleración centrípeta*, ya que podemos verificar fácilmente que  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  apunta perpendicular y hacia el eje de rotación del sistema móvil.

### 1.3.4. Adición de velocidades angulares.

Para concluir el estudio del movimiento relativo entre sistemas de referencia trataremos un problema cuya solución nos será muy útil al estudiar el movimiento de los cuerpos rígidos. Consideremos tres sistemas de referencia  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , el primero de ellos fijo y los otros con movimiento relativo al fijo y entre sí. Sea  $\vec{\omega}_{10}$  la velocidad angular de  $S_1$  relativa a  $S_0$  y  $\vec{\omega}_{21}$  la de  $S_2$  relativa a  $S_1$ . El problema que queremos resolver es cómo relacionar la velocidad angular de  $S_2$  relativa a  $S_0$  con las anteriores. A fin de adoptar una notación clara, en lugar de utilizar ' para diferenciar

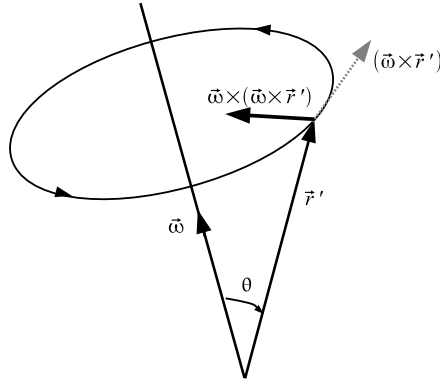


Figura 1.10: Aceleración centrípeta.

las derivadas, pondremos un superíndice para indicar el sistema en el cual estamos operando; de esta forma, la generalización de (1.35) es:

$$(1.39) \quad \frac{d^{(0)}\vec{A}}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{A}$$

$$(1.40) \quad \frac{d^{(1)}\vec{A}}{dt} = \frac{d^{(2)}\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{A}$$

Tomemos un vector en reposo en el sistema  $S_2$ , de manera que (1.40) se simplifique a:

$$\frac{d^{(1)}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_{21} \times \vec{A}$$

que al sustituir en (1.39) nos da:

$$\frac{d^{(0)}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_{21} \times \vec{A} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{A} = (\vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}) \times \vec{A}$$

Considerando sólo el movimiento de  $S_2$  relativo a  $S_0$ , la derivada en  $S_0$  de un vector en reposo en  $S_2$  sería:

$$\frac{d^{(0)}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_{20} \times \vec{A}$$

que comparada con la expresión que le precede nos permite concluir ( $\vec{A}$  es arbitrario):

$$(1.41) \quad \vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}$$

lo que constituye el llamado **Teorema de Adición de Velocidades Angulares**.





# Capítulo 2

## Dinámica de la partícula.

### 2.1. Leyes de Newton.

- **Primera Ley** (*Principio de Inercia*): Existen ciertos sistemas de referencia con respecto a los cuales el movimiento de un objeto libre de fuerzas externas es rectilíneo con velocidad constante.

A estos sistemas de referencia se les llama *sistemas inerciales*.

- **Segunda Ley**: En los sistemas de referencia inerciales se cumple

$$(2.1) \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

siendo  $\vec{F}$  la *fuerza* neta que actúa sobre una partícula y  $\vec{p}$  la *cantidad de movimiento* de la misma:

$$(2.2) \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

Si la masa de la partícula es constante, podemos expresar la segunda ley de Newton en esta forma:

$$(2.3) \quad \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

- **Tercera Ley** (*Principio de Acción y Reacción*): Si un cuerpo  $A$  ejerce sobre un cuerpo  $B$  una fuerza  $\vec{F}_{AB}$ , entonces el cuerpo  $B$  ejerce sobre el  $A$  una fuerza  $\vec{F}_{BA}$  igual y contraria:  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ .

### 2.1.1. Fuerzas.

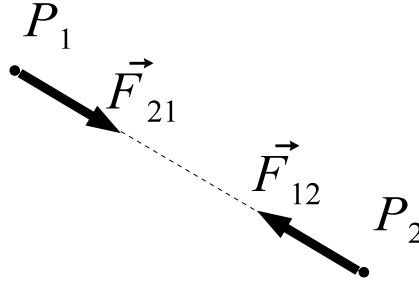
La segunda ley de Newton (2.3) es una definición de la fuerza en términos de la masa del cuerpo sobre el que actúa y de la aceleración del mismo, sin especificar la naturaleza de esta fuerza. Algunas de las fuerzas fundamentales con las que trabajamos en este curso son:

#### *Fuerza gravitatoria*

La *ley de gravitación de Newton* establece que la fuerza  $\vec{F}_{12}$  ejercida por un cuerpo  $P_1$  de masa  $m_1$  sobre un cuerpo  $P_2$  de masa  $m_2$  está dada por:

$$(2.4) \quad \vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|P_2 - P_1|^2} \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal:  $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ . Por lo pequeña de esta constante, la fuerza gravitatoria es apreciable en la medida en que al menos uno de los cuerpos que interviene sea de gran masa.



Si consideramos por ejemplo, un objeto de masa  $m$  en la proximidad de la superficie terrestre, la magnitud de la fuerza gravitatoria que experimenta es:

$$F = \frac{GM_T}{R_T^2} m = mg, \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9,8m/s^2$$

donde definimos la aceleración de la gravedad  $g$  a partir de la masa  $M_T$  y el radio  $R_T$  de la Tierra.

#### *Fuerza de Lorentz*

Una partícula de carga  $q$  experimenta, en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{B}$  una fuerza dada por la *ley de Lorentz*:

$$(2.5) \quad \vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula.

**Ejemplo.-Campo magnético uniforme y línea de carga**

Consideremos el caso (*Primer Parcial 2009*) de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  que está sometida a la acción de un campo magnético uniforme: ( $\vec{B} = B\hat{k}$ ) y a la del campo eléctrico de una distribución de carga lineal y uniforme a lo largo del eje  $\hat{k}$ :  $\vec{E} = E_0 \frac{a}{\rho} \hat{e}_\rho$ , siendo  $\rho, \varphi, z$  las coordenadas cilíndricas y  $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{k}$  sus versores asociados. Para este caso, expresando la velocidad de la partícula en coordenadas cilíndricas (1.9), la fuerza de Lorentz resulta:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q \left[ E_0 \frac{a}{\rho} \hat{e}_\rho + (\dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{k}) \times B \hat{k} \right] \\ &= q \left( E_0 \frac{a}{\rho} + \rho \dot{\varphi} B \right) \hat{e}_\rho - q \dot{\rho} B \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

A partir de la segunda ley de Newton (2.3) proyectada según cada versor de coordenadas cilíndricas tenemos:

$$(2.6) \quad q \left( E_0 \frac{a}{\rho} + \rho \dot{\varphi} B \right) = m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)$$

$$(2.7) \quad -q \dot{\rho} B = m (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi})$$

$$(2.8) \quad 0 = \ddot{z}$$

que constituyen lo que llamamos *ecuaciones de movimiento* del sistema, un conjunto de ecuaciones diferenciales (acopladas en este caso) cuya solución corresponde a la ley horaria  $\rho(t), \varphi(t), z(t)$ .

Otras fuerzas con las que habitualmente nos encontramos tienen, a pesar de su origen electromagnético, leyes que las expresan en términos de cantidades medibles ligadas a los objetos macroscópicos que ejercen estas fuerzas. Entre estas fuerzas están las ejercidas por una superficie rugosa (que reservamos para una sección posterior), un resorte, una cuerda o un medio viscoso.

**Fuerza elástica**

Un resorte ideal ejerce una fuerza proporcional a su estiramiento (consideremos la fuerza ejercida sobre  $P$ ):

$$(2.9) \quad \vec{F} = -k (\ell - \ell_0) \frac{P - O}{|P - O|} = -k (\ell - \ell_0) \hat{u}$$

siendo  $\ell = |P - O|$  la longitud,  $\ell_0$  la longitud natural y  $k$  la constante elástica del resorte (definida positiva). En el caso en que el resorte sea de longitud natural nula,

la fuerza elástica toma una forma más simple:

$$(2.10) \quad \vec{F} = -k(P - O)$$

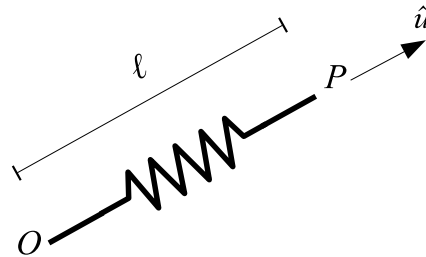


Figura 2.1: Resorte ideal.

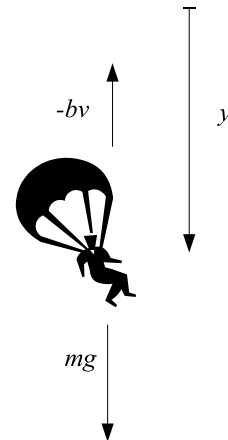
### *Fuerzas viscosas*

Un cuerpo sumergido en un fluido (aire por ejemplo) experimenta una fuerza que depende de la velocidad relativa a este medio y tiene sentido contrario a la misma. En los casos en que la magnitud de esta fuerza es proporcional a la velocidad tenemos:

$$(2.11) \quad \vec{F} = -b\vec{v}$$

### *Ejemplo.-Paracaidista*

Un caso sencillo de movimiento unidimensional donde aparecen algunas de las fuerzas mencionadas anteriormente es el de un paracaidista sometido a la acción de la gravedad y de la fuerza viscosa ejercida por el aire.



La segunda ley (2.3) se escribe como:

$$-bj + mg = m\ddot{y}$$

que resulta en la ecuación de movimiento del sistema. Considerando  $v = \dot{y}$ , la ecuación (2.1.1) se transforma en una ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = g$$

La solución general a la ecuación anterior es la suma de la solución de la homogénea:

$$v_H(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t}$$

y la solución particular:

$$v_P(t) = \frac{mg}{b}$$

$$v(t) = v_H(t) + v_P(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$$

Imponiendo ahora la condición inicial:  $v(0) = v_0$  podemos hallar la constante libre  $A$ , de forma que:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$$

Podemos finalmente hallar la ley horaria del sistema integrando en el tiempo la velocidad:

$$y(t) = \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) + \frac{mg}{b}t + y_0$$

## 2.2. Sistemas vinculados.

En un gran número de problemas de mecánica no nos vamos a encontrar con situaciones como las de los ejemplos anteriores, donde las coordenadas de la partícula son independientes entre sí, sino que trabajaremos con sistemas sujetos a *vínculos*: un bloque moviéndose sobre una superficie rugosa, una partícula obligada a desplazarse sobre una guía, etc. Estos vínculos, expresables en muchos casos mediante ecuaciones que involucran a las coordenadas de la partícula, reducen por un lado los *grados de libertad* del problema pero introducen también fuerzas vinculares o *reactivas* cuya forma no es conocida (no tienen una ley asociada, como es el caso de la fuerza gravitatoria, eléctrica o elástica, que entran en la categoría de fuerzas *activas*) sin conocer el estado de movimiento del sistema.

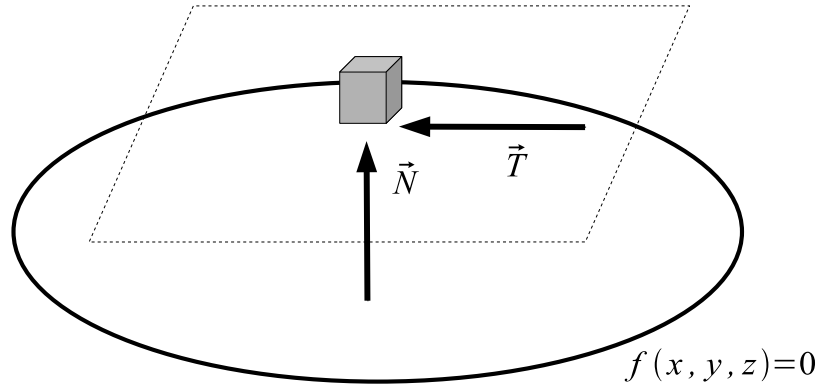


Figura 2.2: Bloque sobre superficie rugosa. En punteado, el plano tangente a la superficie por la partícula.

### 2.2.1. Fuerza ejercida por una superficie

Consideremos el caso de la figura 2.2 donde un bloque se mueve apoyado sobre una superficie rugosa, la cual se puede describir mediante la ecuación:

$$f(x, y, z) = 0$$

Las tres coordenadas cartesianas necesarias a priori para ubicar al bloque en el espacio están ahora restringidas mediante el vínculo anterior, lo que nos deja un sistema con dos grados de libertad. Por otro lado, esta restricción implica incorporar una fuerza ejercida por la superficie sobre la partícula, la cual podemos escribir en términos de su componente *normal* a la superficie ( $\vec{N}$ ) y su componente *tangencial* ( $\vec{T}$ ), esta última debida al rozamiento entre la superficie y la partícula y contenida en el plano tangente a la superficie por el punto de contacto con la partícula (cuando trabajemos con una superficie *lisa*, la componente tangencial no estará presente). Si la reacción normal ejercida por la superficie es tal que no puede evitar que la partícula pierda contacto con la superficie (es decir, la normal sólo se puede ejercer desde la superficie hacia la partícula) estaremos hablando de un *vínculo unilateral*. Si en cambio la superficie restringe a la partícula a permanecer en contacto con ella hablamos de un *vínculo bilateral*.

### 2.2.2. Fuerza ejercida por una guía

Consideremos una partícula enhebrada en una guía (figura 2.3). La reacción ejercida por la guía sobre la partícula se puede escribir en términos de una componente tangencial  $\vec{T}$  a la guía y una componente normal  $\vec{N}$ . En este caso, mientras la

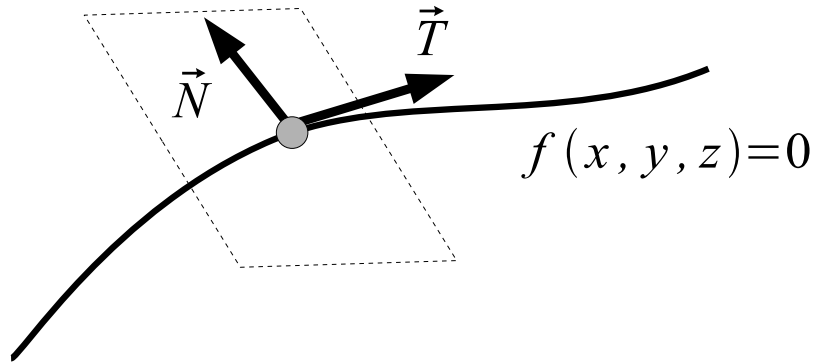


Figura 2.3: Partícula enhebrada en una guía rugosa. En punteado, el plano normal a la guía por la partícula.

reacción tangencial tiene la dirección de la tangente a la curva por la partícula, de la reacción normal sólo sabemos que está contenida en el plano normal a la curva pero no podemos conocer de antemano qué dirección tiene sobre ese plano.

### 2.2.3. Fricción: leyes de Coulomb.

La relación entre las componentes normal y tangencial de la reacción ejercida por una superficie o una guía está establecida mediante dos leyes (empíricas) conocidas como *leyes de Coulomb*:

- *Partícula en movimiento relativo*: consideremos una partícula con velocidad  $\vec{v}_R$  relativa a la superficie sobre la que está apoyada o la guía sobre la que está enhebrada. La **fuerza de fricción dinámica**  $\vec{T}$  ejercida sobre la partícula tiene sentido contrario a  $\vec{v}_R$  y es proporcional al módulo de la normal:

$$(2.12) \quad \vec{T} = -f_D \left| \vec{N} \right| \frac{\vec{v}_R}{|\vec{v}_R|}$$

siendo  $f_D$  el coeficiente de rozamiento dinámico entre la partícula y la superficie o guía.

- *Partícula en reposo relativo*: la **fuerza de fricción estática** ejercida por una superficie o guía rugosa sobre una partícula en reposo relativo a ella está acotada en módulo de acuerdo a:

$$(2.13) \quad \left| \vec{T} \right| \leq f_E \left| \vec{N} \right|$$

donde  $f_E$  es el coeficiente de rozamiento estático entre la partícula y la superficie o guía.



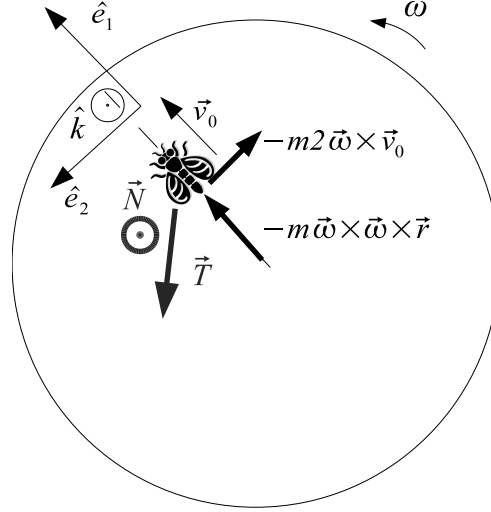
**Ejemplo.-Mosca sobre disco**

Figura 2.4: Mosca sobre disco

Una mosca de masa  $m$  comienza a caminar desde el centro  $O$  de un disco horizontal que gira con velocidad angular constante  $\omega$ . Se mueve siempre en dirección radial saliente y su velocidad relativa al disco es  $v_0$  constante. Si el coeficiente de rozamiento estático entre la mosca y el disco es  $f_E$ , determinemos a qué distancia  $r_{max}$  del centro del disco comenzará la mosca a deslizar.

En la base móvil  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}\}$  la aceleración de la mosca es

$$\vec{a} = \frac{d^2(r\hat{e}_1)}{dt^2} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{e}_1 + 2\omega\dot{r}\hat{e}_2 = -r\omega^2\hat{e}_1 + 2\omega v_0\hat{e}_2$$

A partir de la segunda ley de Newton tenemos

$$\vec{T} + (N - mg)\hat{k} = m(-r\omega^2\hat{e}_1 + 2\omega v_0\hat{e}_2)$$

es decir

$$\begin{aligned} N &= mg \\ \vec{T} &= m(-r\omega^2\hat{e}_1 + 2\omega v_0\hat{e}_2) \end{aligned}$$

y considerando la condición (2.13) para la fuerza de rozamiento estático:

$$|\vec{T}| \leq f_E |\vec{N}| \Rightarrow (r\omega^2)^2 + (2\omega v_0)^2 \leq (f_E g)^2$$

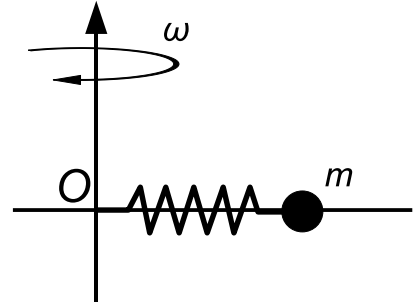
la máxima distancia al centro que alcanzará la mosca sin resbalar es:

$$r \leq r_{max} = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{(f_E g)^2 - (2\omega v_0)^2}$$

mientras se verifique  $f_E g \geq 2\omega v_0$  (en caso contrario, la mosca resbala desde el comienzo).

### **Ejemplo.-Masa sobre guía rugosa**

(examen diciembre 2008) Consideremos una guía rugosa, de coeficiente de frotamiento cinético  $f$ , que gira con velocidad angular  $\omega$  constante alrededor de un eje vertical fijo y perpendicular a ella que la corta en el punto  $O$ . Una partícula de masa  $m$  está obligada a moverse sobre la guía (vínculo bilateral) y sobre ella actúa un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural nula sujeto por su otro extremo al punto  $O$ .



Consideremos  $r$  la posición de la partícula medida desde  $O$  sobre guía y  $\{O, \hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{k}\}$  el sistema móvil (gira con velocidad angular  $\omega \hat{k}$ ) y directo sobre el que referiremos la solución. La aceleración de la masa  $m$  es:

$$\frac{d^2(r\hat{e}_r)}{dt^2} = (\ddot{r} - r\omega^2) \hat{e}_r + 2\omega\dot{r}\hat{e}_\phi$$

La segunda ley de Newton proyectada según  $\hat{e}_\phi$ ,  $\hat{e}_r$  y  $\hat{k}$  nos da respectivamente<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} 2m\omega\dot{r} &= N_1 \\ m(\ddot{r} - r\omega^2) &= -f\sqrt{N_1^2 + N_2^2} \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} - kr \\ 0 &= N_2 - mg \end{aligned}$$

Donde  $N_1$  y  $N_2$  son las componentes de la reacción normal de la guía. Si ahora consideramos el sistema en ausencia del peso, la reacción normal sólo estará dirigida según  $\hat{e}_\phi$  ( $N_2 = 0$ ) y las ecuaciones anteriores se pueden simplificar a:

$$\begin{aligned} 2m\omega\dot{r} &= N_1 \\ m(\ddot{r} - r\omega^2) &= -f|N_1| \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} - kr \end{aligned}$$

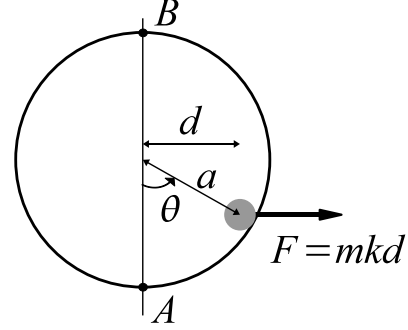
Eliminando  $|N_1|$  entre las ecuaciones anteriores nos queda la ecuación de movimiento:

$$\ddot{r} + 2f\omega\dot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)r = 0$$

<sup>1</sup>mientras  $\dot{r} \neq 0$ , ya que si la partícula no se mueve con respecto a la guía, actúa la fricción estática.

**Ejemplo.-Partícula en el interior de un aro (parte I).**

(examen febrero 2010) Una partícula  $P$  de masa  $m$  se mueve en el interior de un aro vertical fijo liso de radio  $a$  (vínculo unilateral), sometido a la acción de su peso y una fuerza  $F$  horizontal repulsiva que vale  $mkd$  siendo  $d$  la distancia de  $P$  al diámetro vertical del aro.



La segunda ley de Newton proyectada según las direcciones tangente y normal a la guía nos da:

$$(2.14) \quad ma\ddot{\theta} = -mg\text{sen}\theta + mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta$$

$$(2.15) \quad ma\dot{\theta}^2 = N - mg\text{cos}\theta - mk\text{asen}^2\theta$$

donde  $N$  es la reacción del aro sobre la partícula (la normal tiene sentido radial entrante). La primera de las ecuaciones anteriores sólo involucra a la coordenada  $\theta$  y sus derivadas y se trata por lo tanto de la ecuación de movimiento del sistema. Vamos ahora a *preintegrar* esta ecuación: comenzamos por multiplicar la ecuación de movimiento por  $\dot{\theta}$ :

$$ma\dot{\theta}\ddot{\theta} + (mg\text{sen}\theta - mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta)\dot{\theta} = 0$$

El primer término de la ecuación anterior se puede identificar con la derivada temporal de  $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2$ :

$$ma\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + (mg\text{sen}\theta - mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta)\dot{\theta} = 0$$

Integrando ahora en el tiempo:

$$ma\int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) dt + \int_{t_0}^t (mg\text{sen}\theta - mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta)\dot{\theta} dt = 0$$

Podemos en el segundo término pasar a integrar en el ángulo  $\theta$ :

$$ma\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2\right) + \int_{\theta_0}^{\theta} (mg\text{sen}\theta - mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta) d\theta = 0$$

Lo que nos da:

$$ma\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2\right) + mg(\text{cos}\theta_0 - \text{cos}\theta) + \frac{1}{2}mka(\text{sen}^2\theta_0 - \text{sen}^2\theta) = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$(2.16) \quad \frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - \frac{1}{2}mkasen^2\theta = \frac{1}{2}ma\dot{\theta}_0^2 - mg\cos\theta_0 - \frac{1}{2}mkasen^2\theta_0$$

Estudiemos ahora la condición para que la partícula, lanzada desde el punto  $A$  ( $\theta_0 = 0$ ) con velocidad  $v_0$ , alcance el punto  $B$ . Reordenando la última ecuación tenemos que (supongamos por simplicidad  $ka = g$  y usemos además que  $\dot{\theta}_0 = v_0/a$ ):

$$\frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + \frac{1}{2}mg\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}ma\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - mg$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior sólo puede ser positivo o cero; para que la partícula alcance el punto  $B$ , esta condición se debe cumplir en todo el recorrido:

$$\frac{v_0^2}{2a} + g\left(\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta + \cos\theta - 1\right) \geq 0, \forall\theta \in [0, \pi]$$

que se verifica para  $v_0^2 \geq 4ag$ . Como además se trata de un vínculo unilateral, la normal  $N$  sólo puede ser positiva o cero (en caso contrario, la partícula no permanece en contacto)

$$N = ma\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + mg\text{sen}^2\theta \geq 0, \forall\theta \in [0, \pi]$$

Introduciendo la expresión para  $\dot{\theta}^2$  nos queda:

$$\frac{v_0^2}{2a} + g\left(\text{sen}^2\theta + \frac{3}{2}\cos\theta - 1\right) \geq 0, \forall\theta \in [0, \pi]$$

que se verifica para  $v_0^2 \geq 5ag$ , que por ser más restrictiva que  $v_0^2 \geq 4ag$ , resulta ser la condición que debe obedecer  $v_0$  para que la partícula alcance el punto  $B$ .

## 2.3. Sistemas acelerados.

Consideremos dos sistemas  $S$  y  $S'$ , en el primero de los cuales vale la segunda ley de Newton. En  $S$  se verifica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Expresemos ahora la aceleración de la partícula en términos de la aceleración que se mide en el sistema relativo  $S'$  a partir del Teorema de Coriolis (1.38):

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C\right)$$

Reagrupando términos, la ecuación anterior se transforma en:

$$\vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}'$$

Es decir, incorporando dos nuevas *fuerzas ficticias*:  $\vec{F}_T = -m\vec{a}_T$  (fuerza de transporte),  $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C$  (fuerza de Coriolis) a las fuerzas reales -producto de la interacción de la partícula con otros cuerpos- las leyes del movimiento en el sistema acelerado son las mismas que desde cualquier sistema inercial:

$$\vec{F} + \vec{F}_T + \vec{F}_C = m\vec{a}'$$

Es importante notar que las fuerzas ficticias que acabamos de introducir no son fuerzas en sí ya que no surgen de la interacción de la partícula con otros cuerpos; en particular, las fuerzas ficticias no verifican el principio de acción y reacción. Surgen únicamente a partir de una manipulación cinemática que permite plantear la segunda ley de Newton desde sistemas no inerciales.

Identifiquemos ahora estas fuerzas para el problema de la mosca sobre un disco de la sección anterior. En la figura 2.4 están señaladas las fuerzas ficticias actuando sobre la mosca si tratamos el problema desde un sistema solidario al disco. Con respecto a ese sistema la mosca no está acelerada, por lo que se verifica:

$$\vec{F} + \vec{F}_T + \vec{F}_C = \vec{T} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m2\vec{\omega} \times \vec{v}_0 = 0$$

Visto desde el sistema acelerado, podemos decir que la fuerza de rozamiento estático balancea a la resultante de las fuerzas ficticias, manteniendo (mientras puede) el movimiento prescripto para la mosca.

### 2.3.1. Movimiento sobre la superficie de la Tierra.

En una gran parte de las aplicaciones de la mecánica consideramos a la Tierra como un sistema de referencia inercial. Se trata sin embargo de un sistema acelerado, debido fundamentalmente a la rotación que experimenta alrededor de su eje polar y para algunas aplicaciones de la mecánica (como la dinámica de fluidos atmosféricos) debe tomarse en cuenta este efecto.

Consideremos una partícula sometida a la fuerza del peso ( $m\vec{g}$ ) y a otras fuerzas ( $\vec{F}$ ). La segunda ley de Newton desde un sistema inercial (que consideraremos con origen en el centro de la Tierra) es:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{F} + m(\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) - m2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

El segundo término de la última igualdad sólo depende de la posición y es proporcional a la masa. Definimos entonces una *gravedad efectiva*:

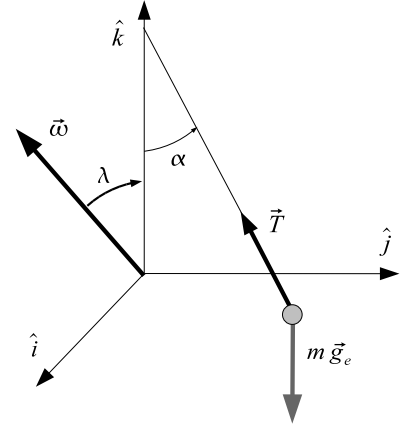
$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Veamos la magnitud de la corrección  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  a la aceleración de la gravedad en el ecuador; considerando como  $24hs$  el período de rotación y  $R_T \approx 6000km$  el radio de la Tierra:  $|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 R_T \approx 10^{-2} m/s^2$ , que resulta en una corrección 3 órdenes de magnitud por debajo del valor de la aceleración de la gravedad.

### Péndulo de Foucault.

Para ver la influencia del término de aceleración de Coriolis, consideremos un péndulo formado por una partícula de masa  $m$  sujeta por un hilo de largo  $\ell$  y masa despreciable a un punto fijo con respecto a la Tierra. Este punto tiene latitud  $\lambda$  medida desde el Polo Norte. La partícula estará sujeta a la aceleración gravitatoria efectiva  $\vec{g}$  y a la tensión ejercida por el hilo:

$$m\vec{a}' = \vec{T} + m\vec{g}_e - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$



Según los versores  $\hat{i}, \hat{j}$  y  $\hat{k}$  ( $\hat{k}$  es la vertical local, tomamos  $\hat{i}$  en el plano que contiene a  $\hat{k}$  y la velocidad angular de la Tierra  $\vec{\omega}$ ) las proyecciones de la segunda ley de Newton nos dan:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \cdot \hat{i} &= T_x \\ m\ddot{y} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \cdot \hat{j} &= T_y \\ m\ddot{z} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \cdot \hat{k} &= T_z - mg_e \end{aligned}$$

siendo  $T_x, T_y, T_z$  las componentes de la tensión del hilo:

$$\begin{aligned} T_x &= -T \frac{x}{\ell} \\ T_y &= -T \frac{y}{\ell} \\ T_z &= T \cos \alpha \end{aligned}$$

En la aproximación de *pequeñas oscilaciones* donde el péndulo no se aparta demasiado de la vertical:  $\alpha \ll 1$  tenemos:  $\sin \alpha \simeq \alpha$ ,  $\cos \alpha \simeq 1$  y podemos despreciar el movimiento de la partícula en la vertical:  $\dot{z} \simeq 0$ ,  $\ddot{z} \simeq 0$ , de manera que  $\vec{v}' \simeq \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$

y las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega\cos\lambda\dot{y} &= -T\frac{x}{\ell} \\ m\ddot{y} + 2m\omega\cos\lambda\dot{x} &= -T\frac{y}{\ell} \\ 2m\omega\sen\lambda\dot{y} &= T - mg_e \end{aligned}$$

En la misma aproximación de pequeñas oscilaciones nos quedamos ahora sólo con los términos lineales en  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $y$ ,  $\dot{y}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\cos\lambda\dot{y} &= -\frac{g_e}{\ell}x \\ \ddot{y} + 2\omega\cos\lambda\dot{x} &= -\frac{g_e}{\ell}y \end{aligned}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior consideremos el siguiente cambio de variable:

$$q = x + iy$$

donde  $i$  es la unidad compleja ( $i^2 = -1$ ). Sumándole entonces a la primera de las ecuaciones la segunda multiplicada por  $i$  nos queda:

$$\ddot{q} + 2i\omega_z\dot{q} + \omega_0^2q = 0$$

con  $\omega_z = \omega\cos\lambda$ ,  $\omega_0^2 = \frac{g_e}{\ell}$  ( $\omega_0$  es la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones del péndulo en ausencia del término de Coriolis). Supongamos una solución a la ecuación anterior de la forma:  $q = Ae^{\alpha t}$ , que sustituyendo en la ecuación nos da:

$$\alpha^2 + 2i\omega_z\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Las soluciones a la ecuación algebraica anterior son:

$$\alpha = -i\omega_z \pm i\sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2}$$

Tomando en cuenta que  $\omega_z \ll \omega_0$  podemos simplificar las soluciones:

$$\alpha \approx -i\omega_z \pm i\omega_0$$

de manera que  $q$  es una combinación lineal de exponenciales en cada una de las soluciones anteriores:

$$q = C_1e^{(-i\omega_z+i\omega_0)t} + C_2e^{(-i\omega_z-i\omega_0)t} = e^{-i\omega_z t} (C_1e^{+i\omega_0 t} + C_2e^{-i\omega_0 t})$$

Separando ahora en parte real e imaginaria de la solución podemos recuperar las leyes horarias  $x(t), y(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\omega_z t (A_R\cos\omega_0 t - B_I\sen\omega_0 t) + \sen\omega_z t (A_I\cos\omega_0 t + B_R\sen\omega_0 t) \\ y(t) &= \cos\omega_z t (A_I\cos\omega_0 t + B_R\sen\omega_0 t) - \sen\omega_z t (A_R\cos\omega_0 t - B_I\sen\omega_0 t) \end{aligned}$$

donde las nuevas constantes (reales) cumplen:  $C_1 + C_2 = A_R + iA_I$ ,  $C_1 - C_2 = B_R + iB_I$ . Estas constantes dependen de las condiciones iniciales del problema, que supondremos son:

$$\begin{aligned} x(0) &= A; & \dot{x}(0) &= 0 \\ y(0) &= 0; & \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} A_R &= A; & A_I &= 0 \\ B_R &= \frac{\omega_z}{\omega_0} A; & B_I &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \left[ \cos\omega_z t \cos\omega_0 t + \frac{\omega_z}{\omega_0} \operatorname{sen}\omega_z t \operatorname{sen}\omega_0 t \right] \approx A \cos\omega_z t \cos\omega_0 t \\ y(t) &= A \left[ -\operatorname{sen}\omega_z t \cos\omega_0 t + \frac{\omega_z}{\omega_0} \cos\omega_z t \operatorname{sen}\omega_0 t \right] \approx -A \operatorname{sen}\omega_z t \cos\omega_0 t \end{aligned}$$

donde la última aproximación corresponde a:  $\omega_z \ll \omega_0$ . Consideremos finalmente el cociente entre las coordenadas:

$$\frac{y}{x} = -tg\omega_z t$$

lo que significa que las posiciones que ocupa el péndulo durante su movimiento descansan sobre un plano que rota con velocidad angular  $-\omega_z \hat{k}$ . El efecto del término de Coriolis es entonces en primera aproximación, rotar el plano de oscilación del péndulo. En el ecuador  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  y el plano del péndulo no rota, mientras que en los Polos Norte y Sur la velocidad angular vale  $\omega_z = \mp\omega$  (en el Polo Norte el péndulo se mueve en un plano fijo con respecto al sistema inercial). León Foucault registró en el experimento original bajo la cúpula del Panteón de París, un período de rotación del plano del péndulo de aproximadamente 32hs.





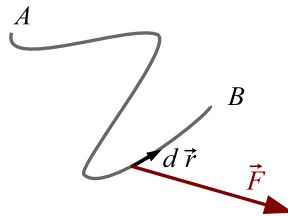
# Capítulo 3

## Trabajo y Energía.

### 3.1. Trabajo y Potencia de una fuerza.

Consideremos una fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre una partícula. Si  $d\vec{r}$  es el desplazamiento diferencial de la partícula sobre su trayectoria, el *trabajo* diferencial hecho por la fuerza sobre la partícula se define como:

$$(3.1) \quad dW_F \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Las fuerzas con que trabajamos dependen genéricamente de la posición, la velocidad de la partícula sobre la que actúan y del tiempo:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

El trabajo total hecho por la fuerza mientras la partícula recorre la trayectoria que conecta  $A$  con  $B$  se puede hallar entonces integrando las contribuciones diferenciales (3.1) de acuerdo a la ley horaria  $\vec{r}(t)$  que sigue la partícula :

$$(3.2) \quad W_F = \int_A^B \int_{\{\vec{r}(t)\}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

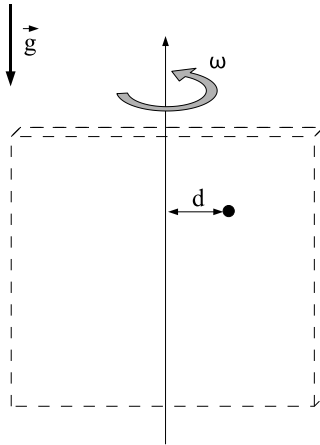
Otra forma de calcular el trabajo hecho por una fuerza es a partir de la *potencia* de la misma:

$$(3.3) \quad \mathcal{P}_F \equiv \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dW_F}{dt}$$

es decir, la tasa a la cual la fuerza realiza trabajo. Integrando  $\mathcal{P}$  en el tiempo podemos calcular el trabajo de la fuerza:

$$(3.4) \quad W_F = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

**Ejemplo.-Partícula en una caja**



(examen agosto 2007) Una partícula de masa  $m$  se mueve en el interior de una caja lisa muy angosta que gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje vertical contenido en ella. La partícula parte con velocidad *relativa* a la caja nula y a una distancia  $d$  del eje de giro. A partir de la aceleración en coordenadas cilíndricas (1.11), tomando  $\hat{k}$  en el sentido de la velocidad angular, la segunda ley de Newton proyectada según los versores  $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi$  y  $\hat{k}$  da respectivamente:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \omega^2 \rho &= 0 \\ 2m\omega \dot{\rho} &= N \\ \ddot{z} + g &= 0 \end{aligned}$$

siendo  $N$  la resultante de la reacción normal ejercida por cada pared de la caja. Considerando las condiciones iniciales:  $\rho(0) = d, \dot{\rho}(0) = 0; z(0) = z_0, \dot{z}(0) = 0$ , las

soluciones a las ecuaciones de movimiento en  $\rho$  y  $z$  son:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= d \cosh(\omega t) \\ z(t) &= z_0 - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}$$

Supongamos ahora que la partícula desciende una altura  $h$ ; el tiempo que transcurre desde el instante inicial es  $t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . El trabajo que realiza la normal durante ese intervalo se puede calcular a partir de (3.4) y la expresión para la velocidad en cilíndricas (1.9):

$$W_N = \int_0^{t^*} \vec{N} \cdot \vec{v} dt = \int_0^{t^*} 2m\omega^2 \rho \dot{\rho} dt = m\omega^2 \rho^2 \Big|_0^{t^*} = m\omega^2 d^2 \operatorname{senh}^2 \left( \omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$$

### 3.1.1. Teorema del Trabajo y la Energía.

A partir de la segunda ley de Newton (2.3) la potencia de la fuerza neta que actúa sobre una partícula se puede escribir como:

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v}$$

que corresponde a la siguiente derivada:

$$m\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{dT}{dt}$$

donde definimos la *energía cinética* de la partícula:

$$(3.5) \quad T \equiv \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

Finalmente, a partir de (3.3), la tasa de variación de la energía cinética corresponde a la tasa a la que la fuerza neta realiza trabajo (**Teorema del Trabajo y la Energía**):

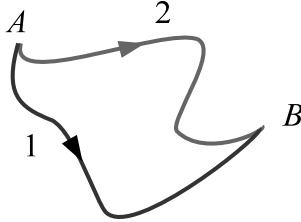
$$(3.6) \quad \boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt} = \mathcal{P}}$$

## 3.2. Sistemas Conservativos.

El trabajo hecho por una fuerza, expresado tanto en la forma (3.2) como (3.4), depende explícitamente de la ley horaria seguida por la partícula. Las llamadas **fuerzas conservativas** sin embargo están caracterizadas por:

- Son fuerzas posicionales:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
- El trabajo que realizan depende sólo de los puntos iniciales y finales que ocupa la partícula, sin importar la ley horaria seguida por la partícula:

$$W_{A \rightarrow B,1} = W_{A \rightarrow B,2}$$



El trabajo de una fuerza conservativa corresponderá entonces a la variación de una función que sólo dependa de los puntos del espacio y que llamamos *energía potencial*  $U(\vec{r})$ :

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta U = -(U(B) - U(A))$$

que usando (3.2) nos queda

$$(3.7) \quad \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U$$

Si consideramos ahora un incremento diferencial  $dU$  de la energía potencial podemos escribir la expresión anterior como:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dU$$

A su vez, el incremento en  $U$  se corresponde con la derivada direccional de la función  $U$  siguiendo una trayectoria cualquiera que conecte  $A$  y  $B$  (supongamos que esa trayectoria es la misma que corresponde al lado izquierdo de (3.7)):

$$(3.8) \quad dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$$

y tenemos

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dU = - \int_A^B \nabla U \cdot d\vec{r}$$

Como las integrales de la expresión anterior se evalúan sobre una trayectoria arbitraria que une dos puntos también arbitrarios, la igualdad sólo puede ser válida si los integrandos son iguales:

$$(3.9) \quad \vec{F} = -\nabla U$$

Es decir, una definición equivalente para las fuerzas conservativas es que deriven de una función potencial.

### 3.2.1. Peso.

La fuerza del peso es conservativa. Si  $\hat{k}$  representa la vertical saliente sobre la superficie terrestre, el peso de una partícula de masa  $m$  es:

$$(3.10) \quad \vec{P} = -mg\hat{k}$$

y la energía potencial gravitatoria que se corresponde mediante (3.9) es:

$$(3.11) \quad U = mgz + U_0$$

donde  $U_0$  es una constante arbitraria que corresponde al valor que le asignemos al potencial para  $z = 0$  (cualquier potencial estará definido a menos de una constante aditiva).

### 3.2.2. Fuerza elástica.

Otro ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza elástica ejercida por un resorte ideal (2.9). Consideremos el trabajo hecho por esta fuerza sobre el punto  $P$  de la figura 2.1 cuando este se mueve entre dos puntos arbitrarios  $A$  y  $B$ :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot dP$$

el punto  $P$  a su vez se puede escribir en términos del largo del resorte como:

$$P = O + \ell \hat{u}$$

y si consideramos el punto  $O$  fijo, una variación en la posición de  $P$  será:

$$dP = d\ell \hat{u} + \ell d\hat{u}$$

por lo tanto, el trabajo de la fuerza elástica es:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B -k(\ell - \ell_0) \hat{u} \cdot (d\ell \hat{u} + \ell d\hat{u})$$

y como  $\hat{u}$  es de norma constante, tenemos a partir de (1.21) que  $d\hat{u} \cdot \hat{u} = 0$  por lo que:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B -k(\ell - \ell_0) \hat{u} \cdot d\ell \hat{u} = \int_{\ell_A}^{\ell_B} -k(\ell - \ell_0) d\ell$$

el trabajo hecho por la fuerza elástica depende sólo del largo inicial y final del resorte y se trata entonces de una fuerza conservativa. La integral de la expresión anterior se puede calcular fácilmente dando:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\ell_A}^{\ell_B} -k(\ell - \ell_0) d\ell = - \left[ \frac{1}{2}k(\ell_B - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(\ell_A - \ell_0)^2 \right]$$

y encontramos el potencial elástico asociado a la fuerza:

$$(3.12) \quad U = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

donde consideramos que el potencial es cero con el resorte en su longitud natural.

### 3.2.3. Conservación de la Energía

En lo que sigue vamos a agrupar las fuerzas que actúan sobre una partícula en tres categorías:

- **fuerzas conservativas**  $\vec{F}^{(cons)}$
- **fuerzas de potencia nula**  $\vec{F}^{(Pnula)}$  (no conservativas que no realizan trabajo)
- **fuerzas residuales**  $\vec{F}^{(res)}$  (no conservativas que realizan trabajo)

#### *Ejemplos.-*

Podemos ver ejemplos claros de las dos últimas categorías en el caso de una partícula enhebrada en una guía rugosa (2.3). Si suponemos la guía fija, la velocidad absoluta de la partícula será tangente a la guía. Por lo tanto, la reacción normal ejercida por la guía es de potencia nula:

$$\vec{N} \perp \vec{v} \Rightarrow \mathcal{P}_N = \vec{N} \cdot \vec{v} = 0$$

Si la guía es móvil, en cambio, la normal que actúa sobre la partícula es residual, lo cual se puede ver escribiendo la velocidad absoluta como  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$ , siendo  $\vec{v}'$  la velocidad relativa a la guía y  $\vec{v}_T$  la velocidad del punto de la guía donde se encuentra la partícula:

$$\mathcal{P}_N = \vec{N} \cdot \vec{v} = \vec{N} \cdot (\vec{v}' + \vec{v}_T) = \vec{N} \cdot \vec{v}_T$$

donde usamos que la velocidad de la partícula relativa a la guía es tangente a esta última.

Otro caso de fuerza residual es el de la reacción tangencial ejercida por una guía sobre una partícula. Por simplicidad consideremos una guía fija donde la reacción tangencial será opuesta a la velocidad absoluta de la partícula ( $\vec{v}$ ):

$$\mathcal{P}_T = \vec{T} \cdot \vec{v} = -|\vec{T}||\vec{v}|$$

de donde resulta una potencia siempre negativa.

Consideremos ahora el teorema del trabajo y la energía (3.6), descomponiendo la potencia de la fuerza neta que actúa sobre la partícula según las categorías anteriores:

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left( \vec{F}^{(cons)} + \vec{F}^{(P\ nula)} + \vec{F}^{(res)} \right) \cdot \vec{v} = \vec{F}^{(cons)} \cdot \vec{v} + \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v}$$

Usando ahora que las fuerzas conservativas provienen de una energía potencial  $U$  a través de (3.9):

$$\frac{dT}{dt} = -\nabla U \cdot \vec{v} + \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v}$$

y usando luego la definición de la velocidad (1.1) y de la derivada direccional  $dU$  (3.8):

$$\frac{dT}{dt} = -\nabla U \cdot \vec{v} + \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v} = -\nabla U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt} + \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \frac{d(T+U)}{dt} = \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v}$$

donde  $T+U$  es la **energía**  $E$  de la partícula y  $\vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v}$  es la potencia de las fuerzas residuales:

$$(3.13) \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}^{(res)}}$$

La energía de la partícula se conservará entonces si la potencia de las fuerzas residuales es nula. A partir de ello es posible hallar la ecuación de movimiento de diversos sistemas con un grado de libertad.

### ***Ejemplo.-Partícula en el interior de un aro (parte II).***

Retomemos el ejemplo de una masa en el interior de un aro liso que tenía por ecuación de movimiento (2.14):

$$m\ddot{\theta} + mg\sin\theta - mka\sin\theta\cos\theta = 0$$

o su forma preintegrada equivalente (2.16):

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mgac\theta - \frac{1}{2}mka^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_0^2 - mgac\theta_0 - \frac{1}{2}mka^2\sin^2\theta_0$$



El sistema a estudio es claramente conservativo. El primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior corresponde a la energía cinética de la partícula mientras que el segundo y el tercero son la energía potencial de la misma (se puede ver fácilmente que el potencial del que proviene la fuerza horizontal repulsiva es  $-\frac{1}{2}mkd^2$ ), por lo que la ecuación está poniendo de manifiesto la conservación de la energía (la normal es la única fuerza no conservativa que actúa sobre la partícula y es de potencia nula):

$$(3.14) \quad \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + U(\theta) = cte.$$

Concordantemente, lo que expresa la ecuación de movimiento es:

$$(3.15) \quad ma\ddot{\theta} + \frac{1}{a} \frac{dU}{d\theta} = 0$$

### 3.3. Equilibrio y Estabilidad.

Retomando la ecuación de movimiento del ejemplo anterior:

$$ma\ddot{\theta} + (mg\text{sen}\theta - mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta) = 0$$

vamos a hallar los puntos de *equilibrio* de la partícula, es decir, los ángulos para los cuales, si colocamos a la partícula en reposo ( $\dot{\theta} = 0$ ) permanecerá en ellos en todo instante posterior ( $\ddot{\theta} = 0$ ). Estos puntos deben verificar:  $\ddot{\theta} = 0$  de manera que no se modifique la condición de reposo; a partir de la ecuación de movimiento, los puntos que buscamos satisfacen:

$$mg\text{sen}\theta - mk\text{asen}\theta\text{cos}\theta = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\theta (g - k\text{acos}\theta) = 0$$

que tiene por solución

$$\text{sen}\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0$$

$$g - k\text{acos}\theta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cos}\theta_2 = \frac{g}{ka}, \exists \text{ sii } \frac{g}{ka} \leq 1$$

donde descartamos  $\theta = \pi$  ya que a pesar de ser solución de la ecuación, no es de equilibrio, pues la normal es negativa ( $N(\theta = \pi, \dot{\theta} = 0) = -mg$ ).

Veamos ahora cual es la *estabilidad* de estos puntos, es decir, estudiemos qué sucede si en lugar de colocar a la partícula en reposo en ellos (donde sabemos que permanecerá en reposo), damos a la partícula condiciones muy próximas al equilibrio. Queremos averiguar si bajo condiciones iniciales de proximidad al equilibrio arbitrarias, la partícula permanece próxima a la posición de equilibrio, en cuyo caso

hablamos de una *posición de equilibrio estable*. Si aún dadas condiciones de proximidad a la posición de equilibrio, la partícula no permanece cerca de esta posición para todas las posibles condiciones, hablamos de una *posición de equilibrio inestable*. Para estudiar esto conviene considerar la forma de la energía potencial de la partícula del ejemplo anterior (figura 3.1).

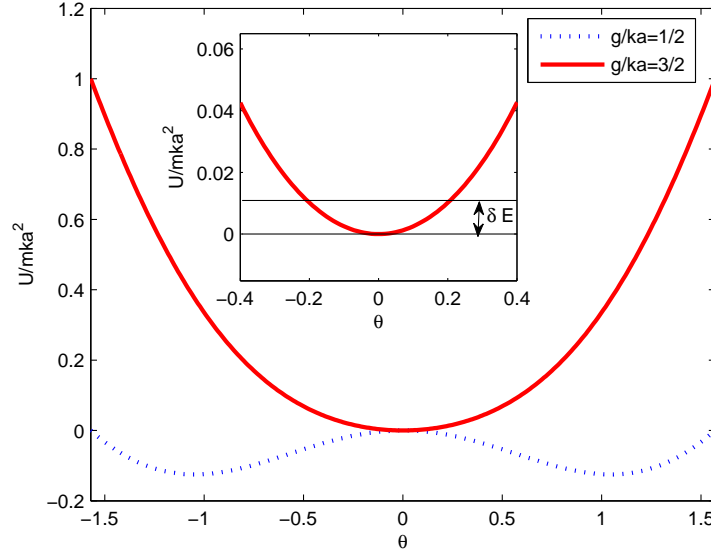


Figura 3.1: Potencial para el problema de una masa en el interior de un aro. El recuadro corresponde al potencial con  $g/ka > 1$ .

De acuerdo a (3.15), los puntos de equilibrio del sistema corresponden a extremos relativos de la función potencial ( $\frac{dU}{d\theta} = 0$ ). Veremos a continuación que si se trata de un mínimo del potencial- como sucede para  $\theta = 0$  cuando  $g/ka > 1$  (ver recuadro de la figura 3.1)-, esta posición de equilibrio es estable. Sea  $\theta_{eq}$  el mínimo de potencial, con energía  $U(\theta_{eq})$ . Consideremos condiciones iniciales próximas al equilibrio:

$$\theta(0) = \theta_{eq} + \delta\theta, \quad \delta\theta \ll 1, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \ll 1$$

que corresponde a darle a la partícula una energía:

$$E = U(\theta_{eq}) + \delta E$$

donde el exceso de energía  $\delta E$  sobre el potencial en equilibrio se puede hacer tan pequeño como queramos limitando  $\delta\theta$  y  $\dot{\theta}_0$ . Sabemos que existe una cantidad conservada que es la energía del sistema:

$$(3.16) \quad E = T + U(\theta)$$

Además, la energía cinética es no negativa:  $T \geq 0$ . Comparando las últimas dos ecuaciones tenemos entonces:

$$T + U(\theta) = U(\theta_{eq}) + \delta E \Leftrightarrow T = \delta E + U(\theta_{eq}) - U(\theta) \geq 0 \Rightarrow U(\theta) \leq U(\theta_{eq}) + \delta E$$

Por otro lado, como se trata de un mínimo del potencial, el valor de la energía potencial en la proximidad debe ser mayor que en el equilibrio:

$$U(\theta) \geq U(\theta_{eq})$$

por lo que (uniendo las dos condiciones anteriores)

$$U(\theta_{eq}) \leq U(\theta) \leq U(\theta_{eq}) + \delta E$$

es decir, los ángulos  $\theta$  accesibles a la partícula en su movimiento se deben corresponder con puntos sobre la curva de potencial que estén comprendidos entre las dos franjas horizontales del recuadro de 3.1. Regulando  $\delta E$  podemos acotar los valores de la posición tan cerca como queramos del equilibrio. Por otro lado, tenemos que:

$$\delta E - T = U(\theta) - U(\theta_{eq}) \geq 0 \Leftrightarrow T \leq \delta E$$

La energía cinética (y por lo tanto  $\dot{\theta}$ ) se puede hacer tan pequeña como queramos de acuerdo al valor  $\delta E$ . En conclusión, los puntos de equilibrio estable corresponden a los mínimos de energía potencial del sistema.

Veamos ahora la estabilidad de los puntos de equilibrio del problema de la masa en el aro. Si se verifica

$$\left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} = 0, \quad \left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq}} > 0$$

estamos en presencia de un mínimo de la energía potencial y por lo tanto de un punto de equilibrio estable. Para el caso de la partícula en el aro tenemos que:

$$\frac{dU}{d\theta} = mg \operatorname{sen} \theta - mka^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

por lo que la derivada segunda es:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg \operatorname{acos} \theta - mka^2 (2 \cos^2 \theta - 1)$$

En la posición  $\theta_1 = 0$  esta derivada segunda es:

$$\left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta_1} = mga - mka^2 > 0 \text{ si } \frac{g}{ka} > 1$$

En  $\theta_2$  en cambio:

$$\left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta_2} = mka^2 \left[ 1 - \left( \frac{g}{ka} \right)^2 \right] > 0 \text{ si } \frac{g}{ka} < 1$$

que es parte de su condición de existencia. Para  $\frac{g}{ka} = 1$  la derivada segunda se anula y debemos recurrir a otro criterio. Consideremos por ejemplo la forma de la derivada primera:

$$\frac{dU}{d\theta} = mg a \sin\theta (1 - \cos\theta)$$

Los valores límite de esta función en  $\theta = 0$  son:

$$\left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta \rightarrow 0^+} > 0, \quad \left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta \rightarrow 0^-} < 0$$

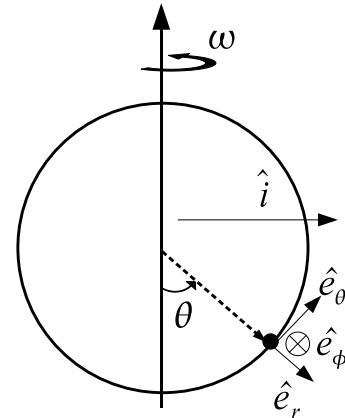
por lo que la derivada primera es creciente en el entorno de la posición de equilibrio, esto es, la posición es un mínimo. Resumiendo entonces:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \text{ estable si } \frac{g}{ka} \geq 1 \\ \cos\theta = \frac{g}{ka}, \exists \text{ y es estable si } \frac{g}{ka} \leq 1 \end{aligned}$$

### 3.3.1. Sistemas no conservativos preintegrables.

*Ejemplo.-Partícula en una guía móvil.*

Considere una partícula de masa  $m$  enhebrada en una guía lisa de radio  $R$ , la cual gira con velocidad angular  $\omega$  constante en torno a su diámetro vertical. Queremos encontrar cuáles son las posiciones de equilibrio relativo de la masa con respecto a la guía y determinar su estabilidad.



Como se trata de una guía lisa resulta que ninguna fuerza reactiva que actúa sobre la partícula tiene componente según  $\hat{e}_\theta$ . Podremos hallar la ecuación del sistema aplicando la segunda ley de Newton en esa dirección :

$$-mg \sin\theta = m\vec{a} \cdot \hat{e}_\theta$$

La aceleración la podemos calcular a partir del teorema de Coriolis (1.38) y usando como sistema relativo el solidario a la guía. La aceleración relativa según la dirección  $\hat{e}_\theta$  es  $R\ddot{\theta}$  mientras que la aceleración de Coriolis no tiene componente según esa dirección. La aceleración de transporte ( $\vec{a}_T$ ) es la de un movimiento circular uniforme alrededor del eje de giro y a una distancia  $R\text{sen}\theta$  del mismo:

$$\vec{a}_T = -\omega^2 R \text{sen}\theta \hat{i}$$

por lo que la ecuación de movimiento resulta:

$$-mg \text{sen}\theta = m\vec{a} \cdot \hat{e}_\theta = m \left[ \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \right] \cdot \hat{e}_\theta = m \left[ R\ddot{\theta} - \omega^2 R \text{sen}\theta \cos\theta \right]$$

o lo que es lo mismo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \text{sen}\theta - \omega^2 \text{sen}\theta \cos\theta = 0$$

Observe la similitud con la ecuación de movimiento (2.14) para el problema de una masa en el interior de un aro, donde preintegrando la ecuación llegábamos a (2.16). Esta ecuación de movimiento también admite una preintegración en el tiempo; en general, cualquier ecuación de la forma:

$$\ddot{\theta} + f(\theta) = 0$$

admite una preintegración que la lleva a:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + F(\theta) = \text{cte.}$$

donde  $\frac{dF}{d\theta} = f$ . Para un sistema conservativo, la función  $F(\theta)$  es, a menos de una constante multiplicativa, la energía potencial del sistema (ver (3.14)). En el caso de nuestro problema por otro lado, la energía no se conserva: la componente según  $\hat{e}_\phi$  de la reacción normal de la guía es una fuerza residual, ya que la velocidad de transporte tiene también la dirección de  $\hat{e}_\phi$ . Por lo tanto, la ecuación anterior es una ley de conservación pero **no** de la energía. Es sin embargo, una ecuación con las mismas características de (3.16): una función no negativa:  $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2$  (pero que no es la energía cinética de la partícula) que sumada a una función de la coordenada:  $F(\theta)$  nos da una constante. Por lo tanto, *los puntos de equilibrio estable del sistema corresponderán a los mínimos de  $F(\theta)$*  y se puede probar para este caso que:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \text{ estable si } \frac{g}{R\omega^2} &\geq 1 \\ \theta = \pi, \text{ siempre inestable} \\ \cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}, \exists \text{ y es estable si } \frac{g}{R\omega^2} &\leq 1 \end{aligned}$$

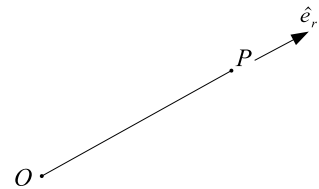
# Capítulo 4

## Movimiento Central.

### 4.1. Fuerzas Centrales.

Dado un centro de fuerzas  $O$ , una *fuerza central* actuando sobre un punto  $P$  está dirigida según la dirección que une a los puntos anteriores:

$$(4.1) \quad \vec{f} = f \hat{e}_r$$



Consideremos ahora el *momento angular* de una partícula  $P$  respecto a un punto  $O$ :

$$(4.2) \quad \vec{L}_O = (P - O) \times \vec{p}$$

La derivada de esta cantidad con respecto al tiempo es:

$$\dot{\vec{L}}_O = (\dot{P} - \dot{O}) \times \vec{p} + (P - O) \times \dot{\vec{p}} \stackrel{(2.1)}{=} (\dot{P} - \dot{O}) \times \vec{p} + (P - O) \times \vec{f}$$

donde  $\vec{f}$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Supongamos el centro de fuerzas fijo:  $\dot{O} = 0$  y usemos que  $\vec{p}$  es por definición (2.2) colineal con  $\dot{P} = \vec{v}_P$ , de manera que su producto vectorial es cero:

$$\dot{\vec{L}}_O = (P - O) \times \vec{f}$$

Si la fuerza neta que actúa sobre la partícula es central y por lo tanto colineal con  $P - O$ , el momento angular de la partícula se conservará:

$$(4.3) \quad \dot{\vec{L}}_O = 0$$

Esta conservación implica por un lado que el módulo ( $\ell$ ) del momento angular se conservará y por otro, que el plano definido por la posición  $\vec{r}(0)$  y velocidad  $\vec{v}(0)$  iniciales (que determinan el momento angular  $\vec{L}_O$ ) es el plano donde se moverá la partícula.

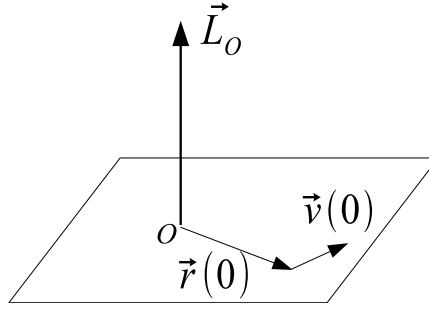
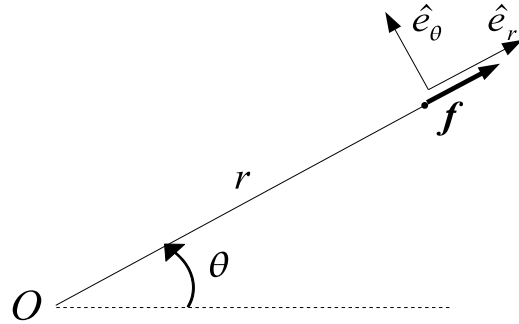


Figura 4.1: Plano de movimiento determinado por la posición y velocidad iniciales.

Trabajaremos ahora en coordenadas polares en el plano de movimiento de la partícula. Las ecuaciones de movimiento son:

$$(4.4) \quad f = m \left[ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right]$$

$$(4.5) \quad 0 = m \left[ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right]$$



La segunda de las ecuaciones anteriores representa la conservación del momento angular; multiplicando (4.5) por  $r$

$$m \left[ r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} \right] = 0$$

que equivale a

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0$$

es decir que tenemos una cantidad conservada que corresponde al módulo del momento angular:

$$(4.6) \quad \boxed{mr^2\dot{\theta} = \ell}$$

## 4.2. Fuerzas isotrópicas.

Consideremos ahora una fuerza que además de central es isotrópica, esto es, sólo depende de la distancia al centro de fuerzas pero no de la dirección:

$$(4.7) \quad \vec{f} = f(r)\hat{e}_r$$

Se puede ver fácilmente que esta fuerza es conservativa calculando el trabajo de la misma:

$$W_f = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

que considerando:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r : d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\hat{e}_r \Rightarrow \vec{f} \cdot d\vec{r} \stackrel{(4.7),(1.21)}{=} f(r)dr$$

se puede simplificar a:

$$W_f = \int_{r_A}^{r_B} f(r)dr$$

que sólo depende de los puntos  $A$  y  $B$ . Equivalentemente podemos decir que la fuerza deriva de un potencial  $U$ :

$$\vec{f} = -\nabla U : f(r) = -\frac{dU}{dr}$$

y se conserva la energía de la partícula:

$$T + U(r) = E$$

Usando ahora la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

la conservación de la energía nos queda:

$$(4.8) \quad \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = E}$$

A partir de dos cantidades conservadas:  $\ell$  y  $E$  tenemos entonces las ecuaciones de movimiento (equivalentes al planteo de la segunda ley de Newton en (4.4), (4.5)) de un sistema con dos grados de libertad:  $r$  y  $\theta$ .



### 4.2.1. Potencial efectivo.

A partir de (4.6), podemos eliminar  $\dot{\theta}$  de la ecuación (4.8):

$$(4.9) \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) = E$$

Definiendo el *potencial efectivo*  $U_{ef}$ :

$$(4.10) \quad U_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)$$

la ecuación (4.9) tiene la misma estructura de (3.14), con un término no negativo:  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$  que sumado a una función de la coordenada:  $U_{ef}(r)$  nos da la constante  $E$ . Los criterios de equilibrio y estabilidad del capítulo anterior se aplican entonces en este caso, pero lo que eran puntos de equilibrio antes pasan a ser *órbitas circulares* ( $r = cte.$ ).

#### ***Ejemplo.-Potencial elástico.***

Consideremos una partícula sujeta mediante un resorte de longitud natural nula y constante elástica  $k$  a un centro de fuerzas fijo; el potencial que experimenta la partícula debido a la fuerza elástica es:

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

El potencial efectivo correspondiente es:

$$U_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

Un bosquejo de la forma de este potencial efectivo se puede encontrar en la figura 4.2. La forma del potencial efectivo está fijada conociendo el momento angular  $\ell$  de la partícula. Supongamos ahora que variamos las condiciones iniciales de manera de obtener diferentes energías pero sin afectar al momento angular (y sin afectar por lo tanto al potencial efectivo). La mínima energía que la partícula puede tener es la correspondiente al mínimo del potencial efectivo ( $E_0$ ). Para esa energía, el único valor accesible de  $r$  es el correspondiente al mínimo ( $r_0$ ) y la partícula se mueve en una órbita circular (esa órbita es estable). El radio de esta órbita circular se puede hallar también sin necesidad de encontrar el potencial efectivo, basta con considerar  $\ddot{r} = 0$  en (4.4) y usar la conservación del momento angular (4.6). Para una energía  $E$  por encima de  $E_0$  la partícula se puede encontrar a las distancias que van desde el mínimo  $r_m$  al máximo  $r_M$  que son los llamados puntos de retroceso y verifican  $\dot{r} = 0$ , es decir, son las raíces de  $U_{ef}(r) = E$ .

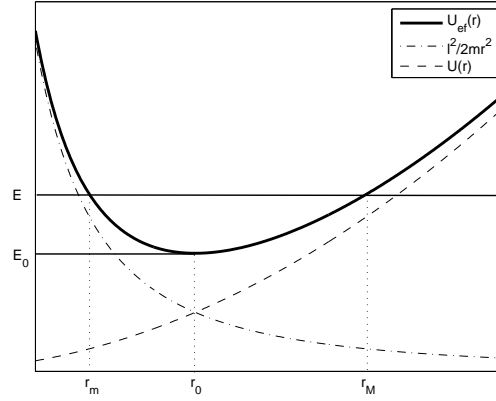


Figura 4.2: Potencial efectivo ( $\ell \neq 0$ ) para una partícula sujeta a una fuerza elástica. Para una energía dada  $E$  se destacan los puntos de retroceso ( $r_m, r_M$ ), el radio  $r_0$  y la energía  $E_0$  de la órbita circular.

#### 4.2.2. Leyes horarias.

A partir de la expresión (4.9) para la energía del problema unidimensional podemos hallar las leyes horarias  $r(t), \theta(t)$  como sigue: despejamos  $\dot{r}$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{\ell^2}{2mr^2} - U(r) \right)}$$

es decir:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{\ell^2}{2mr^2} - U(r) \right)}}$$

e integrando luego en variables separadas nos queda:

$$(4.11) \quad t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{\ell^2}{2mr^2} - U(r) \right)}}$$

de donde eventualmente podemos hallar  $r$  como función de  $t$ . Por otro lado, despejando  $\dot{\theta}$  de (4.6):

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

e integrando en el tiempo:

$$(4.12) \quad \theta - \theta_0 = \int_{t_0}^t \frac{\ell}{mr^2} dt$$

y tenemos así  $r(t)$  y  $\theta(t)$  en términos de las constantes  $E$ ,  $\ell$ ,  $r_0$ ,  $\theta_0$ . Para hallar la trayectoria de la partícula  $r(\theta)$  podríamos eliminar el tiempo  $t$  entre (4.11) y (4.12); podemos sin embargo, y resultará más fácil en un buen número de casos, hallar y resolver las ecuaciones diferenciales que determinan la trayectoria.

### 4.3. Ecuaciones de Binet.

Partamos de las ecuaciones de movimiento (4.4), (4.5):

$$\begin{aligned} f &= m \left[ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right] \\ 0 &= m \left[ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right] \end{aligned}$$

y consideremos ahora el siguiente cambio de variable:

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

La derivada primera de  $r$  en el tiempo se puede escribir en términos de las derivada de  $u$  como:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} \stackrel{(4.6)}{=} -\frac{\ell}{m} \frac{du}{d\theta}$$

y derivando la anterior podemos hallar la derivada segunda en el tiempo:

$$\ddot{r} = -\frac{\ell}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} \stackrel{(4.6)}{=} -\frac{\ell^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} u^2$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de movimiento radial (4.4) nos queda:

$$(4.13) \quad a_r = -\frac{\ell^2 u^2}{m^2} [u + u'']$$

donde  $a_r = \frac{f}{m}$  es la componente radial de la aceleración de la partícula y  $u'' \equiv \frac{d^2u}{d\theta^2}$ .

Puede ser de utilidad también conocer la relación entre la velocidad de la partícula y la función  $u$  y su derivada. El cuadrado de la velocidad en polares es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

que haciendo uso de la forma de  $\dot{r}$  nos da:

$$(4.14) \quad v^2 = \frac{\ell^2}{m^2} [u^2 + u'^2]$$

donde  $u' \equiv \frac{du}{d\theta}$ . Las ecuaciones (4.13) y (4.14) son las *ecuaciones de Binet* y nos permiten hallar la forma de la órbita dadas las condiciones iniciales  $u(0)$  y  $u'(0)$ . En la sección que sigue veremos cómo hallar la trayectoria a partir de estas ecuaciones en un caso sencillo.

## 4.4. Movimiento Planetario.

Nos planteamos ahora estudiar el movimiento de dos cuerpos sometidos únicamente a la interacción gravitatoria mutua (2.4). Para ello, comenzaremos por ver el problema genérico de dos partículas que interactúan entre sí mediante un potencial  $U(r)$  función únicamente de la distancia  $r$  que separa a las partículas; este problema se conoce como *problema de dos cuerpos*.

### 4.4.1. Problema de dos cuerpos.

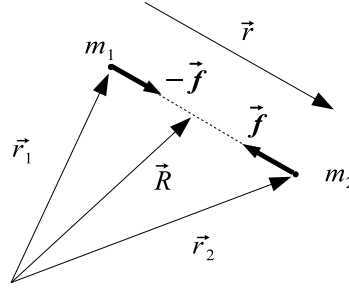


Figura 4.3: Coordenadas para el problema de dos cuerpos.

Consideremos la segunda ley de Newton para cada una de las partículas:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\vec{f}(r) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{f}(r) \end{aligned}$$

donde  $\vec{f}$  deriva del potencial  $U(r)$ ,  $r = |\vec{r}|$  y  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  es la *separación relativa* entre las partículas. A efectos de desacoplar las ecuaciones anteriores, consideremos el siguiente vector que ubica al *centro de masas* de las dos partículas:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Los vectores posición de cada partícula se pueden escribir fácilmente en términos de  $\vec{r}$  y  $\vec{R}$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned}$$

y sustituyendo en las ecuaciones de movimiento nos queda:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{R}} - \mu \ddot{\vec{r}} &= -\vec{f}(r) \\ m_2 \ddot{\vec{R}} + \mu \ddot{\vec{r}} &= \vec{f}(r) \end{aligned}$$

donde usamos la *masa reducida*  $\mu$  del sistema:

$$(4.15) \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Si ahora sumamos las ecuaciones de movimiento:

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = 0$$

que indica que el centro de masas del sistema no está acelerado. Si ahora multiplicamos la segunda ecuación por  $m_1$  y le restamos la primera multiplicada por  $m_2$  nos queda:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(r)$$

y escribiendo la fuerza  $\vec{f}$  en términos de la separación relativa:

$$\vec{f}(r) = f(r) \hat{r}$$

nos queda:

$$(4.16) \quad \mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \hat{r}$$

que es la ecuación de movimiento para una partícula con la masa reducida del sistema y sometida a una fuerza central  $f(r)$ .

#### 4.4.2. Fuerza gravitatoria.

Veamos ahora el caso de una fuerza  $f(r)$  que depende del inverso del cuadrado de la distancia entre las partículas:

$$(4.17) \quad f(r) = -\frac{K}{r^2}$$

que en el caso de la interacción gravitatoria corresponde a  $K = GMm$ . El potencial asociado a esta fuerza es:

$$U(r) = -\frac{K}{r}$$

donde tomamos el potencial de modo que se anule en el infinito. El potencial efectivo asociado se muestra en la figura 4.4. Existe un valor mínimo  $E_0 = -\frac{\mu K^2}{2\ell^2}$  para este

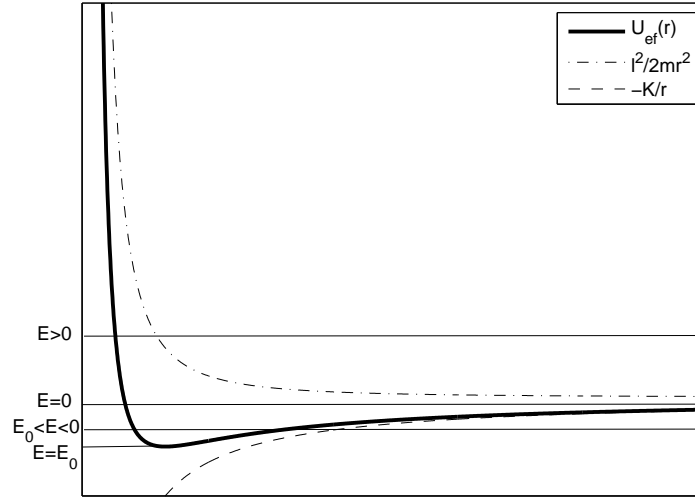


Figura 4.4: Potencial efectivo ( $\ell \neq 0$ ,  $K > 0$ ) para una fuerza proporcional al inverso del cuadrado.

potencial que corresponde a una órbita circular estable. Para energías  $E_0 < E < 0$ , la partícula tiene dos puntos de retorno y por lo tanto describirá una órbita acotada. Para energías  $E \geq 0$  tenemos un solo punto de retorno y por lo tanto nos encontraremos con órbitas no acotadas.

Para ver la forma detallada de las órbitas consideremos ahora la ecuación de Binet (4.13) para la partícula de masa reducida  $\mu$ :

$$\frac{-Ku^2}{\mu} = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2} [u + u'']$$

o lo que es lo mismo:

$$u'' + u = \frac{\mu K}{\ell^2}$$

que es una ecuación lineal no homogénea. La solución de la homogénea es:

$$u_H(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0)$$

y la solución particular:

$$u_P = \frac{\mu K}{\ell^2}$$

por lo que:

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu K}{\ell^2}$$

Tomaremos ahora  $\theta_0 = 0$  que corresponde a una elección de la orientación de los ejes de coordenadas:

$$u(\theta) = A \cos \theta + \frac{\mu K}{\ell^2}$$

Para hallar ahora la constante  $A$  consideremos la ecuación (4.14):

$$v^2 = \frac{\ell^2}{\mu^2} [u^2 + u'^2]$$

Que se puede escribir como:

$$E - U = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{\ell^2}{2\mu} [u^2 + u'^2]$$

y usando la forma del potencial nos queda:

$$E + Ku = \frac{\ell^2}{2\mu} [u^2 + u'^2]$$

Sustituyendo ahora  $u$  y  $u'$  se llega fácilmente a:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\mu K}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{\ell^2}}$$

Definamos ahora estas dos nuevas cantidades:

$$(4.18) \quad p = \frac{\ell^2}{\mu K}$$

$$(4.19) \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu K^2}}$$

Usando que  $A = \frac{\varepsilon}{p}$ , la ecuación para la órbita de la partícula resulta:

$$(4.20) \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

que corresponde a la ecuación de una *cónica* donde  $p$  es el llamado parámetro de la cónica y  $\varepsilon$  su *excentricidad*. Para un valor de  $\ell \neq 0$  fijo, los diferentes valores de la energía de la partícula determinan las diferentes excentricidades de las órbitas:

energía	excentricidad	órbita
$E = E_0 = -\frac{\mu K^2}{2\ell^2}$	$\varepsilon = 0$	circunferencia
$E_0 < E < 0$	$0 < \varepsilon < 1$	elipse
$E = 0$	$\varepsilon = 1$	parábola
$E > 0$	$\varepsilon > 1$	hipérbola

### 4.4.3. Leyes de Kepler.

Con anterioridad a la formulación de Newton acerca del movimiento de los planetas bajo la acción gravitatoria exclusiva del Sol, Kepler formuló las siguientes leyes empíricas, resultado de cuidadosas observaciones astronómicas:

- *Primera Ley:* La trayectoria de un planeta en el sistema solar es una elipse, donde el Sol ocupa uno de los focos
- *Segunda Ley (Constancia de la velocidad areolar):* El área barrida por el vector posición de un planeta durante un cierto intervalo de tiempo es constante.
- *Tercera Ley:* El cuadrado del período de traslación de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita. Esa constante de proporcionalidad es independiente del planeta considerado.

Veremos ahora cómo estas leyes se pueden deducir a partir de lo tratado anteriormente para una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

De acuerdo a (4.20), una de las posibles trayectorias bajo la acción de la fuerza gravitatoria es una elipse, lo que está de acuerdo con la Primera Ley.

La segunda ley es aplicable a cualquier fuerza central y es un equivalente de la conservación del momento angular (4.6). Consideremos el cambio en el vector posición en un intervalo de tiempo diferencial, tal como se ve en la figura 1.2. Si el ángulo barrido durante ese tiempo es  $d\theta$ , el área encerrada es:

$$dS = \frac{1}{2}r^2d\theta$$

y correspondientemente, la variación de área en el tiempo es:

$$(4.21) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \stackrel{(4.6)}{=} \frac{\ell}{2\mu}$$

por lo que en tiempos iguales, la partícula barrerá áreas iguales, ya que  $\ell$  es una constante de movimiento.

Para probar la tercera ley empecemos por pasar a la representación en coordenadas cartesianas de una elipse. A partir de la ecuación de la cónica (4.20)

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

consideremos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \end{aligned}$$



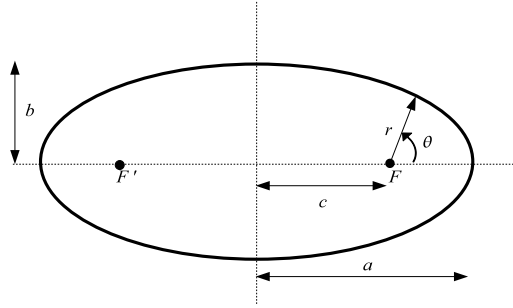


Figura 4.5: Semieje mayor ( $a$ ) y menor ( $b$ ) de una elipse.

de modo que podemos escribir la cónica como:

$$r = p - \varepsilon x$$

que elevando al cuadrado nos da:

$$x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2$$

es decir:

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2$$

Podemos ahora completar cuadrados entre los dos primeros términos de la ecuación anterior, es decir sumemos y restemos un término constante:

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + 2p\varepsilon x + \frac{p^2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} - \frac{p^2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2 = p^2$$

de manera que los tres primeros términos del lado izquierdo representen un cuadrado perfecto:

$$\left( \sqrt{1 - \varepsilon^2} x + \frac{p\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2 - \frac{p^2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2 = p^2$$

o lo que es lo mismo:

$$(1 - \varepsilon^2) \left( x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

Bajo el siguiente cambio de variables (cambiamos el origen del sistema cartesiano)

$$\begin{aligned} x' &= x + c \\ y' &= y \end{aligned}$$

siendo  $c = \frac{pe}{1-\varepsilon^2}$ , la ecuación para la cónica toma la siguiente forma:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

donde  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor de la elipse respectivamente (ver figura 4.5):

$$(4.22) \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$(4.23) \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Ahora, el área de una elipse es:

$$S = \pi ab$$

que, según (4.21), es el área barrida por el vector posición en el período  $T$  de movimiento de la partícula:

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\ell}{2\mu} \Leftrightarrow T = \frac{2\mu\pi ab}{\ell}$$

A partir de (4.22), (4.23) se puede ver que:  $b^2 = pa$  por lo que:

$$T^2 = \frac{4\mu^2\pi^2 pa^3}{\ell^2}$$

y usando (4.18) nos queda:

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{K} a^3$$

Para la fuerza gravitatoria  $K = GMm$ , siendo  $M$  la masa del Sol y  $m$  la del planeta. Como  $M \gg m$ , la masa reducida (4.15) del sistema es  $\mu \approx m$  y la ecuación anterior nos da:

$$(4.24) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$



# Capítulo 5

## Sistemas de Partículas.

### 5.1. Centro de masas de un sistema de partículas.

Consideremos un conjunto de partículas que tienen por posición  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , y cuyas masas respectivas son  $m_i$  (ver figura 5.1(a)). Sea  $M$  la masa total del sistema:

$$(5.1) \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Definimos el **centro de masas** ( $G$ )<sup>1</sup> del conjunto así:

$$(5.2) \quad G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)$$

que es independiente del origen de coordenadas ( $O$ ) que tomemos; para probar la afirmación anterior, consideremos el centro de masas a partir de otro origen  $O'$ :

$$G' - O' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O')$$

Si a la ecuación anterior le sustraemos (5.2) nos queda:

$$G' - G + (O - O') = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (O - O') = (O - O') \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \stackrel{(5.1)}{=} (O - O') \Rightarrow G' = G$$

---

<sup>1</sup>también llamado **baricentro**

### 5.1.1. Centros de masas parciales.

En muchos casos que veremos a lo largo del curso resultará conveniente subdividir el sistema de partículas original y hallar los centros de masas de cada subsistema, para luego hallar el centro de masas del conjunto.

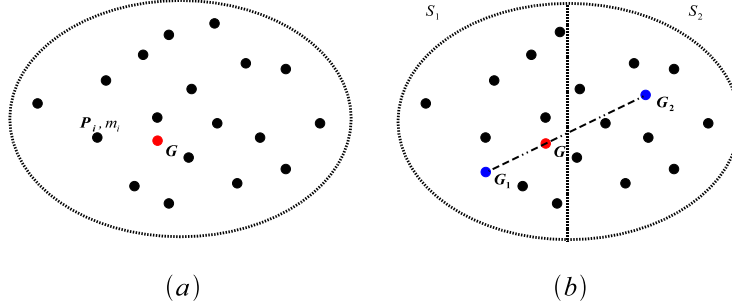


Figura 5.1: (a) Centro de masas de un sistema de partículas (b) Centros parciales de cada subsistema.

El centro de masas ( $G_1$ ) de las partículas que conforman el subsistema  $S_1$  de la figura 5.1 es:

$$G_1 - O = \frac{1}{M_1} \sum_{i \in S_1} m_i (P_i - O), \quad M_1 = \sum_{i \in S_1} m_i$$

y análogamente, el centro de masas del subsistema  $S_2$  es:

$$G_2 - O = \frac{1}{M_2} \sum_{i \in S_2} m_i (P_i - O), \quad M_2 = \sum_{i \in S_2} m_i$$

Por otro lado, descomponiendo la sumatoria en (5.2) tenemos:

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) = \frac{1}{M} \left( \sum_{i \in S_1} m_i (P_i - O) + \sum_{i \in S_2} m_i (P_i - O) \right)$$

y a partir de las definiciones de los centros parciales nos queda:

$$(5.3) \quad G - O = \frac{1}{M_1 + M_2} [M_1(G_1 - O) + M_2(G_2 - O)]$$

es decir, podemos hallar el centro de masas del sistema total como el centro de masas de dos partículas de masas  $M_1$  y  $M_2$  ubicadas en  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Considerando como origen  $O$  uno de los centros parciales, (5.3) pasa a ser:

$$G = G_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} (G_2 - G_1)$$

y como  $0 < \frac{M_2}{M_1+M_2} < 1$ , el centro de masas del sistema estará sobre el segmento que une  $G_1$  con  $G_2$  (figura 5.1.(b)).

### 5.1.2. Sistemas con distribución continua de masa.

#### *Ejemplo.- Barra homogénea*

Consideremos una barra delgada de longitud  $\ell$  y masa  $m$  distribuida homogéneamente (figura 5.2). Sea  $\lambda = \frac{m}{\ell}$  la densidad lineal de masa de la barra; la masa de un diferencial de longitud  $dx$  es:  $dm = \lambda dx$ . Tomando la expresión (5.2) y considerando el pasaje al continuo:  $\sum m_i \rightarrow \int dm$  tenemos:

$$G = O + \frac{1}{m} \int dm \ x \hat{i} = O + \frac{1}{m} \int_0^\ell dx \ \lambda x \hat{i} = O + \frac{\lambda}{m} \int_0^\ell dx \ x \hat{i} = O + \frac{\ell}{2} \hat{i}$$

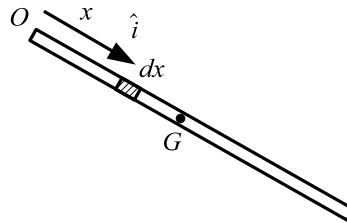


Figura 5.2: Centro de masas de una barra homogénea.

#### *Ejemplo.- Placa triangular homogénea*

Para hallar el baricentro de una placa triangular homogénea, consideremos a la misma formada por tirillas paralelas a uno de sus lados, por ejemplo el  $BC$  de la figura 5.3. Para cada una de estas tirillas, el centro de masas se encuentra en su punto medio. Esto significa que el centro de masas de los centros parciales debe estar sobre la mediana  $AM$  del triángulo. Como se puede inferir lo mismo para las descomposiciones paralelas a los otros dos lados, resulta que el baricentro está sobre la intersección de las medianas del triángulo.

### 5.1.3. Simetrías.

En los casos en que el sistema de partículas tenga alguna simetría en su distribución, la ubicación del centro de masas, o al menos su delimitación, es sencilla:

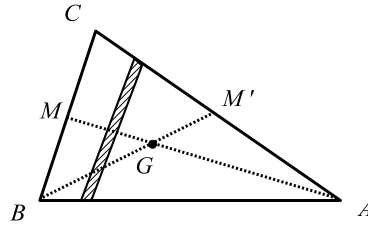


Figura 5.3: Centro de masas de una placa triangular homogénea.

- **Simetría Central.** Un sistema se dice que tiene simetría central con respecto a un punto  $O$  cuando permanece incambiado bajo cualquier *reflexión* con respecto a este punto (por reflexión entendemos el intercambio de una partícula de masa  $m_A$  en un punto  $A$  por una partícula de masa  $m_B$  en un punto  $B$ , tal que  $B-O = -(A-O)$ ). Es inmediato probar que el centro de masas del sistema coincide con el punto  $O$ . Un ejemplo de sistema con esta simetría es una esfera sólida homogénea o una cuya densidad de masa sea función únicamente de la distancia a su centro.
- **Plano de simetría.** Es el caso en que el sistema no cambia bajo reflexiones con respecto a un plano dado. Se puede ver que el centro de masas en este caso está sobre el plano de simetría.
- **Eje de simetría.** En este caso el sistema no cambia bajo una rotación de ángulo arbitrario en torno a un eje. El centro de masas debe entonces caer sobre el eje de simetría.

## 5.2. Momento lineal de un sistema de partículas. Primera cardinal.

El momento lineal de un sistema de partículas se define como la suma de los momentos lineales de cada una de éstas:

$$(5.4) \quad \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Por otro lado, derivando (5.2) tenemos:

$$\dot{G} - \dot{O} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\dot{P}_i - \dot{O}) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i - \dot{O}$$

## 5.2. MOMENTO LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. PRIMERA CARDINAL.67

donde  $\vec{v}_i$  es la derivada del vector posición  $P_i$  de cada partícula seguida sobre su trayectoria, es decir, su velocidad. El centro de masas del sistema tiene su trayectoria definida a partir de la aplicación instantánea de (5.2) para cada partícula del sistema sobre su trayectoria respectiva. En esta medida, la *velocidad del centro de masas* se define como:  $\vec{v}_G = \dot{G}$ .

A partir de la definición (5.4) nos queda entonces:

$$(5.5) \quad \vec{p} = M\vec{v}_G$$

y tenemos el momento lineal del sistema en términos de la velocidad del centro de masas.

Veamos ahora la segunda ley de Newton para el sistema de partículas. Derivando (5.4) con respecto al tiempo tenemos:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \stackrel{(\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i)}{=} \sum_i \vec{F}_i$$

Descompondremos ahora la fuerza sobre cada partícula en términos de las internas-ejercidas por otras partículas del sistema sobre ella- y las fuerzas externas al sistema:

$$(5.6) \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

con lo que tenemos:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \vec{R}^{(ext)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

siendo  $\vec{R}^{(ext)}$  la *resultante* de las fuerzas externas aplicadas al sistema:

$$(5.7) \quad \vec{R}^{(ext)} \equiv \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}$$

Como las fuerzas internas al sistema verifican el principio de acción y reacción:  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior se cancela de a pares, con lo que nos queda la **Primera Cardinal** del sistema:

$$(5.8) \quad \dot{\vec{p}} = M\vec{a}_G = \vec{R}^{(ext)}$$

En particular, si sobre el sistema de partículas la resultante de las fuerzas aplicadas es nula, el momento lineal del sistema se conserva.



### 5.3. Momento angular de un sistema de partículas. Segunda cardinal.

Análogamente al caso del momento lineal, el momento angular de un sistema de partículas con respecto a un punto  $Q$  es la suma de los momentos de cada una de las partículas respecto a ese punto:

$$(5.9) \quad \vec{L}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{p}_i$$

La derivada temporal de la expresión anterior es:

$$\dot{\vec{L}}_Q = \sum_i (\dot{P}_i - \dot{Q}) \times \vec{p}_i + \sum_i (P_i - Q) \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i (\vec{v}_i - \dot{Q}) \times \vec{p}_i + \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i$$

Usando ahora que:  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$  y la descomposición (5.6) para la fuerza sobre cada partícula:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_Q &= -\dot{Q} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i (P_i - Q) \times \left( \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) \\ &\stackrel{(5.4)}{=} \vec{p} \times \dot{Q} + \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j \neq i} (P_i - Q) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es el *momento de las fuerzas externas al sistema* con respecto al punto  $Q$ :

$$(5.10) \quad \vec{M}_Q^{(ext)} \equiv \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

Para el tercer término consideremos la suma de a pares de las partículas:

$$(P_i - Q) \times \vec{F}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{F}_{ji} \stackrel{\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}}{=} (P_i - P_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Si las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema están en la línea de acción de las mismas (*principio de acción y reacción fuerte*), el término anterior es nulo y tenemos la **Segunda Cardinal** para un sistema de partículas:

$$(5.11) \quad \dot{\vec{L}}_Q = \vec{p} \times \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}$$

#### Observación:

Para los casos en que se cumpla alguna de las siguientes:

- $Q = G$
- $\dot{Q} = 0$
- $\dot{Q} \parallel \vec{v}_G$

la segunda cardinal toma una forma más sencilla:

$$(5.12) \quad \dot{\vec{L}}_Q = \vec{M}_Q^{(ext)}$$

A pesar de la ventaja de eliminar las fuerzas internas en su planteo, las cardinales (5.8) y (5.11) no son en general suficientes para determinar el movimiento de un sistema de partículas; son 6 ecuaciones para determinar el movimiento de  $N$  partículas, lo que implica hallar  $3N$  incógnitas, asociadas a los 3 grados de libertad de cada partícula. Sin embargo, en el caso de un sistema rígido, las dos cardinales son suficientes ya que como veremos, alcanza con especificar 6 coordenadas para dar su configuración espacial.

### 5.3.1. Cambio de punto de aplicación de momentos.

Tanto en el caso del momento angular (5.9) como en el momento de las fuerzas externas (5.10) necesitamos dar un punto de referencia ( $Q$ ). Consideremos la definición del momento de las fuerzas externas al sistema (5.10) para un punto  $Q_1$  arbitrario:

$$\vec{M}_{Q_1}^{(ext)} = \sum_i (P_i - Q_1) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

Introducimos convenientemente un término (nulo)  $Q_2 - Q_2$  y operamos:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{Q_1}^{(ext)} &= \sum_i (P_i - Q_1 + (Q_2 - Q_2)) \times \vec{F}_i^{(ext)} \\ &= \sum_i (P_i - Q_2) \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i (Q_2 - Q_1) \times \vec{F}_i^{(ext)} \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + (Q_2 - Q_1) \times \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \\ &\stackrel{(5.7)}{=} \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + (Q_2 - Q_1) \times \vec{R}^{(ext)} \end{aligned}$$

Finalmente, usando la anticonmutatividad del producto vectorial ( $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ):

$$(5.13) \quad \vec{M}_{Q_1}^{(ext)} = \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + \vec{R}^{(ext)} \times (Q_1 - Q_2)$$

Análogamente:

$$(5.14) \quad \vec{L}_{Q_1} = \vec{L}_{Q_2} + \vec{p} \times (Q_1 - Q_2)$$

## 5.4. Energía de un sistema de partículas.

### 5.4.1. Energía cinética.

La energía cinética de un sistema corresponde a la suma de las contribuciones de cada una de las partículas constituyentes:

$$(5.15) \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

Podemos escribir la posición  $P_i$  de cada partícula en términos de la posición relativa al centro de masas del sistema:

$$P_i = G + \vec{\rho}_i$$

siendo  $\vec{\rho}_i$  la posición de la partícula  $i$  relativa a  $G$ . Derivando la expresión anterior tenemos:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i$$

y sustituyendo en (5.15) nos queda:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G^2 + \dot{\vec{\rho}}_i^2 + 2\vec{v}_G \cdot \dot{\vec{\rho}}_i) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2 + \vec{v}_G \cdot \left( \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i \right) \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2 + \vec{v}_G \cdot \left( \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i \right) \end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior resulta ser nulo en virtud de:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) \stackrel{(5.2)}{=} 0 \Rightarrow \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

(dicho de otra forma, la posición del centro de masas relativa al centro de masas es el vector nulo). Finalmente, la energía cinética del sistema toma esta forma:

$$(5.16) \quad T = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

conocida también como *Teorema de König* que establece que la energía cinética de un sistema de partículas se puede descomponer en la suma de (i) la energía cinética de una partícula ficticia moviéndose con el centro de masas del sistema y cuya masa es la masa total del sistema y (ii) la energía cinética del movimiento de las partículas relativo al centro de masas.

### 5.4.2. Conservación de la energía.

Partiendo de la expresión (5.15), la variación de energía cinética de un sistema de partículas es:

$$(5.17) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \equiv \mathcal{P}$$

donde definimos la *potencia* ( $\mathcal{P}$ ) del conjunto de fuerzas que actúan sobre el sistema. En este punto, la distinción entre fuerzas internas y externas al sistema no resulta ser la más útil; aún cuando (via el principio de acción y reacción fuerte) podamos asegurar la conservación del momento lineal y angular de un sistema de partículas, nada podemos decir acerca de la conservación de la energía del sistema, ya que estas fuerzas pueden realizar trabajo. Siguiendo lo visto en 3.2.3 distinguiremos entonces entre (i) fuerzas conservativas (aquellas que derivan de un potencial) (ii) fuerzas de potencia nula (fuerzas no conservativas que no realizan trabajo conjunto) (iii) fuerzas residuales (no conservativas que realizan trabajo):

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(cons)} + \vec{F}_i^{(P\ nula)} + \vec{F}_i^{(res)}$$

La potencia de este conjunto de fuerzas será, de acuerdo con (5.17):

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{(cons)} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i$$

Usando ahora que las fuerzas conservativas provienen de una energía potencial  $U$ :

$$\vec{F}_i^{(cons)} = -\nabla_i U$$

(donde  $\nabla_i$  es el gradiente sobre las coordenadas espaciales asociadas a  $P_i$ ), la potencia es:

$$\mathcal{P} = -\sum_i \nabla_i U \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i = -\sum_i \nabla_i U \cdot \frac{dP_i}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i$$

Los términos  $\nabla_i U \cdot dP_i$  corresponden a las variaciones de  $U$  en la dirección de cambio de  $P_i$ :  $dU_i$ . La suma de todos ellos es entonces la variación de energía potencial del sistema ( $dU$ ) y (5.17) queda:

$$(5.18) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i \Leftrightarrow \frac{d(T+U)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i \equiv \mathcal{P}^{(res)}$$

la variación de la energía  $E = T + U$  del sistema se corresponde entonces con la potencia de las fuerzas residuales:

$$(5.19) \quad \frac{dE}{dt} = \mathcal{P}^{(res)}$$

y en la medida en que la potencia de las fuerzas residuales sea nula, la energía del sistema se conservará.

**Ejemplos.-**

Como extensión del caso visto en 3.2.2 acerca de un resorte, en el que calculamos la energía potencial suponiendo que uno de los extremos se mantenía fijo, consideremos ahora que el extremo  $O$  también se mueve; la fuerza elástica sigue siendo conservativa pero en este caso debemos considerar el trabajo hecho por la fuerza  $\vec{F}$  en  $P$  y la fuerza  $-\vec{F}$  en  $O$  en un cambio de configuración  $C$  (los extremos se mueven cada uno sobre cierta trayectoria):

$$W_{C_A \rightarrow C_B} = \int_{C_A}^{C_B} (\vec{F} \cdot dP + (-\vec{F}) \cdot dO) = \int_{C_A}^{C_B} \vec{F} \cdot d(P - O) = \int_{\ell_A}^{\ell_B} -k(\ell - \ell_0) d\ell$$

De lo que resulta que si nuestro sistema involucra a las dos partículas, la fuerza elástica -que es interna a este sistema- es conservativa y con un potencial dado por 3.12.

Podemos encontrar ejemplos de fuerzas de potencia nula así como de residuales en las reactivas internas al sistema formado por una partícula y la guía rugosa sobre la que ésta se mueve. Comencemos por ver la potencia de la normal, que involucra a la fuerza  $\vec{N}$  actuando sobre una partícula de velocidad  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$  y a la reacción de ella, actuando sobre un punto de la guía que tiene velocidad  $\vec{v}_T$ :

$$\mathcal{P}_N = \vec{N} \cdot \vec{v} + (-\vec{N}) \cdot \vec{v}_T = \vec{N} \cdot (\vec{v}' + \vec{v}_T - \vec{v}_T) = \vec{N} \cdot \vec{v}' = 0$$

por lo que la normal es de potencia nula *para el sistema*.

Para el cálculo de la potencia de la tangencial debemos tomar en cuenta a la fuerza  $\vec{T}$  actuando sobre la partícula y a su reacción actuando sobre la guía:

$$\mathcal{P}_T = \vec{T} \cdot \vec{v} + (-\vec{T}) \cdot \vec{v}_T = \vec{T} \cdot (\vec{v}' + \vec{v}_T) + (-\vec{T}) \cdot \vec{v}_T = -|\vec{T}| |\vec{v}'|$$

que resulta siempre negativa.

# Capítulo 6

## Cinemática del Rígido.

### Introducción.

Un *cuerpo rígido* es un sistema de partículas ( $S$ ) cuyas distancias mutuas se mantienen constantes durante el movimiento del sistema:

$$\forall P, Q \in S \quad \mathbf{d}_{PQ} = |P - Q| = cte.$$

A efectos de describir la posición de un sistema rígido en el espacio, son necesarias tan solo 6 coordenadas. Podemos, por ejemplo, comenzar por especificar las coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1, z_1)$  de un punto  $\mathbf{P}_1$  del rígido. Cualquier punto  $\mathbf{P}_2$  a una distancia  $\mathbf{d}_{12}$  de  $\mathbf{P}_1$  estará sobre la superficie esférica de radio  $\mathbf{d}_{12}$  centrada en  $(x_1, y_1, z_1)$ . Podemos ubicar a  $\mathbf{P}_2$  sobre esta esfera utilizando 2 coordenadas, como ser los ángulos de coordenadas esféricas  $\theta_2$  y  $\varphi_2$  con respecto a un sistema de coordenadas centrado en  $(x_1, y_1, z_1)$ . Cualquier tercer punto  $\mathbf{P}_3$  a distancias  $\mathbf{d}_{13}$  y  $\mathbf{d}_{23}$  de  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  respectivamente, y que no pertenezca a la recta que pasa por estos puntos, estará sobre la circunferencia que resulta de intersectar la superficie esférica con centro en  $\mathbf{P}_1$  y radio  $\mathbf{d}_{13}$  con la superficie esférica con centro en  $\mathbf{P}_2$  y radio  $\mathbf{d}_{23}$ . Para ubicar a  $\mathbf{P}_3$  sobre esta circunferencia se necesita una coordenada. Se necesitan entonces 6 coordenadas para especificar las posiciones de 3 puntos del rígido no colineales. Una vez ubicados, la posición de cualquier otro punto del rígido está bien determinada.

Los puntos (arbitrarios a menos de su no colinealidad)  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  determinan un sistema de referencia solidario al rígido, con una base ortonormal que se puede construir así:

- Uno de los versores (llamémosle  $\hat{i}$ ) de la base del sistema corresponde al vector  $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$  normalizado.

- Otro versor ( $\hat{j}$ ) se elige ortogonal al subespacio subtendido por  $\hat{i}$  y el vector  $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1$ .
- El versor restante ( $\hat{k}$ ) se define como:  $\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$ .

Las 6 coordenadas que se necesitan para especificar la configuración del rígido pueden corresponder entonces a las 3 coordenadas de posición de un punto  $(x_1, y_1, z_1)$  del rígido y las 3 coordenadas necesarias para dar la orientación del sistema de referencia con respecto a un referencial fijo<sup>1</sup>.

## 6.1. Distribución de velocidades y aceleraciones.

Al vector velocidad angular del referencial solidario al rígido lo llamaremos también *velocidad angular del rígido*  $\vec{\omega}$  y satisface (ver capítulo sobre Cinemática de la Partícula):

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{i}}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{i} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{j} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{k} \end{aligned}$$

Definida la velocidad angular, consideremos cómo relacionar las velocidades de dos puntos cualesquiera del rígido. Sean  $P, Q$  esos dos puntos. La relación entre la derivada absoluta y relativa al rígido para un vector  $\vec{A}$  es (ver nuevamente capítulo sobre Cinemática de la Partícula):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Tomando  $\vec{A} = P - Q$  y usando que a partir de la definición misma de rígido la derivada relativa de  $P - Q$  es nula, se obtiene la ***distribución de velocidades de un rígido***:

$$(6.2) \quad \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q)}$$

Dada la velocidad de un punto  $P$  del rígido, la velocidad de otro cualquiera del mismo rígido se puede hallar siguiendo la distribución anterior.

Derivando nuevamente en el tiempo, se obtiene la ***distribución de aceleraciones de un rígido***:

$$(6.3) \quad \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \times (P - Q) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - Q))}$$

<sup>1</sup>ver Ángulos de Euler al final del capítulo

## 6.2. Rodadura sin deslizamiento.

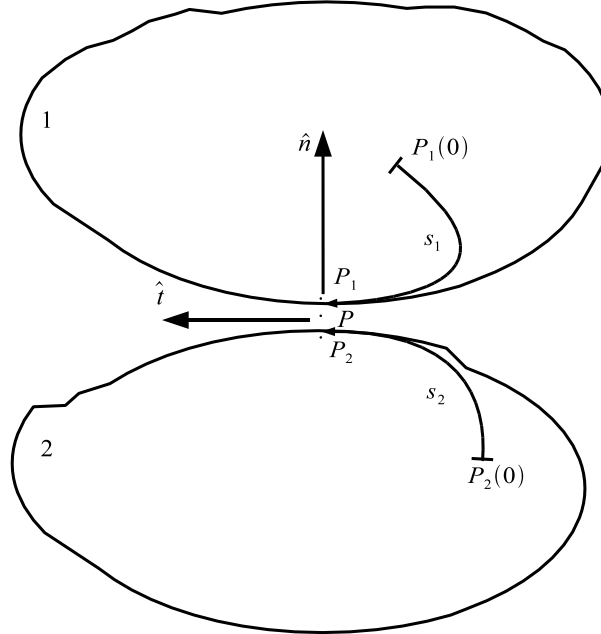


Figura 6.1: Rodadura sin deslizamiento. Los rígidos se muestran separados para distinguir con mayor claridad los puntos de contacto referidos en el texto.

Consideremos dos rígidos (1 y 2) en contacto como los de la figura 6.1. Sea  $P_1$  el punto del rígido 1 en contacto con el rígido 2 y  $P_2$  el punto del rígido 2 en contacto con el rígido 1. Si trazamos por cada uno de estos puntos el plano tangente común a los dos rígidos y llamamos  $\hat{n}$  a la normal a este plano, la condición de que los rígidos estén en contacto es que sus velocidades en la dirección normal sean iguales:

$$(\vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_2}) \cdot \hat{n} = 0$$

Si además de estar en contacto los rígidos están *rodando sin deslizar* uno respecto al otro, la igualdad de velocidades se dará también para las componentes tangenciales, por lo que podemos decir que las velocidades de  $P_1$  y  $P_2$  son iguales:

$$(6.4) \quad \vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_2}$$

### Observación:

Cabe preguntarse en la definición (6.4) por qué se distingue entre  $P_1$  y  $P_2$  cuando *geoméricamente* estamos hablando del mismo punto de contacto entre los



dos rígidos. La respuesta está justamente en que geoméricamente hablando  $P_1$  y  $P_2$  ocupan en el instante de análisis el mismo punto del espacio, pero en cuanto a su velocidad, que se define a partir de la *trayectoria* seguida por cada punto,  $P_1$  viene moviéndose solidario a un rígrado y  $P_2$  a otro completamente distinto. Lo que establece la condición de rodadura sin deslizamiento es una relación entre las velocidades del punto de contacto de cada rígrado con el otro en el instante de contacto y nada más. Particularmente, no está hablando de la velocidad del punto de contacto  $P$ , que no tiene porqué ser solidario a alguno de los dos rígrados.  $P_1$  y  $P_2$  coinciden en el instante considerado con el punto  $P$  del espacio cuya velocidad llamaremos  $\dot{P}$ .

**Nomenclatura:** Aún cuando no hayamos hecho distinción alguna entre las nomenclaturas  $\dot{P}$  y  $\vec{v}_P$  para referirnos a la velocidad de un punto, reservaremos de ahora en más  $\vec{v}_P$  para referirnos a la velocidad de los puntos pertenecientes a un rígrado y usaremos  $\dot{P}$  en otro caso.<sup>2</sup>

*Formulación equivalente de la rodadura sin deslizamiento.* Una forma análoga a (6.4) para escribir la condición de rodadura sin deslizamiento surge de considerar las curvas que contienen a los puntos de cada rígrado que son instantáneamente de contacto con el otro. Es decir, el punto  $P$  traza sobre el rígrado 1 una curva de largo  $s_1$ . La velocidad de  $P$  relativa al rígrado 1 es (de acuerdo a (1.20)):

$$\vec{V}_{R_1}(P) = \dot{s}_1 \hat{t}_1$$

Por otro lado, la velocidad de transporte  $\vec{V}_{T_1}(P)$  de  $P$  es la velocidad del punto del rígrado 1 con el que  $P$  coincide instantáneamente, es decir:

$$\vec{V}_{T_1}(P) = \vec{v}_{P_1}$$

La velocidad de  $P$  es entonces (según (1.37)):

$$\dot{P} = \vec{V}_{R_1}(P) + \vec{V}_{T_1}(P) = \dot{s}_1 \hat{t}_1 + \vec{v}_{P_1}(P)$$

Haciendo el mismo análisis desde el rígrado 2 nos queda:

$$\dot{P} = \dot{s}_2 \hat{t}_2 + \vec{v}_{P_2}(P)$$

y como  $\dot{P}$  debe ser igual para las dos expresiones anteriores, y suponiendo que se verifica la condición de rodadura sin deslizamiento (6.4):

$$\hat{t}_1 = \hat{t}_2 = \hat{t}$$

$$\dot{s}_1 = \dot{s}_2$$

---

<sup>2</sup>la aclaración previa a (5.5) ya apuntaba en este sentido a distinguir entre la velocidad de un punto con una identidad material definida como es el centro de masas  $G$ , que se define instantáneamente a partir de las velocidades de las partículas constituyentes del sistema y para la cual usamos  $\vec{v}_G$ , y la velocidad de un punto cualquiera de referencia como era el caso de  $O$ , para el cual se mantuvo  $\dot{O}$  como notación de su velocidad.

Considerando que en el comienzo los orígenes  $(P_1(0), P_2(0))$  de cada curva coinciden, las longitudes de las curvas deben ser iguales:

$$(6.5) \quad s_1 = s_2$$

Es decir, a medida que pasa el tiempo, los puntos de cada rígido que son sucesivamente de contacto van trazando curvas de igual longitud en cada uno de ellos (ver el ejemplo de rodadura sin deslizamiento para un disco).

### 6.3. Movimiento Plano.

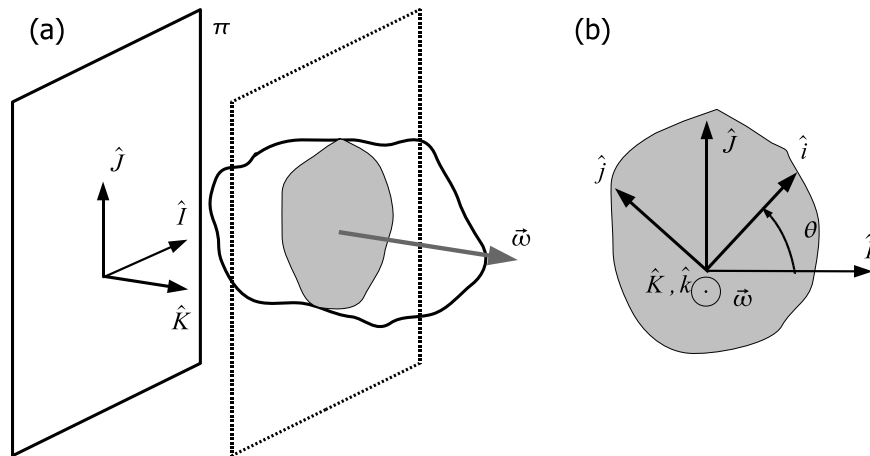


Figura 6.2: (a) Movimiento plano de un rígido (b) Problema bidimensional equivalente.

Consideremos el caso particular de un rígido que experimenta un *movimiento plano* (figura 6.2), es decir, dada la normal  $(\hat{K})$  a cierto plano  $\pi$ , uno de los versores del sistema solidario al rígido (sea  $\hat{k}$ ) se mantiene siempre paralelo a  $\hat{K}$  y los puntos que pertenecen a una sección del rígido paralela a  $\pi$ , siempre permanecen en dicha sección. Cualquier sección del rígido a través de un plano paralelo a  $\pi$  es de por sí un rígido bidimensional. Estudiar el movimiento de este rígido bidimensional es equivalente a estudiar el movimiento del rígido en su totalidad. Además, la velocidad angular del rígido es perpendicular a la sección estudiada y se puede hallar considerando la variación de un ángulo en el tiempo (ver capítulo sobre Cinemática de la Partícula). Sea  $\theta$  el ángulo que forma el versor  $\hat{i}$  del sistema solidario al rígido

con el versor  $\hat{I}$  fijo. Las derivadas temporales de los versores del sistema rígido son:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{dt} &= \dot{\theta}\hat{j} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{i} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

que comparando con (1.33) nos da  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{K}$ . La velocidad angular del rígido es entonces perpendicular al plano, se halla a partir de la tasa de variación de un ángulo ( $\theta$ ) y su sentido respeta la regla de la mano derecha para el giro del rígido.

### 6.3.1. Ejemplo: Disco rodando sin deslizar.

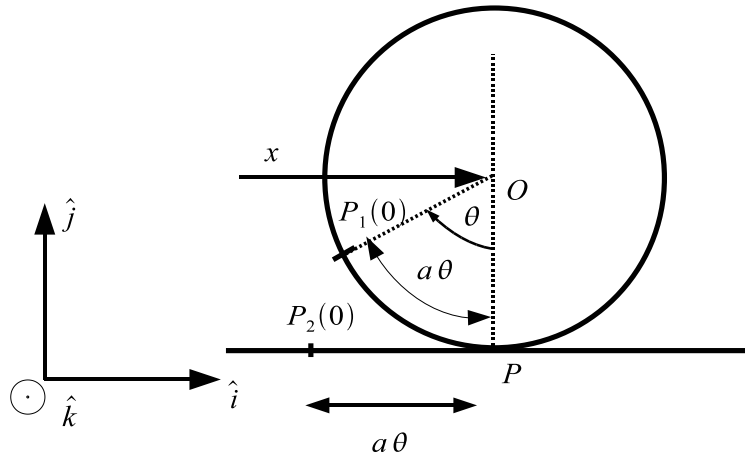


Figura 6.3: Disco rodando sin deslizar.

Consideremos como ejemplo de movimiento plano el caso de un disco de radio  $a$  que se mueve en contacto con una línea fija. En un instante dado, el punto del disco en contacto con la línea es  $P$  (ver figura 6.3). Como la línea permanece en reposo, el punto de ella que es instantáneamente de contacto tiene velocidad nula, lo que a partir de (6.4) implica  $\vec{v}_P = 0$ . Sea  $x$  la abscisa de la posición del centro del disco ( $O$ ). La velocidad del centro es:  $\vec{v}_O = \dot{x}\hat{i}$ . A partir de la distribución de velocidades entre puntos del rígido (6.2) tenemos:

$$0 = \vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (P - O) = \dot{x}\hat{i} + \vec{\omega} \times (-a\hat{j})$$

El ángulo  $\theta$  definido en la figura 6.3 corresponde al cambio de orientación de los ejes de un sistema de coordenadas solidario al disco con respecto a una dirección fija (en este caso la vertical), por lo que la velocidad angular del disco es:

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}$$

y tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}\hat{i} + \dot{\theta}\hat{k} \times a\hat{j} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\hat{i} \\ &\Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta} \end{aligned}$$

que integrando resulta:

$$x = a\theta$$

(suponiendo  $x(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ ). La rodadura sin deslizamiento establece entonces un vínculo entre las coordenadas  $x$  y  $\theta$  que es equivalente en este caso a (6.5).

A partir de la distribución de aceleraciones (6.3) podemos obtener la aceleración del punto de contacto:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \\ &= \ddot{x}\hat{i} - \ddot{\theta}\hat{k} \times (-a\hat{j}) + \dot{\theta}\hat{k} \times (\dot{\theta}\hat{k} \times (-a\hat{j})) \\ &= \ddot{x}\hat{i} - a\ddot{\theta}\hat{i} + a\dot{\theta}^2\hat{j} \\ &= a\dot{\theta}^2\hat{j} \end{aligned}$$

Por otro lado, la velocidad del punto  $P$  que es instantáneamente de contacto entre el disco y la línea es:

$$\dot{P} = \dot{x}\hat{i} \neq 0$$

y su aceleración:

$$\ddot{P} = \ddot{x}\hat{i} \neq a\dot{\theta}^2\hat{j}$$

### 6.3.2. Centro instantáneo de rotación.

Así como en el ejemplo anterior existe un punto del rígido con velocidad nula (el punto de contacto) cabe preguntarse si para cualquier movimiento plano se cumplirá lo mismo. Supongamos que  $I$  es ese punto; en relación a un punto genérico  $P$  del rígido se cumple:

$$0 = \vec{v}_I = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (I - P) \Leftrightarrow \vec{v}_P = -\vec{\omega} \times (I - P)$$

Consideremos ahora el producto vectorial de la ecuación anterior con  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (I - P))$$

que usando la siguiente igualdad vectorial:

$$(6.6) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

nos queda:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = -(\vec{\omega} \cdot (I - P))\vec{\omega} + \vec{\omega}^2(I - P)$$

y como la velocidad angular es perpendicular al plano donde se encuentran los puntos:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{v}_P &= \vec{\omega}^2(I - P) \stackrel{\text{si } \vec{\omega} \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ I &= P + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_P \end{aligned}$$

El punto  $I$ , que podemos hallar a partir de la velocidad de un punto cualquiera del rígido, recibe el nombre de *centro instantáneo de rotación* ya que vista desde él, la velocidad de cualquier punto del rígido se corresponde instantáneamente con la de una rotación pura con la velocidad angular del rígido y con centro en  $I$  (ver figura 6.4(a)):

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - I)$$

A partir de (6.7) se puede ver que  $I$  está sobre la perpendicular a  $\vec{v}_P$  que pasa por el punto  $P$ ; supongamos el caso en que conocemos la dirección de la velocidad de dos puntos ( $A$ ,  $B$ ) del rígido (como en el caso de la barra de la figura 6.4(b) que se mueve con sus dos extremos en contacto con la pared y el piso); el centro instantáneo de rotación es el punto de intersección de las perpendiculares por  $A$  y  $B$  definidas anteriormente.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Note que para este caso el punto  $I$  no está sobre el cuerpo que llamamos barra sino sobre la *extensión rígida* de este cuerpo, es decir, el conjunto de puntos que se mueve manteniendo constantes las distancias a todos los puntos del rígido definido.

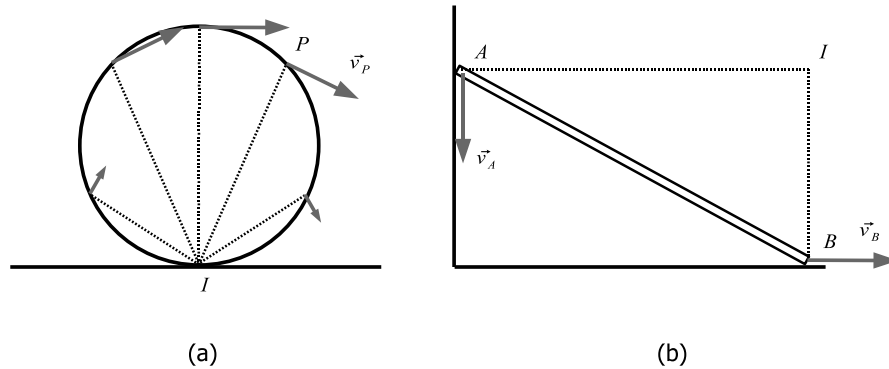


Figura 6.4: Centro instantáneo de rotación para (a) disco que rueda sin deslizar (b) barra apoyada en pared y piso.

## 6.4. Ejemplos de movimiento del rígido en el espacio.

### 6.4.1. Placa cuadrada girando alrededor de un eje.

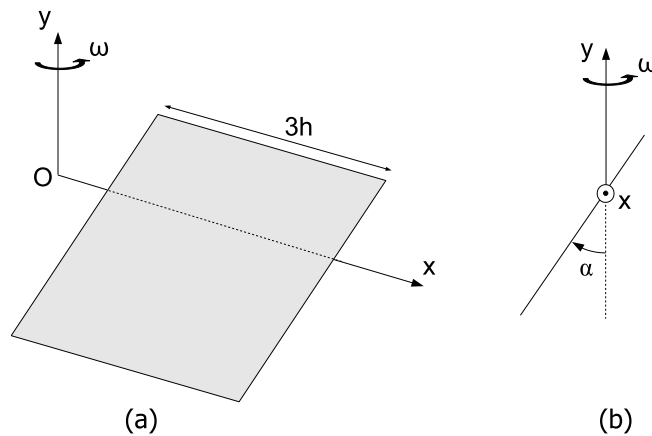


Figura 6.5: (a) Placa cuadrada girando libremente (b) Vista lateral.

Consideremos como ejemplo de movimiento de un rígido en el espacio, una placa cuadrada homogénea de lado  $3h$  (ver figura 6.5(a)) que puede girar libremente alrededor del eje  $Ox$  horizontal, el cual a su vez gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del eje  $Oy$  vertical (*examen diciembre 2007*). Nos preguntamos ahora

cuál es la velocidad angular de la placa. Para especificar la configuración espacial de la placa basta con dar, por ejemplo, el ángulo  $\alpha$  que forma la misma con respecto a la vertical (figura 6.5(b)). La velocidad angular de la placa *relativa* al sistema  $\{O, \hat{x}, \hat{y}\}$  es  $-\dot{\alpha}\hat{x}$ . Por otro lado, la velocidad angular de este sistema es  $\omega\hat{y}$ . Aplicando el Teorema de Adición de Velocidades Angulares resulta que la velocidad angular de la placa es:

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha}\hat{x} + \omega\hat{y}$$

#### 6.4.2. Esfera rodando sin deslizar.

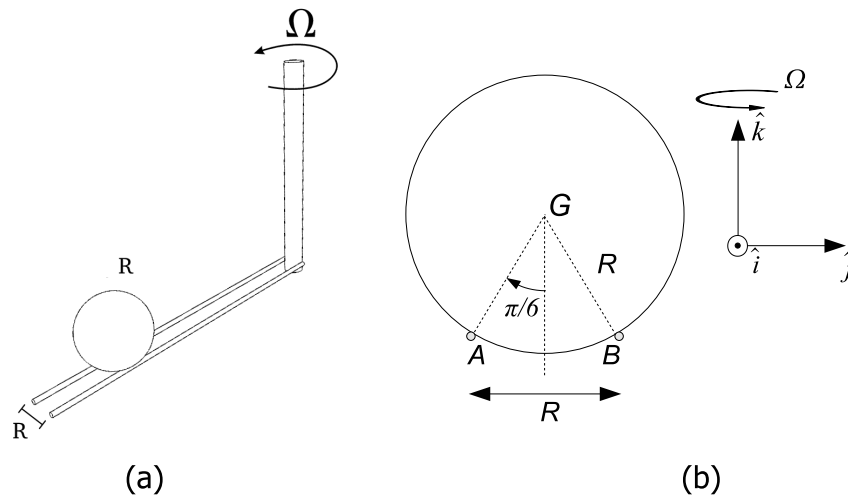


Figura 6.6: (a) Esfera rodando sin deslizar sobre varillas en movimiento (b) Sistema de coordenadas.

Consideremos ahora el caso de la figura 6.6(a) (*examen diciembre 2008*) donde una esfera de radio  $R$  rueda sin deslizar sobre dos varillas separadas una distancia  $R$ . Las varillas están en un plano horizontal y soldadas a un cilindro vertical que gira con velocidad angular  $\Omega$  constante. Nos preguntamos cómo escribir la velocidad angular de la esfera en términos de la distancia ( $x$ ) del centro de la esfera al eje del cilindro. Consideremos en primera instancia el sistema de coordenadas  $\{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  solidario al cilindro y las varillas donde  $O$  es un punto del eje (figura 6.6(b)). Con respecto a este sistema móvil, los puntos de contacto de la esfera con las varillas ( $A$  y  $B$ ) están quietos. A partir de (6.2) resulta que la velocidad angular de la esfera

relativa al sistema móvil debe ser colineal con  $AB$ :  $\omega_y \hat{j}$ . Si la velocidad del centro ( $G$ ) es  $\dot{x}\hat{i}$ , la condición de rodadura sin deslizamiento equivale entonces a

$$\dot{x} = R \cos \frac{\pi}{6} \omega_y$$

Apelando ahora al Teorema de Adición de Velocidades Angulares, la velocidad angular de la esfera se puede escribir como la suma de la velocidad angular relativa al sistema móvil y la velocidad angular del sistema ( $\Omega \hat{k}$ ):

$$\vec{\omega} = \omega_y \hat{j} + \Omega \hat{k}$$

lo que resulta en

$$\vec{\omega} = \frac{2\dot{x}}{\sqrt{3}R} \hat{j} + \Omega \hat{k}$$

## 6.5. Ángulos de Euler.

En los ejemplos vistos anteriormente necesitamos especificar la velocidad angular de un rígido recurriendo a la adición de velocidades angulares para sistemas convenientemente elegidos según cada problema. La descripción de la orientación de un rígido mediante los *Ángulos de Euler* permite dar sistemáticamente la velocidad angular del mismo. En la figura 6.7 se muestran estos ángulos. Sean  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  los ejes del sistema solidario al rígido y  $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$  los del sistema fijo.  $\theta$  es el ángulo entre  $\hat{k}$  y  $\hat{K}$ . Sobre la intersección de los planos  $O\hat{I}\hat{J}$  y  $O\hat{i}\hat{j}$  está la *línea de nodos*  $\hat{\xi}$  orientada de forma tal que la rotación alrededor de ella que lleva de  $\hat{K}$  a  $\hat{k}$  sea positiva.  $\varphi$  es el ángulo entre  $\hat{\xi}$  e  $\hat{I}$ . Finalmente,  $\psi$  es el ángulo entre  $\hat{i}$  y  $\hat{\xi}$ .

La sucesión de transformaciones que lleva del sistema fijo al rígido son, de acuerdo a las definiciones de los ángulos, las siguientes rotaciones simples:

- Rotación de ángulo  $\varphi$  alrededor de  $\hat{K}$ .
- Rotación de ángulo  $\theta$  alrededor de  $\hat{\xi}$ .
- Rotación de ángulo  $\psi$  alrededor de  $\hat{k}$ .

Consecuentemente, la velocidad angular del rígido se puede escribir como:

$$(6.8) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{K} + \dot{\theta} \hat{\xi} + \dot{\psi} \hat{k}$$



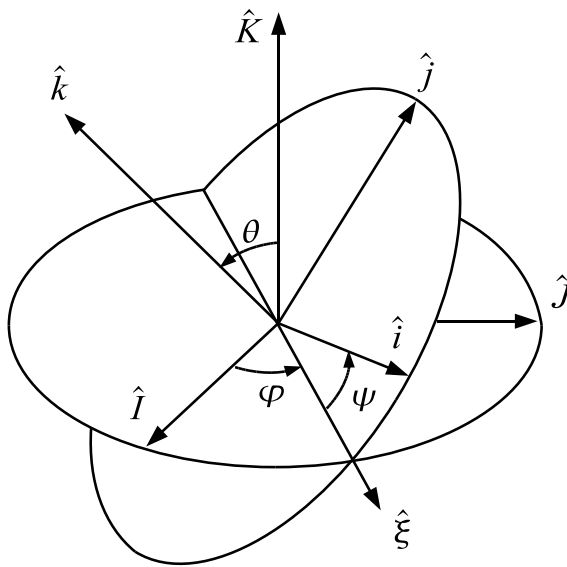


Figura 6.7: Ángulos de Euler.

# Capítulo 7

## Cinética del Rígido.

### Introducción.

En el capítulo anterior estudiamos las propiedades de un rígido en cuanto al movimiento de los puntos que lo conforman sin preocuparnos por la masa de los mismos. Estudiaremos entonces ahora las propiedades de un sistema rígido en cuanto a su distribución de masa.

### 7.1. Momento Angular de un Rígido.

De acuerdo con (5.9), el momento angular de un sistema de partículas  $S$  con respecto a un punto  $Q$  es:

$$\vec{L}_Q = \sum_{i \in S} (P_i - Q) \times m_i \vec{v}_i$$

Consideremos ahora un rígido. Sea  $\vec{v}_Q$  la velocidad del punto del rígido que coincide instantáneamente con  $Q$ . A partir de la distribución de velocidades para puntos de un rígido (6.2) tenemos:

$$(7.1) \quad \vec{v}_i = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)$$

y el momento angular se puede escribir:

$$\begin{aligned} \vec{L}_Q &= \sum_{i \in S} (P_i - Q) \times m_i (\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)) \\ &= \left[ \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q) \right] \times \vec{v}_Q + \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q) \times (\vec{\omega} \times (P_i - Q)) \end{aligned}$$

Usando ahora la definición de centro de masas de un sistema (5.2) se puede modificar el primer término del lado derecho de la ecuación anterior:

$$(7.2) \quad \vec{L}_Q = M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q) \times (\vec{\omega} \times (P_i - Q))]$$

donde  $M$  es la masa total del rígido y  $G$  su centro de masas. Recordemos ahora la expresión para el triple producto vectorial (6.6):

$$(7.3) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Con esta relación podemos desarrollar el segundo término del lado derecho de (7.2):

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \vec{L}_Q &= M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \vec{\omega} - ((P_i - Q) \cdot \vec{\omega})(P_i - Q)] \\ &= M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \left( \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q)^2 \right) \vec{\omega} - \sum_{i \in S} m_i ((P_i - Q) \cdot \vec{\omega})(P_i - Q) \end{aligned}$$

### Operadores lineales y producto Tensorial.

El segundo y tercer término del lado derecho de (7.4) corresponden a una operación lineal sobre el vector velocidad angular. Para un operador lineal arbitrario  $\overleftrightarrow{\mathbb{T}}$ , los elementos  $T_{\alpha\beta}$  de la matriz  $\mathbf{T}$  que lo representa en una base ortonormal dada  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  son:

$$(7.5) \quad T_{\alpha\beta} = \left( \overleftrightarrow{\mathbb{T}} \hat{e}_\beta \right)_\alpha$$

de manera que la matriz  $\mathbf{T}$  resulta:

$$(7.6) \quad \mathbf{T}^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

El *producto tensorial*  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  entre dos vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  es un operador lineal no conmutativo que se define a partir de la aplicación del mismo sobre un tercer vector  $\vec{x}$ :

$$(7.7) \quad [\vec{a} \otimes \vec{b}] \vec{x} \equiv (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a}$$

Si  $\mathbf{c}$  es la matriz que representa al producto tensorial, sus componentes serán, según (7.5) y (7.7):

$$(7.8) \quad c_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta$$

Por lo que la representación matricial del producto tensorial es:

$$(7.9) \quad \mathbf{c}^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Este conjunto ordenado de 9 elementos es la representación matricial de un *tensor* de rango 2. Veremos más adelante que no cualquier conjunto de 9 elementos define a un tensor, sino que sus propiedades de transformación bajo cambios de coordenadas lo hacen, lo mismo que sucede para un vector<sup>1</sup>.

A partir de la definición dada para el producto tensorial entre vectores, el último término del lado derecho de (7.4) se puede entonces reescribir como:

$$\sum_{i \in S} m_i ((P_i - Q) \cdot \vec{\omega})(P_i - Q) = \left[ \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) \right] \vec{\omega}$$

Por lo que el momento angular del rígido (7.4) resulta:

$$(7.10) \quad \boxed{\vec{L}_Q = M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q \vec{\omega}}$$

donde  $\mathbb{I}_Q$  es el *tensor de inercia* del rígido con respecto al punto  $Q$ :

$$(7.11) \quad \mathbb{I}_Q = \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \mathbb{1} - (P_i - Q) \otimes (P_i - Q)]$$

( $\mathbb{1}$  es el operador identidad). Las componentes  $\alpha\beta$  de este tensor en una base ortogonal  $\{\hat{e}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$  son:

$$(7.12) \quad (I_Q)_{\alpha\beta} = \sum_i \{m_i (P_i - Q)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i (P_i - Q)_\alpha (P_i - Q)_\beta\}$$

donde usamos la *delta de Kronecker*:

$$(7.13) \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Consideremos la aplicación particular del tensor de inercia sobre el versor  $\hat{u}$  que identifica a un eje que pasa por el punto  $Q$ . Definimos el *momento de inercia* alrededor del eje  $\hat{u}$  que pasa por  $Q$  como:

$$(7.14) \quad I_{Q, \hat{u}} = \hat{u} \cdot \mathbb{I}_Q \hat{u}$$

<sup>1</sup>un vector es un tensor de rango 1, así como un escalar es un tensor de rango 0

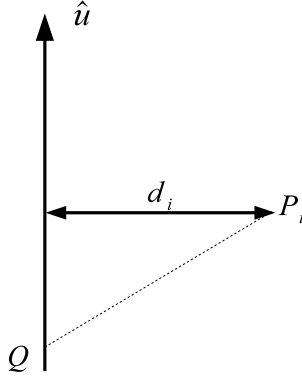


Figura 7.1: Momento de inercia.

y que como veremos a continuación es el mismo para todos los puntos del mismo eje. Para demostrar lo anterior sustituyamos la expresión (7.11) para el tensor:

$$\begin{aligned}
 \hat{u} \cdot \mathbb{I}_Q \hat{u} &= \hat{u} \cdot \left\{ \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \mathbb{1} \hat{u} - (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) \hat{u}] \right\} \\
 &\stackrel{(7.7)}{=} \hat{u} \cdot \left\{ \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \hat{u} - ((P_i - Q) \cdot \hat{u})(P_i - Q)] \right\} \\
 &= \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \hat{u} \cdot \hat{u} - ((P_i - Q) \cdot \hat{u})((P_i - Q) \cdot \hat{u})] \\
 &= \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 - ((P_i - Q) \cdot \hat{u})^2]
 \end{aligned}$$

Se puede ver, de acuerdo a la figura 7.1, que la expresión entre paréntesis rectos de la última igualdad corresponde a la distancia de la  $i$ -ésima partícula del rígido al eje  $\hat{u}$ :

$$(7.15) \quad I_{Q, \hat{u}} = \sum_{i \in S} m_i d_i^2$$

El momento de inercia es entonces una cantidad (definida positiva) propia de la distribución de masa alrededor de un eje dado (el punto  $Q$  sólo sirve para indicar un punto por donde pasa ese eje).

### ***Ejemplo- masas coplanares (parte I).***

El rígido de la figura 7.2 (*examen agosto 2008*) está formado por dos masas  $2m$ , separadas una distancia  $2\ell$  y montadas simétricamente con respecto al punto

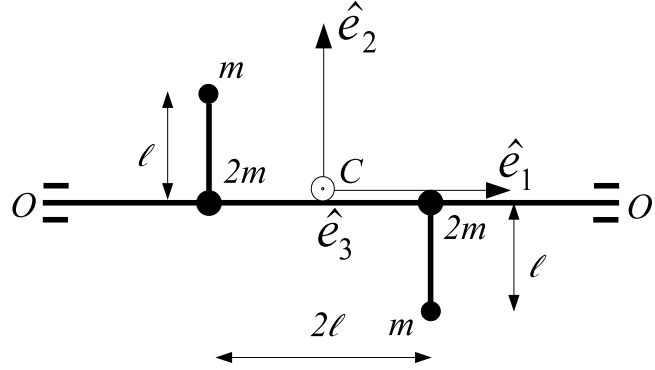


Figura 7.2: Rígido formado por cuatro masas puntuales.

medio ( $C$ ) del eje  $OO'$ , sujetas a sendas masas  $m$  por medio de barras de largo  $\ell$  perpendiculares al eje  $OO'$ . El conjunto de las cuatro masas está en un mismo plano. Tanto las barras que unen masas como el eje  $OO'$  son de masa despreciable. Sea  $\vec{r}_n = P_n - C$ , donde  $P_n$  es una de las cuatro masas del sistema. De acuerdo con (7.12), las componentes del tensor de inercia con respecto a  $C$  son:

$$(I_C)_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^4 m_n (r_n^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{n\alpha} x_{n\beta})$$

donde  $r_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2$ ,  $x_{n\alpha} = \vec{r}_n \cdot \hat{e}_\alpha$ . Como las masas tienen por coordenadas:

$$\begin{aligned} 2m &: (\ell, 0, 0) & , & \quad m : (\ell, -\ell, 0) \\ 2m &: (-\ell, 0, 0) & , & \quad m : (-\ell, \ell, 0) \end{aligned}$$

el tensor de inercia se representa por:

$$(7.16) \quad \mathbf{I}_C^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = 2m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 7.2. Propiedades del Tensor de Inercia.

Las componentes del tensor de inercia según una base ortonormal arbitraria (7.12) son invariantes bajo el intercambio de índices  $\alpha, \beta$ . Esto quiere decir que de las nueve componentes que tiene, sólo seis de ellas son independientes entre sí: las tres componentes diagonales (que son los *momentos de inercia* alrededor de los ejes de la base ortonormal) y tres de las componentes no diagonales (conocidas como

*productos de inercia*). El tensor de inercia se representa entonces por una matriz simétrica en dimensión 3, tal como resulta en (7.16) del ejemplo anterior. Como cualquier matriz real y simétrica en dimensión finita se puede llevar a una forma diagonal en una base ortonormal, comenzaremos entonces por estudiar el cambio en la representación del tensor de inercia bajo un cambio de base.

### 7.2.1. Cambio de base.

Consideremos un punto  $P$  del espacio con coordenadas  $r_\alpha$  con respecto a un sistema  $\{Q, \hat{e}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$ . Bajo un cambio de base que lleve de  $\{\hat{e}_\alpha\}$  a  $\{\hat{e}'_\alpha\}$ , las coordenadas de  $P$  se transforman linealmente de acuerdo a:

$$(7.17) \quad r'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 R_{\alpha\beta} r_\beta$$

siendo  $R_{\alpha\beta}$  las componentes de la matriz de cambio de base  $\mathbf{R}$ . Cualquier conjunto de 3 números reales ordenados que transforme bajo un cambio de base de acuerdo a (7.17), es un vector. La norma de este vector en la nueva base es:

$$(7.18) \quad \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \sum_{\alpha=1}^3 r'_\alpha r'_\alpha \stackrel{(7.17)}{=} \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \sum_{\beta=1}^3 r_\beta R_{\alpha\beta} \right] \left[ \sum_{\gamma=1}^3 R_{\alpha\gamma} r_\gamma \right] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^3 r_\beta R_{\beta\alpha}^T R_{\alpha\gamma} r_\gamma$$

siendo  $R_{\alpha\beta}^T$  las componentes de la traspuesta de la matriz de cambio de base. Como los cambios de base (*rotaciones*) conservan la norma de los vectores:

$$(7.19) \quad \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r} \cdot \vec{r} = \sum_{\beta=1}^3 r_\beta r_\beta \stackrel{(7.13)}{=} \sum_{\beta,\gamma=1}^3 r_\beta \delta_{\beta\gamma} r_\gamma$$

se debe verificar (comparando (7.18) con (7.19)):

$$(7.20) \quad \sum_{\alpha=1}^3 R_{\beta\alpha}^T R_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$$

es decir,  $\mathbf{R}$  debe ser una matriz *ortogonal*.

Veamos ahora qué sucede con el producto tensorial de dos vectores (7.7). Los elementos de matriz (7.8) de  $\hat{c}$  mantienen la misma estructura en la base transformada:  $c'_{\alpha\beta} = a'_\alpha b'_\beta$ , por lo que, de acuerdo a (7.17):

$$c'_{\alpha\beta} = a'_\alpha b'_\beta = \left[ \sum_{\gamma=1}^3 R_{\alpha\gamma} a_\gamma \right] \left[ \sum_{\delta=1}^3 b_\delta R_{\beta\delta} \right] = \sum_{\gamma,\delta=1}^3 R_{\alpha\gamma} a_\gamma b_\delta R_{\beta\delta} = \sum_{\gamma,\delta=1}^3 R_{\alpha\gamma} c_{\gamma\delta} R_{\delta\beta}^T$$

es decir:

$$(7.21) \quad \mathbf{c}' = \mathbf{RcR}^T$$

Cualquier conjunto de 9 elementos ordenados que transforme bajo un cambio de base  $\mathbf{R}$  de acuerdo con (7.21) será la representación matricial de un tensor de rango 2. En particular, para el tensor de inercia (7.11) tenemos que:

$$(7.22) \quad \mathbf{I}'_Q = \mathbf{R}\mathbf{I}_Q\mathbf{R}^T$$

### 7.2.2. Ejes Principales.

Mediante un cambio de base adecuado, la matriz  $\mathbf{I}_Q$  que representa al tensor de inercia se puede llevar a su *forma diagonal*  $\mathbf{D}$ :

$$(7.23) \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}\mathbf{I}_Q\mathbf{R}^T$$

o invirtiendo la transformación:

$$(7.24) \quad \mathbf{I}_Q = \mathbf{R}^T\mathbf{D}\mathbf{R}$$

La nueva base donde el tensor toma su forma diagonal está formada por los autovalores de la representación matricial del tensor, llamados también *ejes principales*  $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ , mientras que los autovalores asociados a cada uno reciben el nombre de *momentos de inercia principales* ( $I_1, I_2, I_3$ ):

$$(7.25) \quad \mathbf{D} = \mathbf{I}_Q^{\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Los momentos de inercia principales son únicos a menos del orden en que aparezcan en la forma diagonal, así como los ejes principales son únicos a menos de su degeneración.

#### *Ejemplo- masas coplanares (parte II).*

Veamos cuáles son los ejes principales para el rígido de la figura 7.2. Nos proponemos diagonalizar la matriz (7.16), es decir, resolver el problema de autovalores:

$$\mathbf{I}_C^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} \hat{v} = I \hat{v}$$

que implica hallar las soluciones a la ecuación secular:

$$\left| \mathbf{I}_C^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} - I\mathbf{1} \right| = 0$$



es decir:

$$\left| \begin{pmatrix} I_0 - I & I_0 & 0 \\ I_0 & 3I_0 - I & 0 \\ 0 & 0 & 4I_0 - I \end{pmatrix} \right| = 0$$

con  $I_0 = 2m\ell^2$ . Para este caso, el problema de diagonalización se puede restringir al subespacio subtendido por  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$  ya que  $\hat{e}_3$  es eje principal (la fila y la columna que llevan el índice 3 en (7.16) tienen ceros salvo para el elemento diagonal) con autovalor  $I_3 = 4I_0$ :

$$\left| \begin{pmatrix} I_0 - I & I_0 \\ I_0 & 3I_0 - I \end{pmatrix} \right| = 0$$

cuya solución es:

$$I = (2 \pm \sqrt{2})I_0$$

Hallemos ahora los autovectores asociados a los autovalores anteriores. Supongamos que el autovector  $\hat{v}_1$  asociado al autovalor  $I_1 = (2 + \sqrt{2})I_0$  forma un ángulo  $\theta$  con  $\hat{e}_1$ :

$$\hat{v}_1 = \cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2$$

La ecuación que nos permite hallar el autovector es:

$$\begin{pmatrix} I_0 - I_1 & I_0 \\ I_0 & 3I_0 - I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

que tiene por solución:

$$\operatorname{tg}\theta = -(1 + \sqrt{2})$$

(el autovector restante será ortogonal a  $\hat{v}_1$  ya que corresponde a un autovalor distinto). Finalmente, la matriz ortogonal que nos permite pasar de la base original a la de ejes principales corresponde a una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $\hat{e}_3$ :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(se ve fácilmente que  $\mathbf{R}^T\hat{e}_1 = \hat{v}_1$ , por ejemplo).

### 7.2.3. Momentos de inercia de un rígido plano.

Consideremos un rígido plano tal como el de la figura 7.2. En (7.16) se puede observar que la suma de los dos primeros momentos de inercia corresponde al tercero;

vamos a establecer ahora la generalidad de esta propiedad para cualquier rígido plano. Consideremos los momentos de inercia de acuerdo con (7.12):

$$\begin{aligned}(I_Q)_{11} &= \sum_i \{m_i(P_i - Q)^2 - m_i(P_i - Q)_1^2\} \\(I_Q)_{22} &= \sum_i \{m_i(P_i - Q)^2 - m_i(P_i - Q)_2^2\} \\(I_Q)_{33} &= \sum_i \{m_i(P_i - Q)^2 - m_i(P_i - Q)_3^2\}\end{aligned}$$

Sea  $\hat{e}_3$  el eje perpendicular al plano del rígido y consideremos que el punto de referencia  $Q$  pertenece a este plano. El vector  $(P_i - Q)$  no tiene entonces componente según el eje  $\hat{e}_3$ :  $(P_i - Q)_3 = 0$ , por lo que  $(P_i - Q)^2 = (P_i - Q)_1^2 + (P_i - Q)_2^2$  y los momentos de inercia resultan:

$$\begin{aligned}(I_Q)_{11} &= \sum_i m_i(P_i - Q)_2^2 \\(I_Q)_{22} &= \sum_i m_i(P_i - Q)_1^2 \\(I_Q)_{33} &= \sum_i m_i \{(P_i - Q)_1^2 + (P_i - Q)_2^2\}\end{aligned}$$

de donde se ve claramente que:

$$(7.26) \quad (I_Q)_{33} = (I_Q)_{11} + (I_Q)_{22}$$

*Ejemplo - disco homogéneo (parte I).*

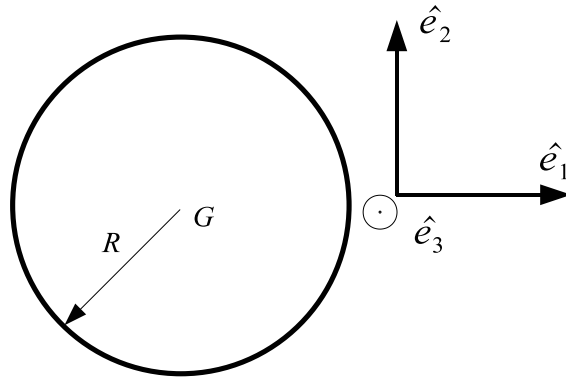


Figura 7.3: Disco homogéneo de radio  $R$ .

Consideremos el caso de un disco plano y homogéneo, de masa  $M$  y radio  $R$  y los momentos de inercia del mismo con respecto a los ejes de la base especificada en la figura 7.3 pasando centro de masa  $G$ . El momento de inercia alrededor del eje  $\hat{e}_3$  se puede obtener a partir del pasaje al continuo de (7.12), donde consideramos la sustitución:  $\sum m_i \rightarrow \int dm$ ,  $\vec{r} = P_i - Q$ ,  $(P_i - Q)_{1,2,3} = x, y, z$ :

$$I_3 = \int dm(\vec{r}^2 - z^2) = \int dm(x^2 + y^2)$$

El elemento de masa  $dm$  es  $dm = \sigma dA$ , siendo  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$  la densidad superficial de masa y  $dA$  el elemento de área. Considerando la integración en coordenadas polares planas:  $dA = r dr d\theta$ , donde  $r^2 = x^2 + y^2$ , el momento  $I_3$  es:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sigma dr r \cdot r^2 = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Los restantes momentos de inercia se pueden hallar sabiendo que son iguales entre sí:  $I_1 = I_2$  (pues el papel de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  es intercambiable) y que su suma, de acuerdo con (7.26) debe dar  $I_3$ :  $I_3 = I_1 + I_2$ , por lo que:  $I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2}$ .

### Pasaje al continuo.

Generalizando el caso tratado en el ejemplo anterior, para cualquier rígido con distribución continua de masa la representación matricial de su tensor de inercia toma la forma:

$$(7.27) \quad \mathbf{I}_Q^{\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}} = \begin{pmatrix} \int dV \rho(y^2 + z^2) & - \int dV \rho xy & - \int dV \rho xz \\ - \int dV \rho yx & \int dV \rho(x^2 + z^2) & - \int dV \rho yz \\ - \int dV \rho zx & - \int dV \rho zy & \int dV \rho(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

siendo  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  la posición de los puntos materiales del rígido vista desde  $Q$  y  $\rho(x, y, z)$  la densidad (volumétrica) de masa para el punto  $(x, y, z)$  considerado.

### 7.2.4. Simetrías.

Consideremos ahora *operaciones de cobertura* sobre un rígido, es decir, operaciones que no alteren la distribución de masa del mismo como conjunto, cambiando sí la posición de las partículas individuales. En particular veamos (i) rotaciones alrededor de un eje (ii) reflexiones en un plano.

- *Plano de simetría* El tensor de inercia calculado con respecto a un punto perteneciente al plano de simetría de un rígido (figura 7.4(b)) tiene como eje

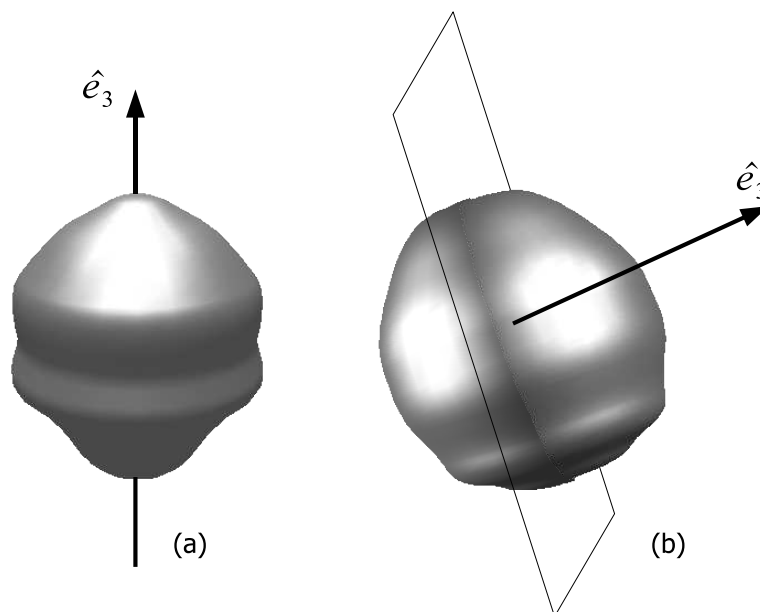


Figura 7.4: (a) Rígido de revolución (b) Rígido con simetría axial.

principal a cualquier eje ( $\hat{e}_3$ ) perpendicular al plano. En particular, cualquier eje perpendicular a un rígido plano es principal para el mismo.

*dem.* Consideremos  $\hat{z}$  como eje y tomemos  $(x, y)$  como el plano de simetría del rígido:

$$\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$$

Se puede ver que las integrales en (7.27) correspondientes a los productos de inercia  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  se anulan, por lo que  $\hat{z}$  es principal.

- *Rígidos de revolución* Para aquellos rígidos que son invariantes bajo rotaciones de cualquier ángulo en torno a un eje (figura 7.4(a)), este eje (sea  $\hat{e}_3$ ) es principal y cualquier otro eje perpendicular a él por un punto del mismo también es principal con degeneración doble.<sup>2</sup>

*dem.* Tomemos  $\hat{z}$  nuevamente como eje; en coordenadas cilíndricas, la densidad de masa verifica:

$$\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, z)$$

( $r$  es la distancia al eje  $\hat{z}$ ) y se puede ver que todos los productos de inercia son nulos, además de que los momentos de inercia según  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  deben ser iguales.

<sup>2</sup>es decir, el momento de inercia alrededor de cualquiera de estos ejes es el mismo y los posibles vectores subtienden un subespacio de dimensión 2.

- *Centro de simetría* Para un rígido con un centro de simetría para las operaciones de cobertura (es decir con simetría esférica), cualquier eje que pase por este centro es principal con degeneración triple.

*dem.* En coordenadas polares esféricas, la densidad de masa verifica:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

y todos los momentos de inercia son iguales entre sí, así como los productos son nulos.

### *Ejemplo - disco homogéneo (parte II).*

El disco de la figura 7.3 es un rígido plano y de revolución, por lo que  $\hat{e}_3$  es eje principal. Por ser un rígido de revolución,  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  son también ejes principales. El tensor de inercia tiene entonces por representación:

$$\mathbf{I}_Q^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} \frac{I_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

### 7.2.5. Teorema de Steiner.

Veamos cómo cambia el tensor de inercia cuando consideramos un cambio en el punto de referencia para el mismo. En particular, veremos la relación entre los tensores para el centro de masas del rígido y para un punto arbitrario  $Q$ . El tensor de inercia referido a este punto arbitrario es, de acuerdo con (7.11):

$$\mathbb{I}_Q = \sum_i m_i [(P_i - Q)^2 \mathbb{1} - (P_i - Q) \otimes (P_i - Q)]$$

Introduzcamos ahora convenientemente un término nulo  $G - G$  de manera que:

$$\begin{aligned} (P_i - Q) &= (P_i - G) + (G - Q) \\ (P_i - Q)^2 &= (P_i - G)^2 + (G - Q)^2 + 2(P_i - G) \cdot (G - Q) \\ (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) &= (P_i - G) \otimes (P_i - G) + (P_i - G) \otimes (G - Q) \\ &\quad + (G - Q) \otimes (P_i - G) + (G - Q) \otimes (G - Q) \end{aligned}$$

El primer término del tensor de inercia es entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i (P_i - Q)^2 \mathbb{1} &= \sum_i m_i [(P_i - G)^2 + (G - Q)^2 + 2(P_i - G) \cdot (G - Q)] \mathbb{1} \\
&= \sum_i m_i (P_i - G)^2 \mathbb{1} + (G - Q)^2 \sum_i m_i \mathbb{1} + 2 \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] \cdot (G - Q) \mathbb{1} \\
&\stackrel{(5.2)}{=} \sum_i m_i (P_i - G)^2 \mathbb{1} + M(G - Q)^2 \mathbb{1}
\end{aligned}$$

(donde la última igualdad proviene de considerar el centro de masas desde el centro de masas mismo). De igual forma, el segundo término del tensor es:

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) &= \sum_i m_i (P_i - G) \otimes (P_i - G) + \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] \otimes (G - Q) \\
&\quad + (G - Q) \otimes \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] + \sum_i m_i (G - Q) \otimes (G - Q) \\
&\stackrel{(5.2)}{=} \sum_i m_i (P_i - G) \otimes (P_i - G) + M(G - Q) \otimes (G - Q)
\end{aligned}$$

Agrupando los dos términos, el tensor de inercia resulta:

$$\mathbb{I}_Q = \sum_i m_i (P_i - G)^2 \mathbb{1} - \sum_i m_i (P_i - G) \otimes (P_i - G) + M(G - Q)^2 \mathbb{1} - M(G - Q) \otimes (G - Q)$$

Los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad anterior corresponden según (7.11) al tensor referido al centro de masas y tenemos entonces el **Teorema de Steiner**:

$$(7.28) \quad \mathbb{I}_Q = \mathbb{I}_G + \mathbb{J}_Q^{M,G}$$

donde:

$$(7.29) \quad \mathbb{J}_Q^{M,G} = M [(G - Q)^2 \mathbb{1} - (G - Q) \otimes (G - Q)]$$

o en términos de sus componentes:

$$(7.30) \quad \left( \mathbb{J}_Q^{M,G} \right)_{\alpha\beta} = M(G - Q)^2 \delta_{\alpha\beta} - M(G - Q)_\alpha (G - Q)_\beta$$

**Teorema de Steiner para momentos de inercia.**

Consideremos en particular cómo vincular los momentos de inercia correspondientes a dos ejes paralelos en la dirección  $\hat{u}$  que pasan por  $G$  y un punto  $O$

respectivamente . Sean  $I_{G,\hat{u}}$  e  $I_{O,\hat{u}}$  esos momentos:

$$\begin{aligned} I_{G,\hat{u}} &= \hat{u} \cdot \mathbb{I}_G \hat{u} \\ I_{O,\hat{u}} &= \hat{u} \cdot \mathbb{I}_O \hat{u} \end{aligned}$$

A partir de (7.29) tenemos que:

$$\hat{u} \cdot \mathbb{I}_O \hat{u} = \hat{u} \cdot \mathbb{I}_G \hat{u} + M(G - O)^2 \hat{u} \cdot \mathbb{1} \hat{u} - M \hat{u} \cdot [(G - O) \otimes (G - O)] \hat{u}$$

A partir de (7.7) tenemos que:

$$\hat{u} \cdot [(G - O) \otimes (G - O)] \hat{u} = \hat{u} \cdot [((G - O) \cdot \hat{u})(G - O)] = ((G - O) \cdot \hat{u})^2$$

y por lo tanto:

$$\hat{u} \cdot \mathbb{I}_O \hat{u} = \hat{u} \cdot \mathbb{I}_G \hat{u} + M [(G - O)^2 - ((G - O) \cdot \hat{u})^2]$$

que se simplifica usando que la distancia entre los ejes verifica:

$$d^2 = (G - O)^2 - ((G - O) \cdot \hat{u})^2$$

$$(7.31) \quad I_{O,\hat{u}} = I_{G,\hat{u}} + Md^2$$

### 7.3. Energía cinética de un rígido.

Siguiendo el planteo general (ver (5.15)) visto para un sistema de partículas cualquiera, la energía cinética de un rígido es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

que a partir de (7.1) resulta en:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i 2 \vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 + \vec{v}_Q \cdot \left\{ \vec{\omega} \times \left[ \sum_i m_i (P_i - Q) \right] \right\} \\ &\stackrel{(5.2)}{=} \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 + M \vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (G - Q)] \end{aligned}$$

El segundo término del lado derecho de la última igualdad se puede desarrollar usando que el producto mixto es cíclico:

$$(7.32) \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

y tomando  $\vec{A} = \vec{\omega} \times (P_i - Q)$ ,  $\vec{B} = \vec{\omega}$ ,  $\vec{C} = (P_i - Q)$ :

$$[\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 = [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] \cdot [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] = \vec{\omega} \cdot [(P_i - Q) \times (\vec{\omega} \times (P_i - Q))]$$

Por lo que la energía cinética se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left\{ \sum_i m_i (P_i - Q) \times [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] \right\} + M \vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (G - Q)]$$

Comparando ahora (7.10) con (7.2) resulta que el segundo término del lado derecho de la igualdad anterior se puede reescribir en función del tensor de inercia, por lo que finalmente tenemos:

$$(7.33) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \vec{\omega} + M \vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (G - Q)]}$$

#### *Casos particulares:*

- Si  $Q$  es un punto del rígido instantáneamente en reposo:  $\vec{v}_Q = 0$ , la energía cinética del sistema será la de una rotación pura, que puede escribirse a partir de (7.33) como:

$$(7.34) \quad T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \vec{\omega}$$

- Para el caso particular en que  $Q = G$ , la energía cinética nos queda como:

$$(7.35) \quad T = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \vec{\omega}$$

Comparando (7.35) con (5.16) vemos que el término en la energía cinética del movimiento de las partículas relativo al centro de masas presente en el teorema de König corresponde en un rígido a una rotación pura en torno al centro de masas.





# Capítulo 8

## Dinámica del Rígido.

### 8.1. Ecuaciones Cardinales.

Así como sucede para cualquier sistema de partículas, la *Primera Cardinal* para un rígido es (5.8):

$$(8.1) \quad \boxed{M\vec{a}_G = \vec{R}^{(ext)}}$$

donde  $\vec{R}^{(ext)}$  es la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el rígido. Por otro lado, para cualquier sistema donde las fuerzas internas verifiquen el principio de acción y reacción fuerte, tenemos la Segunda Cardinal (5.11):

$$\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{v}_G \times \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}$$

siendo  $\vec{M}_Q^{(ext)}$  el momento de las fuerzas externas al sistema con respecto al punto  $Q$ . Considerando la forma particular (7.10) que toma el momento angular de un rígido:

$$\vec{L}_Q = M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q \vec{\omega}$$

la derivada del lado izquierdo de la Segunda Cardinal es:

$$\dot{\vec{L}}_Q = M(\vec{v}_G - \dot{Q}) \times \vec{v}_Q + M(G - Q) \times \frac{d\vec{v}_Q}{dt} + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt}$$

y tenemos la *Segunda Cardinal* para un rígido:

$$(8.2) \quad M(\vec{v}_G - \dot{Q}) \times \vec{v}_Q + M(G - Q) \times \frac{d\vec{v}_Q}{dt} + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} - M\vec{v}_G \times \dot{Q} = \vec{M}_Q^{(ext)}$$

Para el caso en que  $Q$  sea un punto del rígido se cumple:

- $\dot{Q} = \vec{v}_Q$
- $\frac{d\vec{v}_Q}{dt} = \vec{a}_Q$

y la segunda cardinal toma esta forma simplificada:

$$(8.3) \quad \boxed{M(G - Q) \times \vec{a}_Q + \frac{d(\mathbb{1}_Q \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_Q^{(ext)}}$$

### Observación 1:

Para tratar con el término  $\frac{d(\mathbb{1}_Q \vec{\omega})}{dt}$  de (8.3) podemos considerar la relación entre derivada absoluta y relativa:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

y tomar como sistema relativo uno solidario al rígido con origen en  $Q$ :

$$\frac{d(\mathbb{1}_Q \vec{\omega})}{dt} = \frac{d'(\mathbb{1}_Q \vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbb{1}_Q \vec{\omega} \stackrel{(1.36)}{=} \frac{d'\mathbb{1}_Q}{dt} \vec{\omega} + \mathbb{1}_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{1}_Q \vec{\omega} = \mathbb{1}_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{1}_Q \vec{\omega}$$

donde la última igualdad vale ya que como  $Q$  es un punto del rígido, las distancias relativas de los demás puntos del rígido a él no cambian y por lo tanto el tensor tampoco. Así, la segunda cardinal toma la siguiente forma:

$$(8.4) \quad M(G - Q) \times \vec{a}_Q + \mathbb{1}_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{1}_Q \vec{\omega} = \vec{M}_Q^{(ext)}$$

### Observación 2:

Para los casos en que el movimiento sea plano, consideramos la proyección de la segunda cardinal en la forma (8.4) con respecto al eje ( $\hat{k}$ ) perpendicular al plano:

$$M(G - Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{k} + \mathbb{1}_Q \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{k} + \vec{\omega} \times \mathbb{1}_Q \vec{\omega} \cdot \hat{k} = \vec{M}_Q^{(ext)} \cdot \hat{k} = M_Q^{(ext)}$$

(donde usamos que como todas las fuerzas actúan en el plano, su momento debe ser de la forma  $M_Q^{(ext)} \hat{k}$ ). Como  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ , el último término del lado izquierdo es nulo:

$$M(G - Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{k} + \mathbb{1}_Q \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{k} = M_Q^{(ext)}$$

Luego, dado que  $\hat{k}$  tiene una dirección fija  $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\hat{k}$  y podemos escribir el segundo término del lado izquierdo de la ecuación anterior así:

$$\mathbb{I}_Q \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{k} = \mathbb{I}_Q \dot{\omega} \hat{k} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \mathbb{I}_Q \hat{k} \dot{\omega} \stackrel{(7.14)}{=} I_{Q,\hat{k}} \dot{\omega}$$

y nos queda la segunda cardinal para un problema plano:

$$(8.5) \quad M(G - Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{k} + I_{Q,\hat{k}} \dot{\omega} = M_Q^{(ext)}$$

## 8.2. Sistemas de Fuerzas Aplicadas.

A la hora de aplicar las ecuaciones cardinales a un rígido deberemos encontrar la resultante  $\vec{R}^{(ext)}$  y el momento  $\vec{M}_Q^{(ext)}$  de las fuerzas externas al sistema. Esto implica la *reducción* de un sistema de fuerzas:  $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_i, \vec{F}_i^{(ext)}\}$  dado por las fuerzas externas al sistema  $\vec{F}_i^{(ext)}$  y sus puntos de aplicación  $\mathbf{P}_i$ .

### 8.2.1. Sistemas Equivalentes.

Dos sistemas de fuerzas son *equivalentes* cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- La resultante de cada sistema es la misma.
- El momento de las fuerzas de un sistema u otro con respecto a un punto arbitrario es el mismo.

*Si se trata de un rígido, el efecto de un sistema u otro será igual.*<sup>1</sup>

Por ejemplo, consideremos el sistema de fuerzas gravitatorias actuando sobre un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra. La fuerza sobre una partícula  $i$  es

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g}$$

La resultante es entonces

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

---

<sup>1</sup>No vale lo mismo si el cuerpo es deformable; consideremos por ejemplo una banda elástica de cuyos extremos tiramos con fuerzas iguales y opuestas. El efecto no será claramente el mismo si empujamos con fuerzas iguales y opuestas sobre cada extremo, a pesar de que los dos sistemas son equivalentes.

(siendo  $M$  la masa total del sistema). El momento alrededor de un punto  $Q$  es

$$\vec{M}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times m_i \vec{g} = \left( \sum_i m_i (P_i - Q) \right) \times \vec{g} \stackrel{(5.2)}{=} (G - Q) \times M \vec{g}$$

y corresponde entonces a una fuerza  $M\vec{g}$  actuando sobre el centro de masas del sistema (independientemente del punto  $Q$  elegido para referir el momento).  $M\vec{g}$  actuando sobre  $G$  es equivalente sistema original de fuerzas gravitatorias ya que da la misma resultante y el mismo momento no importa cuál sea el punto considerado.

Antes de seguir adelante introduciremos los siguientes conceptos:

**Línea de acción:** Consideremos una fuerza  $\vec{F}$  aplicada sobre un punto  $P$ . La recta que pasa por  $P$  y que contiene a  $\vec{F}$  se denomina *línea de acción* de la fuerza. Se puede ver (figura 8.1) que a efectos de calcular el momento de  $\vec{F}$  respecto a un punto  $O$  arbitrario se puede tomar cualquier punto de la línea de acción como punto de aplicación:

$$(P - O) \times \vec{F} = (P - P') \times \vec{F} + (P' - O) \times \vec{F} = (P' - O) \times \vec{F}$$

ya que  $P - P'$  es colineal con  $\vec{F}$ .

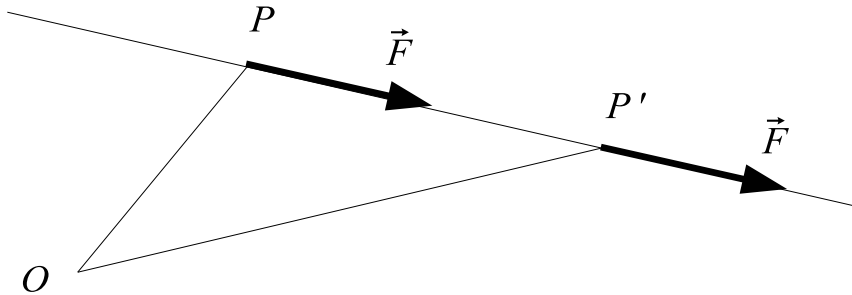


Figura 8.1: Línea de acción para una fuerza  $\vec{F}$ .

**Par:** Un *par* de fuerzas está constituido por dos fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas, tienen igual magnitud y sentidos opuestos (figura 8.2).

El momento de este sistema visto desde  $P'$  es:

$$\vec{M}_{P'} = \vec{a} \times \vec{F}$$

y como este sistema tiene resultante nula, la fórmula (5.13) de cambio de aplicación de momentos nos dice que el momento del par será igual visto desde cualquier punto, por lo que el subíndice en  $P'$  ya no es necesario:

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}$$

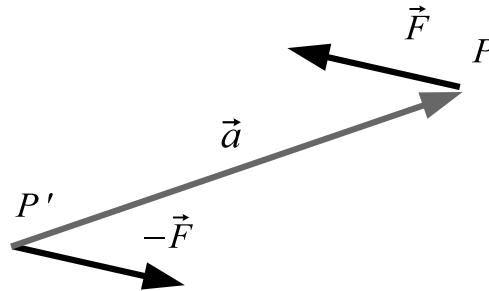


Figura 8.2: Par de fuerzas.

Un par está caracterizado entonces por su momento  $\vec{M}$  y *todos los pares cuyo momento sea igual serán equivalentes entre sí*. En particular, cualquier sistema de fuerzas con resultante nula cuyo momento respecto a un punto arbitrario sea  $\vec{M}$ , será equivalente a un par  $\vec{M}$ .

### 8.2.2. Reducción de un sistema de fuerzas aplicado sobre un rígido.

1. *Cualquier sistema de fuerzas aplicado  $\mathcal{F}$  se puede reducir a una fuerza aplicada en un punto arbitrario más un par (cualquiera de los cuales puede ser cero).* Sea  $\vec{R}$  la resultante de las fuerzas y  $\vec{M}_P$  el momento de ellas respecto de un punto arbitrario  $P$ . Luego, si hacemos que  $\vec{R}$  actúe en  $P$  y le sumamos un par  $\vec{M}_P$ , este sistema será equivalente al original.
2. *Todo sistema de fuerzas actuando se puede reducir a uno equivalente que contiene como máximo dos fuerzas (actuando en dos puntos de aplicación distintos).* Como el par considerado en el ítem anterior se puede formar con dos fuerzas, una de las cuales puede actuar en un punto arbitrario, podemos considerar la otra fuerza aplicada en el punto  $P$  y sumársela a  $\vec{R}$  para tener una sola fuerza actuando en  $P$  más la otra fuerza del par.

#### Articulaciones.

Podemos ver una aplicación de la reducción de un sistema de fuerzas para el caso de *articulaciones*. En particular vamos a concentrarnos en el caso de articulaciones lisas:

- *Articulación cilíndrica lisa.* Consideremos una articulación como la de la figura

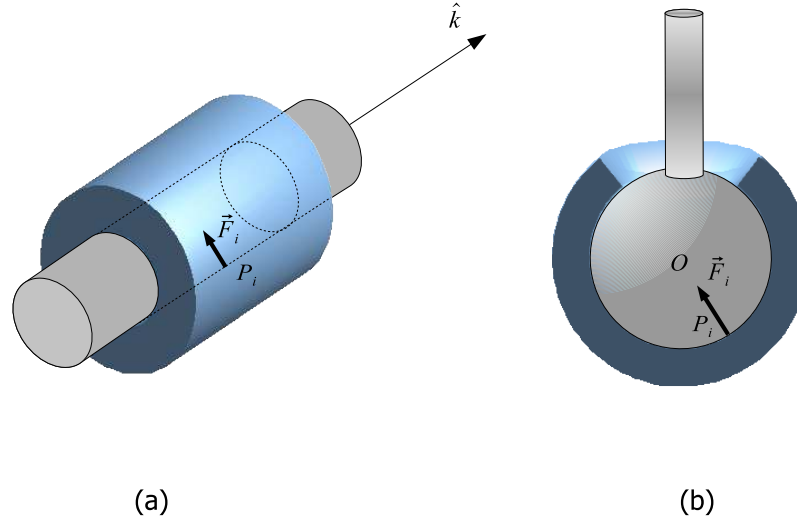


Figura 8.3: Articulaciones lisas: (a) cilíndrica (b) esférica.

8.3(a) formada por un cilindro central cubierto por un cascarón, siendo el contacto entre ellos carente de fricción. Las fuerzas que se ejercen mutuamente están dirigidas según la dirección radial, por lo que el momento ejercido por una de las partes sobre la otra con respecto a un punto del eje no tiene componente según el eje ( $\hat{k}$ ) de la articulación:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{k} = 0$$

y esto es independiente del punto del eje considerado ya que usando la fórmula de cambio de momentos (5.13) con respecto a otro punto  $O'$ :

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{R} \times (O' - O)$$

y proyectando según  $\hat{k}$ :

$$\vec{M}_{O'} \cdot \hat{k} = \vec{M}_O \cdot \hat{k} + (\vec{R} \times (O' - O)) \cdot \hat{k} = \vec{M}_O \cdot \hat{k} = 0$$

(donde usamos que  $(O' - O)$  está en la dirección de  $\hat{k}$ ).

- *Articulación esférica lisa.* Para el caso de una articulación como la de 8.3(b), las fuerzas ejercidas sobre la esfera central de la articulación están dirigidas en dirección a  $O$  siempre y cuando el contacto con el soporte externo sea liso. De esta forma, el momento con respecto a  $O$  es nulo:

$$\vec{M}_O = 0$$

### 8.2.3. Potencia de un sistema de fuerzas sobre un rígido.

Veamos ahora algunas consideraciones energéticas concernientes a un sistema de fuerzas que actúa sobre un rígido. En primer lugar, veamos qué sucede con las fuerzas internas al rígido. Consideremos dos puntos del rígido,  $P_i$  y  $P_j$  que interactúan mediante una fuerza  $\vec{F}_{ji}$  que verifica el principio de acción y reacción fuerte. La potencia para este par de fuerzas es:

$$\mathcal{P}_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \stackrel{(6.2)}{=} \vec{F}_{ji} \cdot (\vec{\omega} \times (P_i - P_j)) = 0$$

(donde la última igualdad vale en virtud de que  $\vec{\omega} \times (P_i - P_j)$  es ortogonal a  $P_i - P_j$  mientras que  $\vec{F}_{ij}$  tiene la dirección de  $P_i - P_j$  por verificar el principio de acción y reacción fuerte). Esto nos dice que en un sistema rígido, las fuerzas internas no trabajan. El trabajo que nos importa corresponde entonces a los agentes externos. La potencia para el sistema de fuerzas externas al rígido es:

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \cdot \vec{v}_i$$

Consideremos ahora un punto  $Q$  solidario al rígido cuya velocidad es  $\vec{v}_Q$ . A partir de la distribución de velocidades de un rígido (6.2) tenemos entonces:

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \cdot [\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)] = \left[ \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \right] \cdot \vec{v}_Q + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \cdot [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]$$

Usando que el producto mixto no cambia bajo permutaciones cíclicas (7.32), modificamos el segundo término de la ecuación anterior:

$$\mathcal{P} = \left[ \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \right] \cdot \vec{v}_Q + \left[ \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(ext)} \right] \cdot \vec{\omega}$$

y usando ahora la definición de la resultante (5.7) de las fuerzas externas y el momento de las mismas (5.10) con respecto a un punto nos queda:

$$(8.6) \quad \boxed{\mathcal{P} = \vec{R}^{(ext)} \cdot \vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{(ext)} \cdot \vec{\omega}}$$



### 8.3. Sistemas vinculados.

Antes de ver algunas aplicaciones de cómo determinar el estado de movimiento de un rígido a partir de las ecuaciones cardinales, necesitaremos dos principios que hacen al movimiento de sistemas donde existen vínculos que restringen los grados de libertad del mismo.

- **Principio de las reacciones vinculares.** *La acción de un vínculo puede ser sustituida por la de un sistema de fuerzas a las que llamaremos **reacciones**.*
- **Principio de pasividad.** *Si un sistema material está sometido a un vínculo  $\mathcal{V}$ , de tal modo que en un instante su estado de movimiento es compatible con  $\mathcal{V}$  y existe un sistema de reacciones vinculares  $\mathcal{R}$  compatibles con la permanencia de  $\mathcal{V}$ , entonces en ese instante permanece  $\mathcal{V}$ .*

#### 8.3.1. Ejemplo - Placa apoyada en una recta.

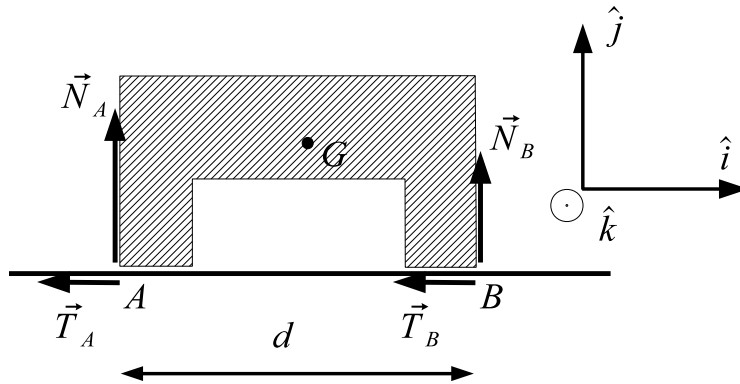


Figura 8.4: Placa apoyada sobre una recta sin volcar.

Como ejemplo de los principios enunciados anteriormente veamos el caso de una placa plana de masa  $m$  obligada a desplazarse apoyándose unilateralmente sobre una recta y sin volcar (figura 8.4).  $A$  es el extremo izquierdo y  $B$  el derecho de la base de sustentación de la placa y la distancia entre ellos es  $d$ . El centro de masas ( $G$ ) y la velocidad angular de la placa son:

$$G = x_G \hat{i} + y_G \hat{j}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

El vínculo es  $\mathcal{V} = \{\text{la placa se apoya en la recta unilateralmente sin volcar}\}$ . Que en un instante  $t_0$  el estado de movimiento sea *compatible* con  $\mathcal{V}$  significa que:

$$(8.7) \quad \omega(t_0) = 0, \quad \dot{y}_G(t_0) = 0$$

Que en  $t_0$  el vínculo  $\mathcal{V}$  *permanezca* significa que no hay apartamiento ni vuelco incipientes, es decir:

$$(8.8) \quad \dot{\omega}(t_0) = 0, \quad \ddot{y}_G(t_0) = 0$$

Comencemos por considerar que el contacto entre la placa y la recta es liso, de manera que el vínculo puede representarse por un sistema de reacciones normales  $\mathcal{R} = \{\mathbf{P}_i, N_i \hat{j}\}$  con  $N_i \geq 0$ , siendo  $\mathbf{P}_i$  los puntos de contacto. Manteniéndonos en el modelo de rígido es imposible conocer la distribución real de las reacciones normales en la base de la placa y ver si la misma garantiza la permanencia del vínculo. Sin embargo, si  $M_B^{(r)} \hat{k}$ ,  $M_A^{(r)} \hat{k}$  son los momentos de este sistema de fuerzas desde los extremos  $B$  y  $A$  de la base, respectivamente, la permanencia (8.8) del vínculo está garantizada si:

$$(8.9) \quad M_B^{(r)} \leq 0$$

$$(8.10) \quad M_A^{(r)} \geq 0$$

ya que  $N_i \geq 0$  y todas las reacciones sobre la base están a la derecha de  $A$  y a la izquierda de  $B$ .

Como caso particular, si el vuelco sólo es esperable alrededor de uno de los extremos, por ejemplo  $A$ , podemos considerar la reducción de las reacciones vinculares a su resultante  $N \hat{j}$  actuando en el extremo  $A$  y un par  $M \hat{k}$  y garantizar la compatibilidad con (8.8) a partir de:

$$N \geq 0$$

$$M \geq 0$$

*Caso general.*- Podemos considerar la reducción de las reacciones normales a dos reactivas:  $N_A \hat{j}$  y  $N_B \hat{j}$  actuando en  $A$  y  $B$ , respectivamente. El principio de pasividad nos dice que es necesario y suficiente que éste sistema equivalente sea compatible con la permanencia del vínculo para que el vínculo permanezca efectivamente, para lo que  $N_A$  y  $N_B$  deben verificar:

$$(8.11) \quad N_A \geq 0$$

$$(8.12) \quad N_B \geq 0$$

Observe que claramente la resultante  $N\hat{j}$  de este sistema verifica  $N \geq 0$  y que sus momentos desde los extremos  $B$  y  $A$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} M_B^{(r)} &= -dN_A \leq 0 \\ M_A^{(r)} &= dN_B \geq 0 \end{aligned}$$

en concordancia con las condiciones (8.9) y (8.10) de permanencia.

Si ahora tomamos en cuenta el rozamiento las condiciones (8.11)-(8.12) no se verán afectadas ya que las fuerzas de fricción tienen su línea de acción en la base de apoyo y su momento será nulo desde cualquier punto de la base. Suponiendo que el coeficiente de fricción dinámica es  $f_D$  para todos los puntos de contacto, la condición extra para el caso en que la placa deslice es:

$$T_A + T_B = -f_D(N_A + N_B)$$

mientras que si no desliza se debe cumplir

$$|T_A + T_B| \leq f_E |N_A + N_B|$$

suponiendo un coeficiente de fricción estática  $f_E$  igual para todos los puntos de contacto.

## 8.4. Estática del Rígido.

Consideremos la configuración de *equilibrio* de un rígido, es decir:

$$(8.13) \quad \vec{a}_G = 0$$

$$(8.14) \quad \dot{\vec{\omega}} = 0$$

Dado el rígido en *reposo*:  $\vec{v}_G = 0$ ,  $\vec{\omega} = 0$  en esta configuración, permanecerá en reposo. Para que el rígido esté en equilibrio es necesario y suficiente que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea nula así como el momento de estas fuerzas con respecto a cualquier punto:

$$(8.15) \quad \vec{R}^{(ext)} = 0$$

$$(8.16) \quad \vec{M}_Q^{(ext)} = 0 \quad \forall Q$$

A partir de la primera ecuación cardinal (8.1) es directo ver que (8.13) y (8.15) son equivalentes. Para probar la equivalencia entre (8.14) y (8.16) consideremos la segunda cardinal (8.4) desde el centro de masas:

$$\mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_G \vec{\omega} = \vec{M}_G^{(ext)}$$

Si se cumple (8.14) y  $\vec{\omega} = 0$ , es claro de la ecuación anterior que  $\vec{M}_G^{(ext)} = 0$  (para cualquier otro punto vale también usando (5.13) y que la resultante es cero). Si partimos ahora de que  $\vec{M}_G^{(ext)} = 0$  y el sistema está en reposo ( $\vec{\omega} = 0$ ) tenemos que:

$$\mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}} = 0$$

Si el tensor es *invertible*<sup>2</sup> tenemos que:

$$\mathbb{I}_G^{-1} \mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}} = 0$$

y probamos (8.14).

### 8.4.1. Ejemplo - Barra y placa rectangular.

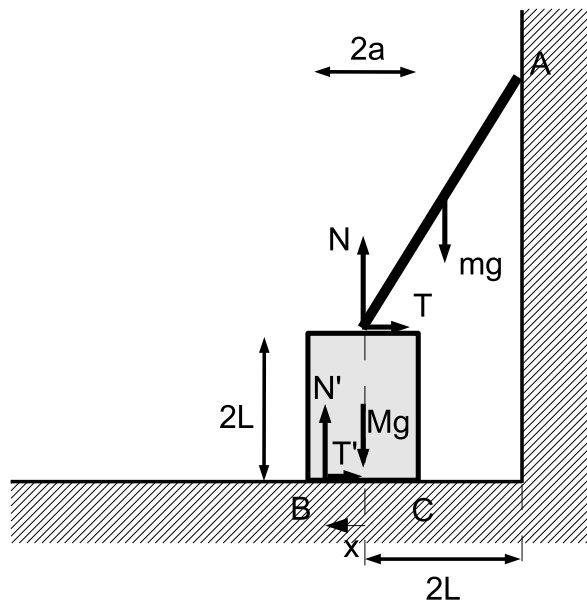


Figura 8.5: Barra y placa rectangular en equilibrio.

Consideremos una barra homogénea de longitud  $4L$  y masa  $m$  apoyada sobre una placa rectangular homogénea de altura  $2L$ , ancho  $2a$  y masa  $M$  y sobre una pared vertical. La placa está apoyada sobre un piso horizontal y está a una distancia

<sup>2</sup>no será el caso del tensor asociado por ejemplo a una barra ideal, para la cual el momento de inercia alrededor del eje que coincide con la barra es cero. Esto no nos permite afirmar nada acerca de la derivada de la componente de la velocidad angular alrededor de ese eje, lo que no es igualmente de interés físico ya que esa velocidad no sería detectable en la experiencia

$2L - a$  de la pared, mientras que el punto de contacto de la barra y la placa está a una distancia  $2L$  de la misma pared. El contacto entre la placa y el piso, así como el contacto entre la placa y la barra, es rugoso y de coeficiente de frotamiento estático  $\mu$ ; el contacto entre la barra y la pared vertical es liso. En este problema (*segundo parcial 2008*) se busca encontrar las condiciones que se deben verificar para que el sistema se encuentre en equilibrio. La componente vertical de la primera cardinal y la segunda cardinal desde el punto  $A$  para la barra son respectivamente:

$$\begin{aligned} N &= mg \\ 2LN - 2\sqrt{3}LT - Lmg &= 0 \end{aligned}$$

La condición de no deslizamiento de la barra es entonces:

$$|T| \leq \mu|N| \Leftrightarrow \mu \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Por otro lado, la primera cardinal para la placa es:

$$\begin{aligned} T' &= T \\ N' &= N + Mg \end{aligned}$$

donde  $N'$  y  $T'$  son la componente normal y tangencial respectivamente de la resultante de las reactivas con el piso.

$$|T'| \leq \mu|N'| \Leftrightarrow \mu \geq \left(\frac{m}{m+M}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

lo que significa que se debe verificar  $\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$  para que no haya deslizamiento de la barra o la placa. Para que la placa no vuelque, en lugar de considerar la reducción del sistema de reactivas que lleva a (8.11)-(8.12), vamos a tomar una reducción alternativa: en este caso, en que el contacto entre el rígido y la superficie de apoyo se da en todos los puntos comprendidos entre los extremos  $B$  y  $C$  de la base de sustentación, es posible considerar que el sistema de reacciones normales tiene un equivalente en su resultante ( $N' \geq 0$ ) aplicada en un punto entre  $B$  y  $C$ , que ubicaremos con la coordenada  $x$  desde el medio de la base. La condición de no vuelco es entonces:

$$-a \leq x \leq a$$

La segunda cardinal a la placa desde el punto medio entre  $B$  y  $C$  nos da:

$$xN' = 2LT$$

de forma que resulta:

$$x = \left(\frac{m}{m+M}\right) \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Como  $x > 0$ , no es esperable que la placa vuelque en torno al punto  $C$ . Por lo tanto, la condición para que no vuelque (en torno a  $B$ ) se reduce a:

$$a \geq \left( \frac{m}{m+M} \right) \frac{L}{\sqrt{3}}$$

### 8.4.2. Ejemplo - Escalera apoyada en una pared.

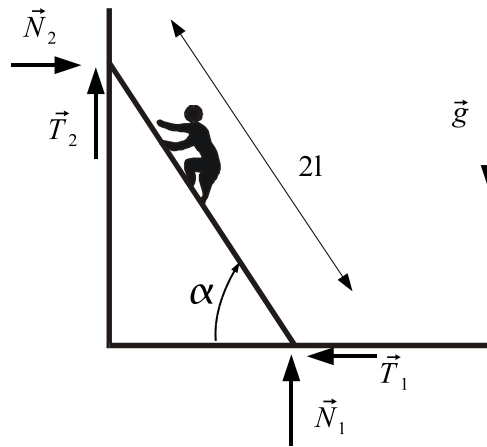


Figura 8.6: Escalera en equilibrio apoyada sobre una pared y piso rugosos.

La escalera de la figura 8.6, de masa  $m$  y longitud  $2l$  está apoyada sobre el piso, de coeficiente de frotamiento  $f_1$ , y sobre la pared vertical, de coeficiente de frotamiento  $f_2$ , formando un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal. Determinaremos el mínimo ángulo  $\alpha$  que permitiría a un pintor de masa  $2m$  subir hasta el extremo superior de la escalera sin que esta deslice. Suponemos entonces que el pintor ya se encuentra en el extremo superior y planteamos, para la escalera en equilibrio, la primera cardinal:

$$\begin{aligned} N_1 + T_2 - 3mg &= 0 \\ T_1 - N_2 &= 0 \end{aligned}$$

y la segunda cardinal desde el punto de contacto con el piso:

$$mgl\cos\alpha + 2l\cos\alpha 2mg - 2l\sin\alpha N_2 - 2l\cos\alpha T_2 = 0$$

Nótese que tenemos sólo *tres* ecuaciones para *cuatro* incógnitas (las dos componentes de la reacción de la pared y el piso). Se trata de un problema *estáticamente indeterminado* o *hiperestático* y nada más se puede hallar acerca de las reacciones

a partir de las condiciones de equilibrio. Si este problema ocurriese en la realidad, las cuatro incógnitas tendrían valores medibles. La falla está en el modelo elegido para resolver el problema. Los cuerpos rígidos son una idealización y si quisiésemos tratar el problema en forma realista deberíamos considerar una barra elástica, lo que está más allá del alcance de este curso.<sup>3</sup> Sin embargo, podemos aún contestar la pregunta del problema.

Las condiciones de permanencia del equilibrio en cuanto al no despegue ( $N_1 > 0$  y  $N_2 > 0$ ) resultan muy simples de verificar. La condición de no deslizamiento es:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq f_1 N_1 \\ |T_2| &\leq f_2 N_2 \end{aligned}$$

La última desigualdad involucra en realidad dos desigualdades (en la primera  $T_1$  sólo puede apuntar hacia la izquierda para asegurar el equilibrio en la horizontal), por lo que las condiciones son:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq f_1 N_1 \\ T_2 &\leq f_2 N_2 \\ -f_2 N_2 &\leq T_2 \end{aligned}$$

que en términos de  $N_2$  son:

- 1)  $tg\alpha \geq \frac{1}{f_1} - \frac{mg}{2N_2}$
- 2)  $tg\alpha \geq \frac{5mg}{2N_2} - f_2$
- 3)  $tg\alpha \leq \frac{5mg}{2N_2} + f_2$

En un gráfico con  $N_2$  como abscisa (figura 8.7) La inecuación 1) nos dice que los valores admisibles de  $tg\alpha$  están por encima de  $\frac{1}{f_1} - \frac{mg}{2N_2}$ , la 2) que están por encima de  $\frac{5mg}{2N_2} - f_2$  y la 3) que están por debajo de  $\frac{5mg}{2N_2} + f_2$ . Excluyendo las regiones no permitidas (sombreadas en la figura 8.7), la región de posibles parejas de  $N_2$  y  $tg\alpha$  tiene un extremo inferior que corresponde a la intersección de las curvas de los lados derechos de 1) y 2) y da el mínimo valor posible para  $tg\alpha$ :

$$\begin{aligned} tg\alpha_{min} &= \frac{5 - f_1 f_2}{6f_1} && \text{si } f_1 f_2 \leq 5 \\ tg\alpha_{min} &= 0 && \text{si } f_1 f_2 \geq 5 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>de hecho, el ejemplo anterior *también* es un caso hiperestático. Lo que podemos hallar es la resultante sobre el rígido, pero la distribución real de las reactivas no podemos encontrarla a menos que consideremos a la placa como un sólido deformable.

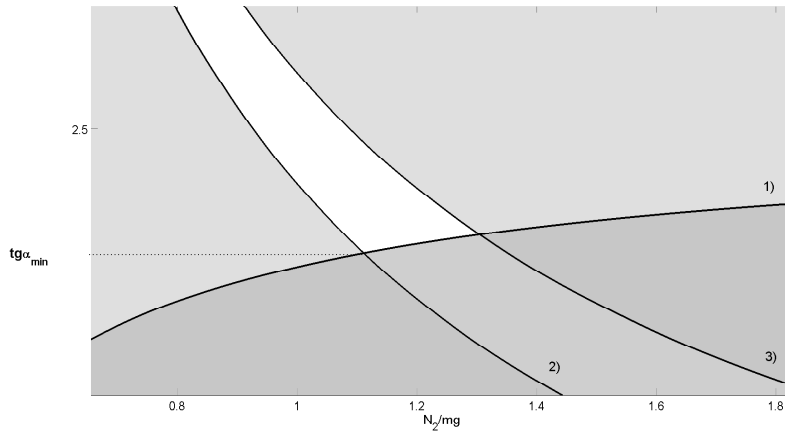


Figura 8.7: Condiciones de no deslizamiento para  $f_1 = 0,4$ ,  $f_2 = 0,2$ .

## 8.5. Dinámica del Rígido en el Plano.

### 8.5.1. Ejemplo - Placa apoyada en un plano inclinado.

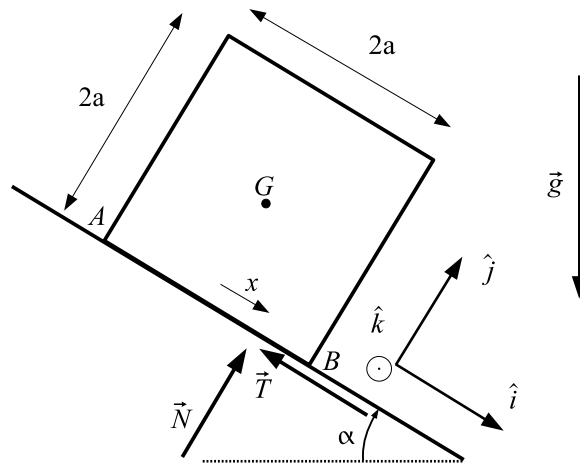


Figura 8.8: Placa apoyada unilateralmente sobre un plano inclinado.

Considere una placa cuadrada y homogénea de lado  $2a$  y masa  $M$  que parte del reposo apoyada sobre un plano rugoso de coeficiente de frotamiento  $f$  inclinado un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal (figura 8.8).

Consideraremos los cuatro estados posibles asociados al estado de movimiento



de la placa inmediatamente después de ser colocada sobre el plano:

1. *Equilibrio.* Supongamos que la placa se encuentra en equilibrio y reduzcamos las reactivas a una fuerza resultante de componentes normal  $N$  y tangencial  $T$  actuando en un punto entre  $A$  y  $B$ , ubicado con la coordenada  $x$  desde el centro de la base. La permanencia de la placa en equilibrio implica que no deslice, se despegue o vuelque:

$$\begin{aligned} |T| &\leq f|N| \\ N &\geq 0 \\ |x| &\leq a \end{aligned}$$

La primera cardinal al rígido nos dice que:

$$\begin{aligned} Mg\operatorname{sen}\alpha - T &= 0 \\ N - Mg\operatorname{cos}\alpha &= 0 \end{aligned}$$

por lo que la segunda condición de equilibrio se verifica trivialmente. La condición de no deslizamiento, a partir de la primera cardinal implica:

$$f \geq \frac{|T|}{|N|} = \operatorname{tg}\alpha$$

Para la tercera condición debemos considerar la segunda cardinal desde el punto medio de la base:

$$xN - Mg\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow x = a\operatorname{tg}\alpha \leq a \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \leq 1$$

2. *Desliza sin volcar.* Para este caso tenemos que  $\ddot{x}_G > 0$ . Si esta condición se verifica, la placa está deslizando y la reacción tangencial es:

$$T = fN = fMg\operatorname{cos}\alpha$$

La condición de deslizamiento es entonces:

$$M\ddot{x}_G = Mg\operatorname{sen}\alpha - T = Mg(\operatorname{sen}\alpha - f\operatorname{cos}\alpha) > 0 \Leftrightarrow f < \operatorname{tg}\alpha$$

Como el movimiento de la placa es sólo de traslación, la aceleración de cualquiera de sus puntos es la misma (tomemos por ejemplo la del centro de masas  $\ddot{x}_G\hat{i}$ ). Esto quiere decir que podemos trabajar con la placa como si no estuviera acelerada considerando una fuerza ficticia  $\vec{F}_i = -m_i\ddot{x}_G\hat{i}$  actuando sobre cada partícula  $i$  de la placa. En forma análoga al caso de la fuerza peso, este sistema

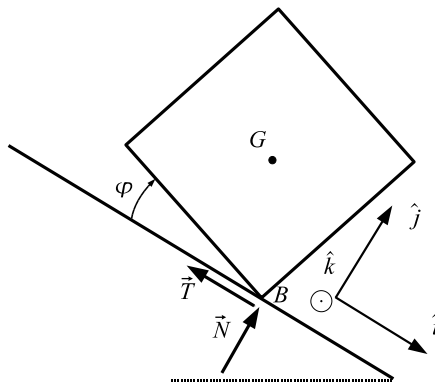
de fuerzas ficticias es equivalente a una fuerza  $\vec{F} = -M\ddot{x}_G\hat{i}$  actuando en  $G$ . La segunda cardinal desde el punto medio de la base nos da entonces:

$$xN - Mgsen\alpha + M\ddot{x}_Ga = 0 \Leftrightarrow x = fa$$

por lo que la condición de no vuelco resulta:

$$x \leq a \Leftrightarrow f \leq 1$$

3. *Vuelca en B sin deslizar.*



Planteamos las ecuaciones cardinales en el instante inicial:

Primera cardinal:

$$Ma\ddot{\varphi} = Mgsen\alpha - T$$

$$Ma\ddot{\varphi} = N - Mgsen\alpha$$

Segunda cardinal desde  $B$ :

$$-\frac{8}{3}Ma^2\ddot{\varphi} = Mga(cos\alpha - sen\alpha)$$

Lo que nos da:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{8a}(sen\alpha - cos\alpha)$$

$$T = \frac{Mg}{8}(5sen\alpha + 3cos\alpha)$$

$$N = \frac{Mg}{8}(3sen\alpha + 5cos\alpha)$$

Para que la placa vuelque se debe cumplir:

$$\ddot{\varphi} > 0 \Leftrightarrow tg\alpha > 1$$

La condición de que no despegue ( $N > 0$ ) se verifica trivialmente mientras que el no deslizamiento implica:

$$f \geq \frac{|T|}{|N|} = \frac{3 + 5tg\alpha}{5 + 3tg\alpha}$$

4. *Desliza y vuelca.* Para este caso consideremos las ecuaciones cardinales en el instante inicial y la reacción tangencial para el deslizamiento ( $T = fN$ ):

$$\begin{aligned} M(\ddot{x}_B + a\ddot{\varphi}) &= Mgsen\alpha - fN \\ Ma\ddot{\varphi} &= N - Mgc\cos\alpha \\ -\frac{2}{3}Ma^2\ddot{\varphi} &= aN - afN \end{aligned}$$

(donde la última ecuación corresponde a la segunda cardinal desde  $G$ ) lo que nos da:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= 3 \left( \frac{f-1}{5-3f} \right) \frac{g}{a} \cos\alpha \\ \ddot{x}_B &= \frac{g}{5-3f} [(5-3f)sen\alpha - (5f-3)c\cos\alpha] \\ N &= \frac{2Mg}{5-3f} c\cos\alpha \end{aligned}$$

Para que la placa no despegue se debe cumplir:

$$N > 0 \Leftrightarrow f < \frac{5}{3}$$

Para que la placa vuelque tenemos (usando la condición anterior):

$$\ddot{\varphi} > 0 \Rightarrow f > 1$$

Finalmente, para que la placa deslice:

$$\ddot{x}_B > 0 \Rightarrow f < \frac{3 + 5tg\alpha}{5 + 3tg\alpha}$$

(que comprende a la condición  $f \leq \frac{5}{3}$ )

En la figura 8.9 se encuentran resumidos los resultados encontrados para cada tipo de movimiento.

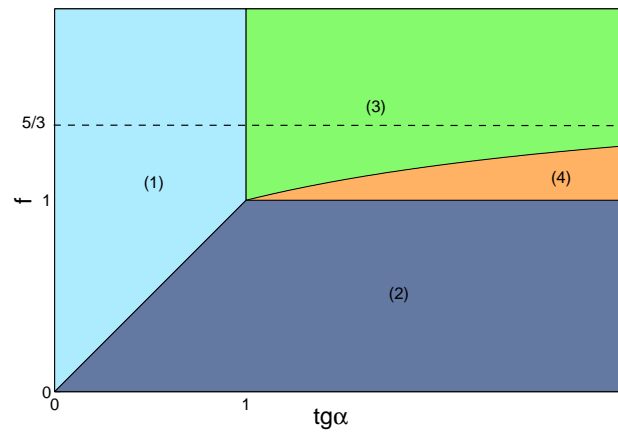


Figura 8.9: Diagrama para los distintos tipos de movimiento de una placa apoyada unilateralmente sobre un plano inclinado.

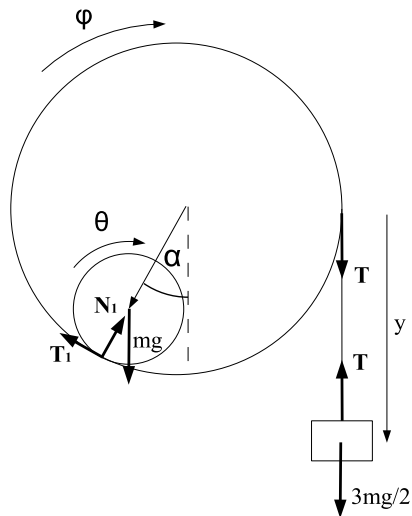


Figura 8.10: Disco rodando sin deslizar en el interior de un aro.

### 8.5.2. Disco y aro.

En el siguiente problema (*examen agosto 2007*) tenemos un aro homogéneo, de masa  $m$  y radio  $r$ , en el interior del cual rueda sin deslizar un disco homogéneo de masa  $m$  y radio  $\frac{r}{3}$ . El aro puede girar libremente alrededor de su centro  $O$  (fijo). Un hilo flexible, inextensible y sin masa está enrollado en el exterior del aro y mediante el mismo se cuelga una masa  $\frac{3m}{2}$ . El ángulo  $\alpha$  indicado en la figura ubica al centro del disco con respecto a la vertical. El sistema parte del reposo. Llamemos  $\theta$  al ángulo de giro del disco con respecto a una dirección fija y  $\varphi$  al del aro. La velocidad del punto del aro en contacto con el disco es:

$$r\dot{\varphi}\hat{t}$$

siendo  $\hat{t}$  la dirección tangente al aro en el punto de contacto. Por otro lado, la velocidad del punto del disco en contacto con el aro es, usando la distribución de velocidades entre el centro del disco y el punto de contacto:

$$\left[ \frac{2}{3}r\dot{\alpha} + \frac{1}{3}r\dot{\theta} \right] \hat{t}$$

y a partir de la rodadura sin deslizamiento entre el disco y el aro tenemos que:

$$\frac{2}{3}r\dot{\alpha} + \frac{1}{3}r\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$$

El otro vínculo que tenemos es que el hilo del que cuelga la masa  $\frac{3m}{2}$  es inextensible, por lo que se verifica:

$$r\dot{\varphi} = \dot{y}$$

De ahora en más consideraremos exclusivamente el caso en el que  $\alpha$  es constante en el tiempo y veremos para qué valor de  $\alpha$  es esto posible. Las ecuaciones cardinales para el disco son:

$$(8.17) \quad N_1 = mg\cos\alpha$$

$$(8.18) \quad T_1 = mg\sin\alpha$$

$$(8.19) \quad \frac{r}{3}T_1 = \frac{m}{2} \left( \frac{r}{3} \right)^2 \ddot{\theta}$$

La segunda cardinal para el aro es:

$$(8.20) \quad r(T - T_1) = mr^2\ddot{\varphi}$$

Y la segunda ley de Newton para la masa que cuelga da:

$$(8.21) \quad \frac{3m}{2}\ddot{y} = \frac{3mg}{2} - T$$

Sustituyendo los vínculos hallados al comienzo, eliminando  $T$  entre (8.20) y (8.21) y comparando con la ecuación que surge de eliminar  $T_1$  entre (8.18) y (8.19) nos queda:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$$

Para que el disco y el aro rueden sin deslizar se debe verificar que:

$$|T_1| \leq f|N_1| \Leftrightarrow f \geq \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}} \Leftrightarrow f \geq \frac{1}{\sqrt{15}}$$

### 8.5.3. Barra en el borde de una mesa.

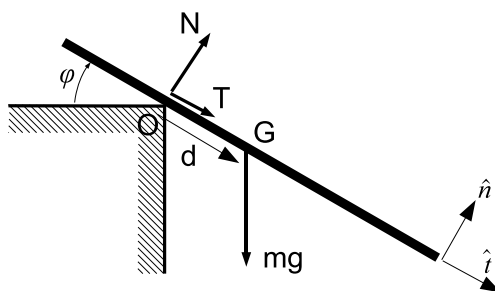


Figura 8.11: Barra en el borde de una mesa.

(segundo parcial 2008) Sobre el borde de una mesa horizontal fija se apoya una barra homogénea de longitud  $\ell$  y masa  $m$ . La barra se mueve en un plano vertical dado. El coeficiente de frotamiento estático entre la barra y la mesa es  $\mu_e = \frac{2}{\sqrt{3}}$  y el dinámico es  $\mu_d = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Inicialmente la barra está en posición horizontal de manera que un  $\frac{1}{3}$  de su longitud está en contacto con la mesa y en reposo. Lo primero que vamos a hallar es la ecuación de movimiento para la barra mientras no deslice. La segunda cardinal a la barra desde el punto  $O$  es:

$$I_O \ddot{\varphi} = mgd \cos\varphi$$

siendo  $d = \frac{\ell}{6}$  e  $I_O = I_G + m \left(\frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + m \left(\frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{9}$  a partir del teorema de Steiner para momentos de inercia. La ecuación de movimiento se simplifica a:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2\ell} \cos\varphi$$

Alternativamente, como la fuerza de rozamiento es de potencia nula mientras no se produzca deslizamiento, podríamos hallar la ecuación de movimiento a partir de la

conservación de la energía<sup>4</sup>:

$$T + U = cte.$$

siendo  $T$  la energía cinética del rígido, que podemos calcular usando (7.34) para el punto  $O$ :

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

y  $U$  la energía potencial asociada al peso de la barra:

$$U = -mgd \operatorname{sen} \varphi$$

Hallemos ahora el ángulo para el cual la barra comienza a deslizar. Necesitaremos encontrar las reacciones de la mesa sobre la barra. Comencemos por escribir la aceleración del centro de masas ( $G$ ) de la barra:

$$\vec{a}_G = -d\dot{\varphi}^2 \hat{t} - d\ddot{\varphi} \hat{n}$$

Luego, la primera cardinal a la barra es:

$$\begin{aligned} -md\dot{\varphi}^2 &= T + mg \operatorname{sen} \varphi \\ -md\ddot{\varphi} &= N - mg \operatorname{cos} \varphi \end{aligned}$$

Preintegrando la ecuación de movimiento tenemos:

$$\dot{\varphi}^2 = 3 \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \varphi$$

(equivalente a usar la conservación de la energía) y las reacciones sobre la barra nos quedan:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{3}{2} mg \operatorname{sen} \varphi \\ N &= \frac{3}{4} mg \operatorname{cos} \varphi \end{aligned}$$

La condición de no deslizamiento es:

$$|T| \leq \mu_e |N| \Rightarrow tg \varphi \leq \frac{\mu_e}{2}$$

y el ángulo donde comienza la barra a deslizar es entonces:

$$tg \varphi_d = \frac{\mu_e}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi_d = \frac{\pi}{6}$$

---

<sup>4</sup>ver (5.19)

Una vez que la barra está deslizando se cumple que  $T = -\mu_d N = -\frac{N}{\sqrt{3}}$  que *no* coincide con el valor que tenía inmediatamente antes de comenzar el deslizamiento, es decir, la fuerza de rozamiento sufre una discontinuidad. Esta discontinuidad se pondrá de manifiesto en un cambio en la aceleración del centro de masas de la barra. La primera cardinal a la barra será para este tramo del movimiento:

$$\begin{aligned} m\vec{a}_G \cdot \hat{t} &= T + mg \operatorname{sen} \varphi = -\frac{N}{\sqrt{3}} + mg \operatorname{sen} \varphi \\ m\vec{a}_G \cdot \hat{n} &= N - mg \operatorname{cos} \varphi \end{aligned}$$

Para hallar la nueva  $\vec{a}_G$  podemos usar que la normal no sufre ninguna discontinuidad, por lo que podemos usar el valor de  $N$  inmediatamente antes de deslizar (es decir, evaluada para el ángulo  $\varphi_d$ ):

$$\vec{a}_G = \frac{g}{8} \hat{t} - \frac{\sqrt{3}g}{8} \hat{n}$$

## 8.6. Dinámica del Rígido en el Espacio.

Consideremos ahora algunos ejemplos del movimiento de un rígido en el espacio.

### 8.6.1. Masas coplanares.

Consideremos el ejemplo de las secciones 7.1 y 7.2.2 y tomemos que los contactos en  $O$  y  $O'$  carecen de fricción. Suponiendo que el conjunto gira alrededor del eje  $OO'$  con velocidad angular constante  $\omega$ , hallaremos el momento total (referido a  $C$ ) ejercido por las articulaciones en  $O$  y  $O'$  y que será el momento reactivo  $\vec{M}_C^{(r)}$ .

La segunda cardinal (8.4) desde  $C$  (centro de masas del sistema) es:

$$\vec{M}_C^{(r)} = \mathbb{I}_C \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_C \vec{\omega}$$

siendo  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_1$ . Como la derivada relativa es nula para  $\omega$  cte.:

$$\vec{M}_C^{ext} = \omega \hat{e}_1 \times \mathbb{I}_C \omega \hat{e}_1 = 2m\ell^2 \omega^2 \hat{e}_3$$

Si en cambio considerásemos el giro alrededor de uno de los ejes principales hallados en 7.2.2, nos encontraríamos con que el momento reactivo es cero ya que  $\vec{\omega}$  y  $\mathbb{I}_C \vec{\omega}$  son colineales.



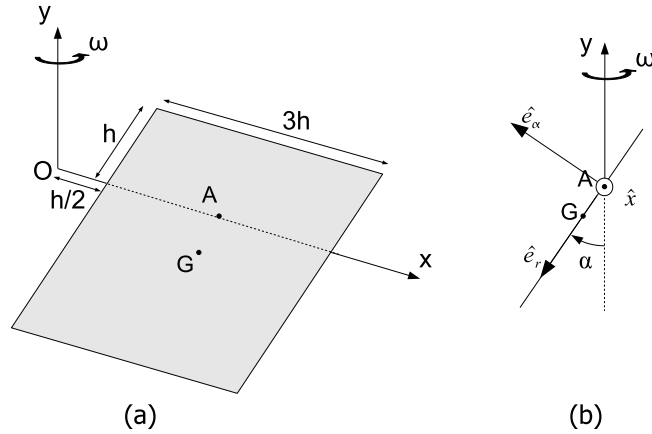


Figura 8.12: (a) Placa cuadrada girando libremente (b) Vista lateral.

### 8.6.2. Placa cuadrada girando alrededor de un eje.

Retomamos el ejemplo de la sección 6.4.1 donde ya habíamos obtenido la velocidad angular de la placa:

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha}\hat{x} + \omega\hat{y}$$

Queremos ahora obtener la ecuación de movimiento para el ángulo  $\alpha$ . Sea  $G$  el centro de masas de la placa y  $A$  la proyección del mismo sobre el eje  $Ox$ . La segunda cardinal a la placa desde el punto  $A$  es (según (8.4):

$$M(G - A) \times \vec{a}_A + \mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_A \vec{\omega} = \vec{M}_A^{(ext)}$$

Siendo  $m$  la masa del rígido. El tensor de inercia con respecto a  $G$ , escrito en la base propia de la placa es:

$$\mathbf{I}_G^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} = I_G \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3mh^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde usamos el valor ( $I_G$ ) del momento de inercia alrededor del eje perpendicular a la placa que pasa por su centro. A partir del teorema de Steiner (7.28) tenemos:

$$\mathbf{I}_A^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} = \mathbf{I}_G^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} + m \left(\frac{h}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{mh^2}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(nótese que la base que era propia para el tensor desde  $G$  sigue siéndolo desde  $A$  y esto corresponde a que  $G - A$  tiene la dirección de un eje principal original). Trabajemos

ahora sobre el término de momentos. Decir que la placa gira libremente alrededor de  $Ox$  es equivalente a plantear que la articulación que une la placa al eje es cilíndrica lisa y por tanto no ejerce ningún momento sobre la placa en la dirección  $\hat{x}$ :  $\vec{M}_A^{(art)} \cdot \hat{x} = 0$ . Esto nos sugiere considerar sólo la proyección de la segunda cardinal según  $\hat{x}$ , que involucrará exclusivamente al momento de las fuerzas no reactivas (el peso) según esta dirección:

$$M(G - A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{x} + \mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{x} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_A \vec{\omega} \cdot \hat{x} = \vec{M}_A^{(ext)} \cdot \hat{x} = \vec{M}_A^{(peso)} \cdot \hat{x} = mg \frac{h}{2} \text{sen} \alpha$$

Como  $\vec{a}_A$  está dirigida según  $\hat{x}$  (ya que corresponde a un movimiento circular uniforme)  $(G - A) \times \vec{a}_A$  no tiene componente en  $\hat{x}$  y la segunda cardinal proyectada se simplifica a:

$$\mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{x} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_A \vec{\omega} \cdot \hat{x} = mg \frac{h}{2} \text{sen} \alpha$$

Expresemos ahora  $\vec{\omega}$  en la base  $\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}$ :

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha} \hat{x} + \omega \hat{y} = -\dot{\alpha} \hat{x} + \omega (\text{sen} \alpha \hat{e}_\alpha - \text{cos} \alpha \hat{e}_r)$$

Su derivada es:

$$\dot{\vec{\omega}} = -\ddot{\alpha} \hat{x} + \omega \dot{\alpha} (\text{cos} \alpha \hat{e}_\alpha + \text{sen} \alpha \hat{e}_r)$$

y los términos de la segunda cardinal se pueden calcular fácilmente en la representación diagonal de  $\mathbb{I}_A$ :

$$(\mathbf{I}_A \omega)^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} = \frac{mh^2}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \\ -\omega \text{cos} \alpha \\ \omega \text{sen} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mh^2 \dot{\alpha} \\ -\frac{3mh^2}{4} \omega \text{cos} \alpha \\ \frac{7mh^2}{4} \omega \text{sen} \alpha \end{pmatrix}$$

es decir (independizándonos de la representación):

$$\mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} = -mh^2 \dot{\alpha} \hat{x} - \frac{3mh^2}{4} \omega \text{cos} \alpha \hat{e}_r + \frac{7mh^2}{4} \omega \text{sen} \alpha \hat{e}_\alpha$$

en forma similar:

$$\mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} = -mh^2 \ddot{\alpha} \hat{x} + \frac{3mh^2}{4} \omega \dot{\alpha} \text{sen} \alpha \hat{e}_r + \frac{7mh^2}{4} \omega \dot{\alpha} \text{cos} \alpha \hat{e}_\alpha$$

y la segunda cardinal nos queda:

$$-mh^2 \ddot{\alpha} + mh^2 \omega^2 \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha = mg \frac{h}{2} \text{sen} \alpha$$

o reagrupando:

$$\ddot{\alpha} + \text{sen} \alpha \left( \frac{g}{2h} - \omega^2 \text{cos} \alpha \right) = 0$$



tanto en la base  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , solidaria al rígido, como en la base  $\{\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{k}\}$ , donde  $\hat{\eta} \equiv \hat{k} \times \hat{\xi}$ . En lo que sigue utilizaremos esta última. Llamaremos  $\vec{\omega}$  a la velocidad angular del rígido y  $\vec{\Omega}$  a la del sistema  $\{O, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{k}\}$ . La velocidad angular del rígido es de acuerdo con (6.8):

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{K} + \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\psi}\hat{k}$$

que descomponiendo  $\hat{K}$  según  $\hat{k}$  y  $\hat{\eta}$  nos queda:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\varphi}\text{sen}\theta\hat{\eta} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta)\hat{k}$$

Por otro lado tenemos:

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\hat{K} + \dot{\theta}\hat{\xi} = \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\varphi}\text{sen}\theta\hat{\eta} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta\hat{k}$$

El momento angular del trompo con respecto a  $O$  es de acuerdo con (7.10):

$$\vec{L}_O = \mathbb{1}_O\vec{\omega} = I_1\dot{\theta}\hat{\xi} + I_1\dot{\varphi}\text{sen}\theta\hat{\eta} + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta)\hat{k}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden hallar aplicando la segunda cardinal (8.3) al trompo desde  $O$ :

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(ext)}$$

donde, en virtud de que la articulación es esférica lisa, el momento corresponde sólo a la fuerza peso. La derivada temporal la podemos plantear de esta manera:

$$\frac{d^r\vec{L}_O}{dt} = \frac{d^r\vec{L}_O}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_O$$

donde  $\frac{d^r}{dt}$  es la derivada relativa al sistema  $\{O, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{k}\}$ :

$$\frac{d^r\vec{L}_O}{dt} = I_1\ddot{\theta}\hat{\xi} + I_1\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}\text{sen}\theta]\hat{\eta} + I_3\frac{d}{dt}[\dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta]\hat{k}$$

Por otro lado:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L}_O = [I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta)\dot{\varphi}\text{sen}\theta - I_1\dot{\varphi}^2\text{sen}\theta\text{cos}\theta]\hat{\xi} + [I_1\dot{\varphi}\dot{\theta}\text{cos}\theta - I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta)\dot{\theta}]\hat{\eta}$$

El momento de las fuerzas externas es el del peso:

$$\vec{M}_O^{(ext)} = (G - O) \times (-mg\hat{K}) = -mgd\hat{k} \times \hat{K} = mgd\text{sen}\theta\hat{\xi}$$

Proyectando ahora la segunda cardinal según  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $\hat{k}$  nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$(8.22) \quad I_1\ddot{\theta} + [I_3\dot{\psi} + (I_3 - I_1)\dot{\varphi}\text{cos}\theta]\dot{\varphi}\text{sen}\theta = mgd\text{sen}\theta$$

$$(8.23) \quad I_1\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}\text{sen}\theta] + [(I_3 - I_1)\dot{\varphi}\text{cos}\theta - I_3\dot{\psi}]\dot{\theta} = 0$$

$$(8.24) \quad \frac{d}{dt}[\dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos}\theta] = 0$$

La ecuación (8.24) indica que:

$$(8.25) \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = s$$

donde  $s$  es una constante que llamamos el *spin* del trompo. Esta preintegral puede obtenerse también de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O \cdot \hat{k}) = \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{k} + \vec{L}_O \cdot \dot{\hat{k}} = \vec{M}_O^{(ext)} \cdot \hat{k} + \vec{L}_O \cdot \vec{\Omega} \times \hat{k}$$

usando ahora que  $\vec{M}_O^{(ext)}$  no tiene componente según  $\hat{k}$  y que  $\vec{L}_O$  se puede escribir como:

$$\vec{L}_O = I_1 \vec{\Omega} + [I_3 \dot{\psi} + (I_3 - I_1) \dot{\varphi} \cos \theta] \hat{k}$$

lo que indica que  $\vec{L}_O$  es coplanar con  $\vec{\Omega}$  y  $\hat{k}$ , por lo que  $\vec{L}_O \cdot \vec{\Omega} \times \hat{k} = 0$  y finalmente:

$$\frac{d}{dt} I_3 [\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta] = \frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \hat{k}) = 0$$

es decir, (8.25) está indicando que se conserva la componente del momento angular según  $\hat{k}$ . Análogamente, podemos ver que la componente del momento angular según  $\hat{K}$  es una cantidad conservada:

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \hat{K}) = \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{K} = \vec{M}_O^{(ext)} \cdot \hat{K} = 0$$

Por lo tanto:

$$(8.26) \quad \vec{L}_O \cdot \hat{K} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = L_Z$$

donde  $L_Z$  es la componente vertical del momento angular. Otra cantidad conservada en el movimiento es la energía del trompo:

$$E = T + U$$

donde de acuerdo a (7.34) la energía cinética se escribe como:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} \left[ I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \right]$$

y la potencial es:

$$U = mgd \cos \theta$$

por lo que:

$$(8.27) \quad \frac{1}{2} \left[ I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \right] + mgd \cos \theta = E$$

El conjunto de ecuaciones (8.25), (8.26), (8.27) es equivalente al conjunto (8.22), (8.23), (8.24) por lo que se pueden considerar como las ecuaciones de movimiento del trompo.