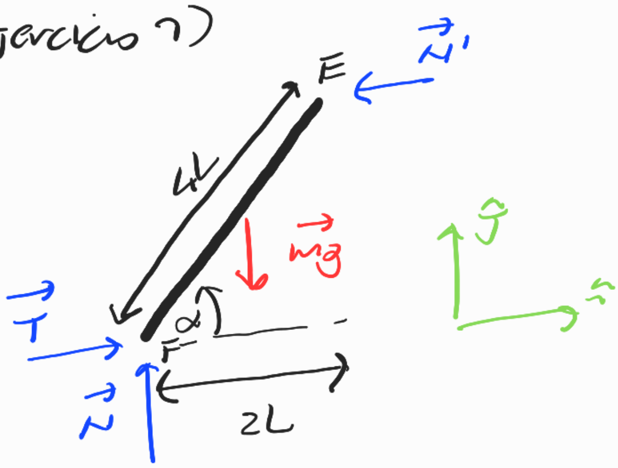
Mecánica Newtoniana, Segundo Parcial (03/12/24)

Ejercicio 1)

a)



$\cos\alpha = \frac{2L}{4L} = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$

• 1era Cardinal a la barra: $\begin{cases} \hat{i}) & T = N' \\ \hat{j}) & N = mg \end{cases}$

• 2da Cardinal a la barra desde F: $N' \, 4L \sin\alpha = mg \, 2L \cos\alpha$

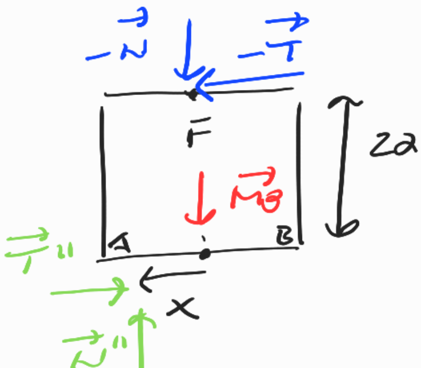
$$\Rightarrow \quad T = mg/2\sqrt{3}$$
$$N = mg$$
$$N' = mg/2\sqrt{3}$$

Para que la barra se mantenga en equilibrio se debe verificar:

$N, N' \geq 0$ ✓

$|\vec{T}| \leq f \, |\vec{N}|$: $\boxed{f \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}}$ (i)

b)



• 1era cardinal a la placa: $\begin{cases} \hat{i}) & T'' = T \\ \hat{j}) & N'' = N + Mg \end{cases}$

• 2da Cardinal a la barra desde el pto. medio de $\overline{AB}$:

$$N'' x = T \, 2a$$

$$\Rightarrow \quad T'' = \frac{mg}{2\sqrt{3}}$$

$$N'' = (M+m)g$$

$$x = \left(\frac{m}{M+m}\right)\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Para que la placa se mantenga en equilibrio se debe verificar:

$$N'' \geq 0 \ \checkmark$$

$$T'' \leq f N'' : \quad \boxed{f \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{m}{M+m}\right)} \quad (ii)$$

$$-a \leq x \leq a : \quad \boxed{-1 \leq \left(\frac{m}{m+M}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \leq 1} \quad (iii)$$

c) (i) $f \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$: si no se cumple la barra se desliza con respecto al bloque

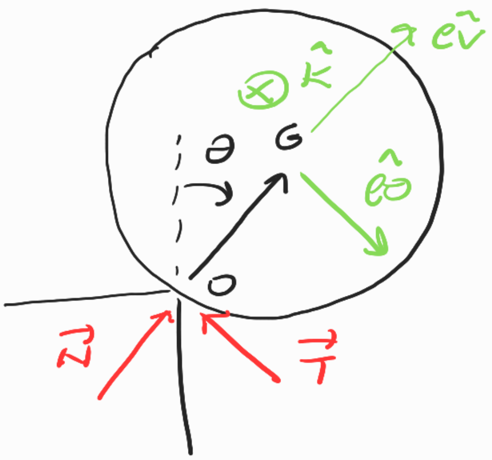
(ii) $f \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{m}{m+M}\right)$: si no se cumple el bloque se desliza con respecto al piso

(iii) $\left(\frac{m}{m+M}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$: la placa nunca vuelca con respecto a B

$\underbrace{\left(\frac{m}{m+M}\right)}_{<1}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{<1} \leq 1$: se cumple siempre, por lo que la placa nunca vuelca con respecto a A

Ejercicio 2)

a)



Mientras el disco rueda sin deslizar con respecto al escalón: $\vec{v}_O = 0$

$\Rightarrow$ la potencia de las fuerzas no conservativas es nula:

$$\left.\begin{aligned} P^{(T)} &= \vec{T}\cdot\vec{v}_O = 0 \\ P^{(N)} &= \vec{N}\cdot\vec{v}_O = 0 \end{aligned}\right] \rightarrow \boxed{\dot{E} = 0}$$

$$E = T + U = \frac{1}{2} I_{O,\hat{k}}\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta = E(0) = mgr$$

$$I_{O,\hat{k}} \overset{(\text{Steiner})}{=} \underbrace{I_{G,\hat{k}}}_{\frac{1}{2}mr^2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 = mgr(1-\cos\theta)} \quad (i)$$

b) primera cardinal al disco:

$\hat{e_r})$ $N - mg\cos\theta = -mr\dot{\theta}^2$ (I)

$\hat{e_\theta})$ $mg\sin\theta - T = mr\ddot{\theta}$ (II)

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta - mr\dot{\theta}^2 \overset{(i)}{=} mg\cos\theta - \frac{4}{3}mg(1-\cos\theta)$$

$$N = \frac{1}{3}mg(7\cos\theta - 4)$$

derivando (i) en el tiempo: $\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g}{r}\sin\theta}$ (ii)

$$T = mg\sin\theta - mr\ddot{\theta} \overset{(ii)}{=} \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

Para que el disco no se deslice: $|\vec{T}| \le f_e|\vec{N}|$:

$$f_E \geq \frac{|T|}{|N|} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{|7\cos\theta - 4|}$$

Si el deslizamiento comienza para $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$f_E = \frac{\operatorname{sen}\pi/4}{7\cos\pi/4 - 4} = \boxed{\frac{7}{7-4\sqrt{2}}}$$

c) A las ecuaciones (I) y (II) se suma ahora:

2ª Cardinal al disco desde G: $I_{G,\hat{k}}\,\dot{\omega} = rT$ (III)

y la fricción es de carácter dinámico: $T = f_D N$ (IV)

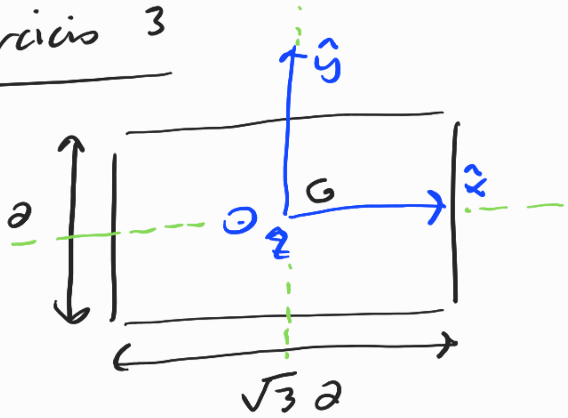
Eliminando T entre (II) y (III):

$$\boxed{\dot{\omega} = 2\left(g/r\operatorname{sen}\theta - \ddot{\theta}\right)}$$

(IV) en (II) y eliminando luego N entre (II) y (I):

$$\boxed{\ddot{\theta} - f_D\,\dot{\theta}^2 = g/r\,(\operatorname{sen}\theta - f_D\cos\theta)}$$

Ejercicio 3



$\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ es base de ejes principales por ser perpendiculares a planos de simetría especular (que contienen a G)

$$\mathbb{I}_G^{\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

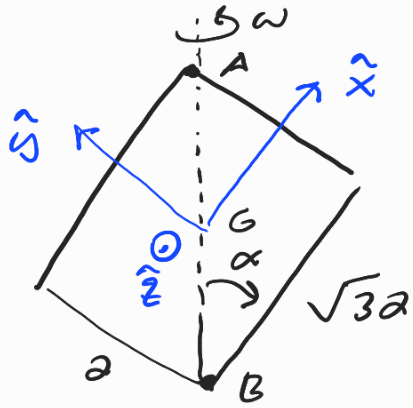
$I_3 = I_1 + I_2$ por ser rígido plano (y G pertenece al plano)

$$I_1 = \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \left(\frac{m}{\sqrt{3}\,a^2}\right) y^2 = \boxed{\frac{ma^2}{12}}$$

Cambiamos el rol de $a \to \sqrt{3}a$: $I_2 = \frac{ma^2}{4}$

Luego: $$\boxed{\mathbb{I}_G^{\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

b)



$\vec{L}_G = \mathbb{I}_G \vec{\omega}$; $\vec{\omega} = \omega\cos\alpha\,\hat{x} + \omega\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{y}$

$$\mathbb{I}_G\vec{\omega} = \omega\cos\alpha\,\underbrace{\mathbb{I}_G\hat{x}}_{\left(\frac{ma^2}{12}\right)\hat{x}} + \omega\,\text{sen}\,\alpha\,\underbrace{\mathbb{I}_G\hat{y}}_{3\left(\frac{ma^2}{12}\right)\hat{y}}$$

$\hat{x}$ es eje. ppal. de $\mathbb{I}_G$

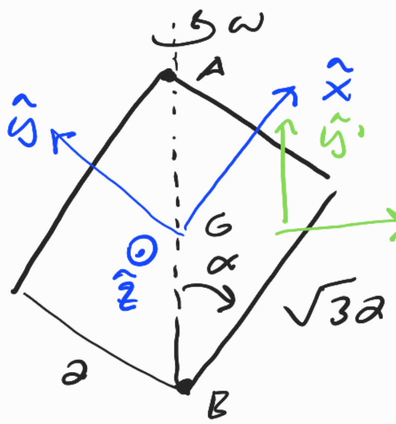
$\hat{y}$ es eje. ppal. de $\mathbb{I}_G$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_G = \frac{ma^2}{12}\omega\left(\cos\alpha\,\hat{x} + 3\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{y}\right)}$$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\alpha = \frac{\pi}{6}$

c) $$\vec{M}_G^{(ext)} = \dot{\vec{L}}_G = \frac{ma^2}{12}\omega\left(\cos\alpha\,\underbrace{\vec{\omega}\times\hat{x}}_{-\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{z}} + 3\,\text{sen}\,\alpha\,\underbrace{\vec{\omega}\times\hat{y}}_{\omega\cos\alpha\,\hat{z}}\right)!$$

$$\boxed{\vec{M}_G^{(ext)} = \frac{ma^2}{6}\omega^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\hat{z}}$$



Las reacciones en A y B : $\vec{R_A}, \vec{R_B}$ se pueden escribir como:

$$\vec{R_A} = R_{Ax'}\,\hat{x}' + R_{Ay'}\,\hat{y}' + R_{Az}\,\hat{z}$$

$$\vec{R_B} = R_{Bx'}\,\hat{x}' + R_{By'}\,\hat{y}' + R_{Bz}\,\hat{z}$$

$$AG^2 = BG^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2} = a$$

1era cardinal al rígido:
$$\begin{cases} \hat{x}')\ R_{Ax'} + R_{Bx'} = 0 & (i) \\ \hat{y}')\ R_{Ay'} + R_{By'} = mg & (ii) \\ \hat{z})\ R_{Az} + R_{Bz} = 0 & (iii) \end{cases}$$

2da cardinal desde G:
$$\begin{cases} \hat{x}')\ +aR_{Az} - aR_{Bz} = 0 & (iv) \\ \hat{z})\ -aR_{Ax'} + aR_{Bx'} = \frac{ma^2}{6}\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & (v) \end{cases}$$

De (iii) y (iv):

(i) y (v):

$$\boxed{\begin{aligned} & R_{Az} = R_{Bz} = 0 \\ & R_{Bx'} = \frac{ma}{12}\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ & R_{Ax'} = -R_{Bx'} \end{aligned}}$$