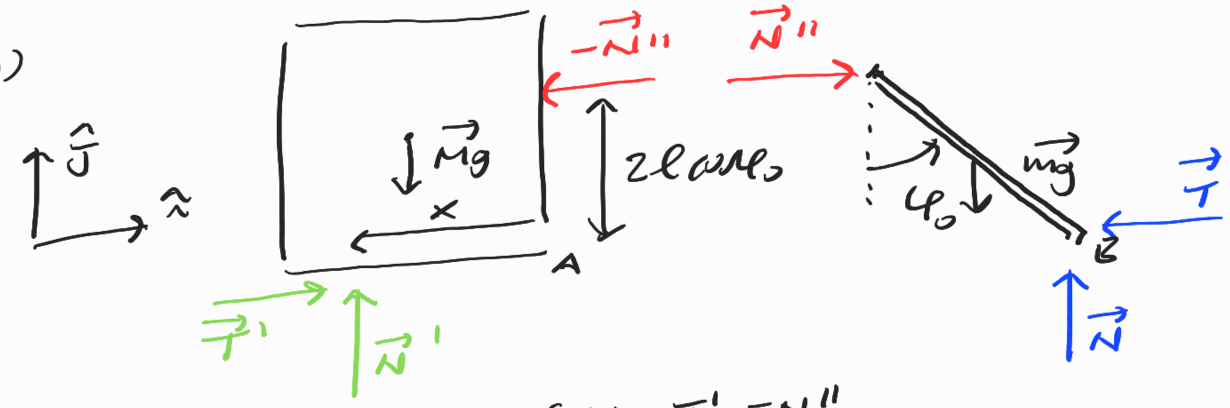
Mecánica Newtoniana, Segundo Parcial (30/11/23)

Ejercicio 1)

a)



- 1era cardinal a la placa: $\begin{cases} \hat{i})\ T' = N'' \\ \hat{j})\ N' = Mg \end{cases}$

- 2da cardinal a la placa desde A: $xN' = \ell Mg + 2\ell\cos\varphi_0 N''$

- 1era cardinal a la barra: $\begin{cases} \hat{i})\ N'' = T \\ \hat{j})\ N = mg \end{cases}$

- 2da cardinal a la barra desde B: $mg\,\ell\,\operatorname{sen}\varphi_0 = 2\ell\cos\varphi_0 N''$

Luego:

$$N = mg$$
$$N' = Mg$$
$$N'' = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\varphi_0$$
$$T = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\varphi_0$$
$$T' = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\varphi_0$$
$$x = \ell\left(1 + \frac{m}{M}\operatorname{sen}\varphi_0\right)$$

Para que el sistema se mantenga en equilibrio se deben verificar:

$N, N', N'' \geq 0$ ✓ (no desprendimiento)

$T \leq f_E N$: $\boxed{f_E \geq \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi_0}$ (no deslizamiento de la barra)

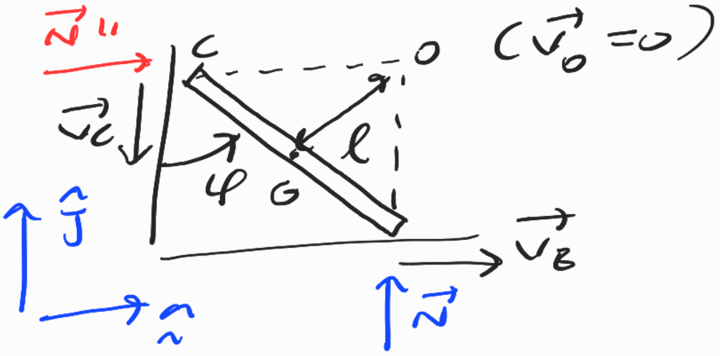
$T' \leq f_E' N'$: $\boxed{f_E' \geq \frac{1}{2}\frac{m}{M}\operatorname{tg}\varphi_0}$ (no deslizamiento de la placa)

$0 \leq x \leq 2\ell$: $\boxed{\frac{m}{M}\operatorname{sen}\varphi_0 \leq 1}$ (no vuelco de la placa)

b) $F_E = 0$: la barra se desliza

Como las reacciones son de potencia nula: $\begin{cases} \mathcal{P}_N = \vec N \cdot \vec v_B = 0, \\ \mathcal{P}_{N''} = \vec N'' \cdot \vec v_C = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\dot E = 0}$, $E = T + U$;



$$T = \frac{1}{2} I_O \dot\varphi^2,$$

$$I_O = I_G + m\ell^2 = \frac{4}{3} m\ell^2$$

$$\left(I_G = \int_{-\ell}^{\ell} \left(\frac{m}{2\ell}\right) dx\, x^2 = \frac{m\ell^2}{3} \right)$$

(Idem: $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec r}_G^{\,2} + \frac{1}{2} I_G \dot\varphi^2$, $\vec v_G = \dot{\vec r}_G$, $\vec r_G = \ell \operatorname{sen}\varphi\, \hat\imath + \ell \cos\varphi\, \hat j$)

$$E = T + U = \boxed{\frac{2}{3} m\ell^2 \dot\varphi^2 + mg\ell\cos\varphi = mg\ell\cos\varphi_0}$$

c) $N'' = m\, \vec a_G \cdot \hat\imath = m(\ell\cos\varphi\, \ddot\varphi - \ell \operatorname{sen}\varphi\, \dot\varphi^2)$

$$\dot\varphi^2 = \frac{3}{2} g/\ell (\cos\varphi_0 - \cos\varphi) \xrightarrow[\text{deriv. en } t]{} \ddot\varphi = \frac{3}{4} g/\ell \operatorname{sen}\varphi$$

$$\Rightarrow N'' = \frac{3mg}{4} \left[\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - 2\operatorname{sen}\varphi(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) \right]$$

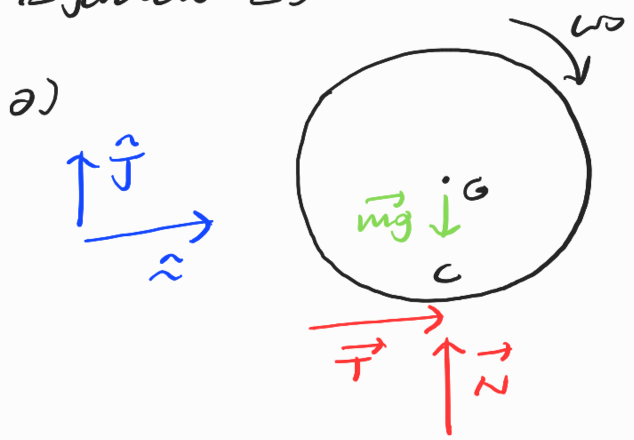
$\varphi_d \,/\, N''(\varphi_d) = 0$: $[\cos\varphi_d - 2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_d)] \operatorname{sen}\varphi_d = 0$:

$$\boxed{\cos\varphi_d = \frac{2}{3}\cos\varphi_0}$$

(Idem: N'' es la fuerza responsable de acelerar el centro de masas en la dirección horizontal; $\varphi = \varphi_d$ corresponde a cuando $\dot x_G^2$ alcanza su máximo: $\left.\frac{d}{d\varphi} (\cos^2\varphi\, \dot\varphi^2)\right|_{\varphi=\varphi_d} = 0$)

Ejercicio 2)

a)



$\vec{v}_C(0) = \underbrace{(v_0 - \omega_0 r)}_{< v_P}\hat{i}$: el disco desliza hacia la izq. con respecto a la placa

$\Rightarrow \vec{T} = T\hat{i}$

1era cardinal al disco: $\begin{cases} m\ddot{x}_G = T \\ N = mg \end{cases}$

2da cardinal desde G: $I_G \dot{\omega} = -rT$, $I_G = \frac{1}{2} m r^2$

fricción dinámica: $T = f_0 N = f_0 mg$: $\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_G &= f_0 g \\ \dot{\omega} &= -2 f_0 g / r \end{aligned}}$

Integrando en el tiempo las ecs. de movimiento:

$\dot{x}_G - v_0 = f_0 g t$

$\omega - \omega_0 = -2 f_0 g / r \, t$

La rodadura sin deslizamiento comienza cuando $v_C = \boxed{\dot{x}_G - \omega r = v_P}$:

$v_0 - f_0 g t^* - (\omega_0 - 2 f_0 g / r \, t^*) r = v_P$:

$$\boxed{t^* = \frac{v_P - (v_0 - \omega_0 r)}{3 f_0 g}}$$

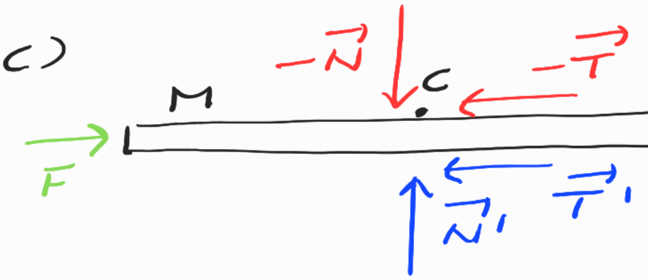
b) $P_T = \vec{T} \cdot \vec{v}_C = f_0 mg (\dot{x}_G - \omega r) =$

$f_0 mg (v_0 - \omega_0 r + 3 f_0 g t)$

$$\boxed{W_T = \int_0^{t^*} P_T \, dt = f_0 mg \left[(v_0 - \omega_0 r) t^* + 3 f_0 g \frac{1}{2} t^{*2} \right]}$$

(Idea: $W_T = \Delta T$, $T = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$)

c)



para analizar a la placa:

$\hat{i})$ $F - T - T' = 0$, $T = f_D N$

$T' = f_D' N'$

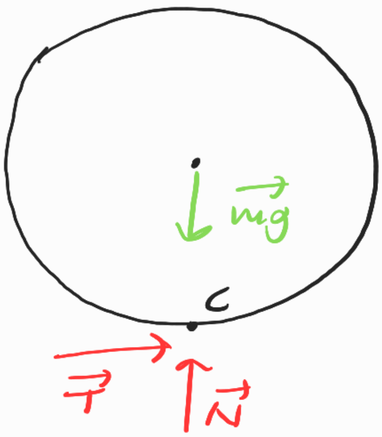
$\hat{j})$ $N' - N - Mg = 0$, $N = mg$

$\Rightarrow N' = (M+m)g$

$T' = f_D'(M+m)g \longrightarrow \boxed{F = f_D mg + f_D'(M+m)g}$

(hasta $t = t^*$)

$t > t^*$:



$$\left[\begin{array}{l} m\ddot{x}_G = T \\ \frac{mr^2}{2}\dot{\omega} = -rT \end{array}\right.$$

Suponiendo que se mantiene rodando sin deslizarse con respecto a la placa:

$$\left\{\begin{array}{l} v_C = \dot{x}_G - \omega r = v_P \\ \text{fricción estática: } |T| \leq f_E N = f_E mg \end{array}\right.$$

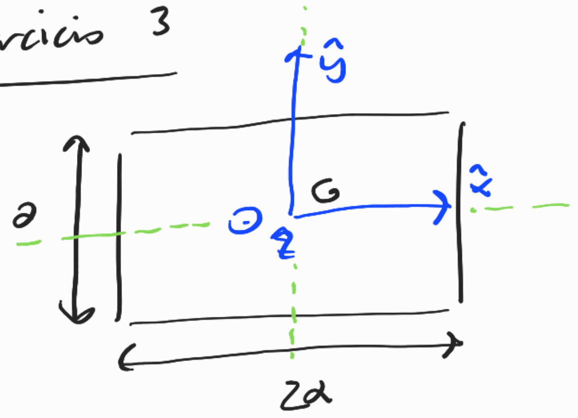
$\dot{x}_G - \omega r = v_P$: $\ddot{x}_G = \dot{\omega} r \Rightarrow \frac{mr^2}{2}\dot{\omega} = \frac{mr^2}{2}\frac{\ddot{x}_G}{r} = -rT$:

$-\frac{1}{2}\underbrace{m\ddot{x}_G}_{T} = T$: $\boxed{T = 0}$

($T \leq f_E N$ ✓)

Para $t > t^*$, $T = 0$: $F - T' = 0$: $\boxed{F = f_D'(M+m)g}$

Ejercicio 3



$\{\hat x, \hat y, \hat z\}$ es base de ejes principales por ser perpendiculares a planos de simetría especular (que contienen a G)

$$\mathbb{I}_G^{\{\hat x,\hat y,\hat z\}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

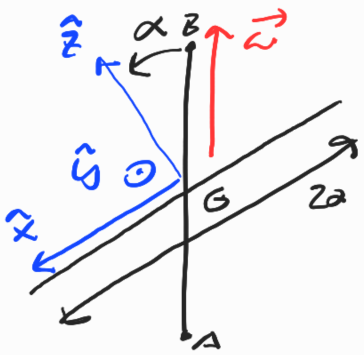
$I_3 = I_1 + I_2$ por ser rígido plano (y G pertenece al plano)

$$I_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-a}^{a} dx \left(\frac{m}{2a^2}\right) y^2 = \boxed{\frac{ma^2}{12}}$$

Cambiamos el rol de $a \to 2a$: $I_2 = \frac{ma^2}{3}$

Luego: $$\boxed{\mathbb{I}_G^{\{\hat x,\hat y,\hat z\}} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

b)



$\vec L_G = \mathbb{I}_G \vec\omega$; $\vec\omega = \omega\cos\alpha\,\hat z - \omega\sin\alpha\,\hat x$:

$$\mathbb{I}_G \vec\omega = \omega\cos\alpha \underbrace{\mathbb{I}_G \hat z}_{5\left(\frac{ma^2}{12}\right)\hat z} - \omega\sin\alpha \underbrace{\mathbb{I}_G \hat x}_{1\left(\frac{ma^2}{12}\right)\hat x}$$

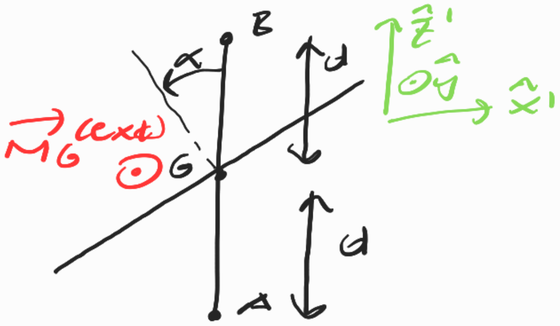
$\hat z$ es eje ppal. de $\mathbb{I}_G$

$\hat x$ es eje ppal. de $\mathbb{I}_G$

$$\Rightarrow \boxed{\vec L_G = \frac{ma^2}{12}\omega\left(5\cos\alpha\,\hat z - \sin\alpha\,\hat x\right)}$$

c) $$\vec M_G^{(ext)} = \dot{\vec L}_G = \frac{ma^2}{12}\omega\Big(5\cos\alpha \underbrace{\vec\omega \times \hat z}_{\omega\sin\alpha\,\hat y} - \sin\alpha \underbrace{\vec\omega\times\hat x}_{\omega\cos\alpha\,\hat y}\Big) :$$

$$\vec M_G^{(ext)} = \frac{ma^2}{3}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\hat y \;;$$



Las reacciones en A y B, $\vec{R_A}$, $\vec{R_B}$, se pueden escribir como:

$$\vec{R_A} = R_{Ax'}\hat{x}' + R_{Ay}\hat{y} + R_{Az'}\hat{z}'$$

$$\vec{R_B} = R_{Bx'}\hat{x}' + R_{By}\hat{y} + R_{Bz'}\hat{z}'$$

1era cardinal al rígido:
$$\begin{cases} \hat{x}') \; R_{Ax'} + R_{Bx'} = 0 \quad (i) \\ \hat{y}) \; R_{Ay'} + R_{By'} = 0 \quad (ii) \\ \hat{z}') \; R_{Az'} + R_{Bz'} = mg \quad (iii) \end{cases}$$

2da cardinal desde G:
$$\begin{cases} \hat{x}') \; -dR_{Ay} + dR_{By} = 0 \quad (iv) \\ \hat{y}) \; dR_{Ax'} - dR_{Bx'} = \frac{ma^2}{3}\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \quad (v) \end{cases}$$

De (ii) y (iv):
(i) y (v):

$$\boxed{\begin{aligned} &R_{Ay} = R_{By} = 0 \\ &R_{Ax'} = \frac{1}{2d}\frac{ma^2}{3}\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ &R_{Bx'} = -R_{Ax'} \end{aligned}}$$